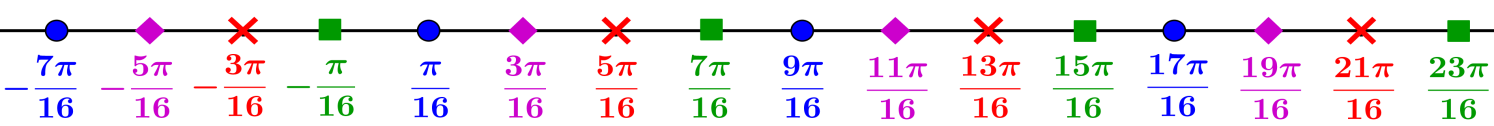
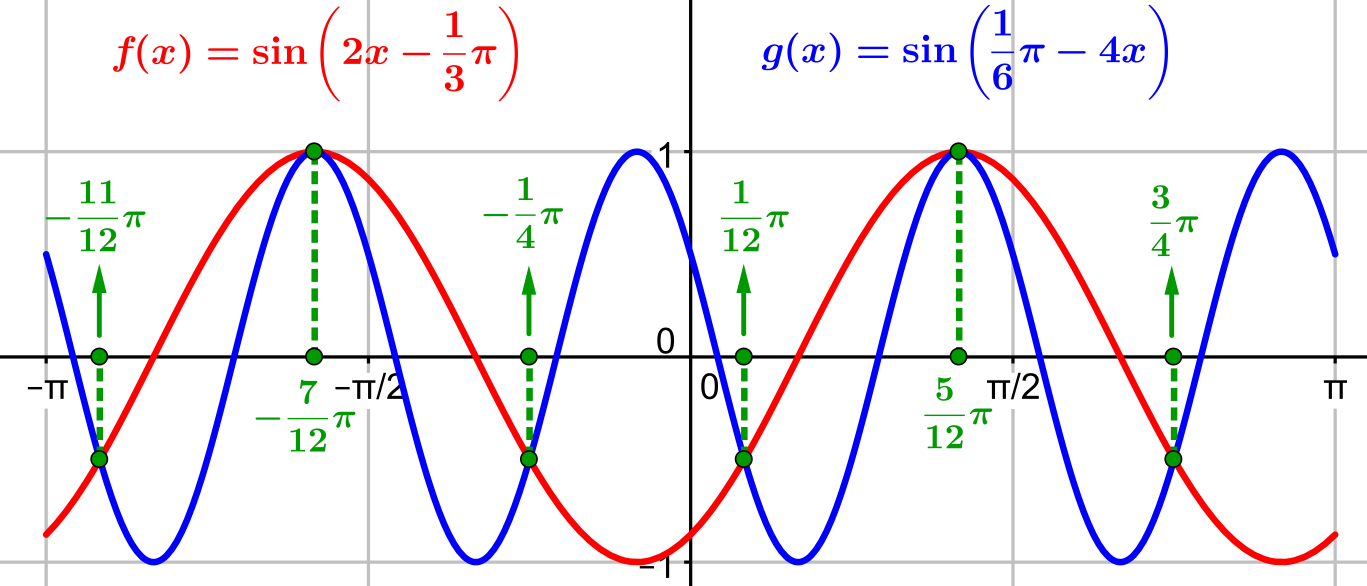
**Oplossen goniometrische vergelijkingen**We geven methoden om goniometrische vergelijkingen met sinus- en/of cosinustermen op te lossen. Een aantal basisformules moet je hierbij altijd kennen.   
We brengen ze hier bij elkaar:  
  
1) c   
2)   
3)   
4)   
5)   
6) , dus en   
7) en   
 Hieruit volgt: en   
8) ⟺   
 ⟺   
9)   
10)   
   
  
Hierbij zijn9) en 10)handige speciale gevallen van 8).   
Dit lichten we toe met twee voorbeelden.  
   
 .  
   
 .  
  
Meestal proberen we bij een goniometrische vergelijking toe te werken naar een vergelijking van het type 8) , 9) of 10).  
  
Verder moeten we voor enkele speciale hoeken (in radialen) de exacte waarde van en kennen. Deze staan in de volgende tabel.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0 | 1 |
| *π* |  |  |
| *π* |  |  |
| *π* |  |  |
| *π* | 1 | 0 |

**Een cosinusterm omzetten in een sinusterm of omgekeerd**Dit kan met de formules: en .  
  
**Een minteken voor een goniometrische term wegwerken**Dit kan op meerdere manieren.  
 .  
  
**Kwadratische termen omzetten in eerstegraadstermen**  
Hiertoe gebruiken we dat en .  
Hieruit volgt: en .  
  
**Het product van een sinus en een cosinus van dezelfde hoek eenvoudiger schrijven**  
Dit kan m.b.v. 7) :   (overstappen op de dubbele hoek).  
 **Nog enkele specifieke typen vergelijkingen  
  
A)**  ; hierbij is een getal met .   
 ***Methode* 1**  
 Er volgt dat .   
 Deze vergelijkingen dient men apart op te lossen.   
 ***Methode* 2**  
 Gebruik dat ; de vergelijking is dan te herleiden tot   
 .  
**B)** ; hierbij is een getal met .   
 ***Methode* 1**  
 Er volgt dat .  
 Deze vergelijkingen dient men apart op te lossen.  
 ***Methode* 2**  
 Gebruik dat ; de vergelijking is dan te herleiden tot  
 .  
  
Bij A) en B) geldt dat methode 2 (overstappen op de dubbele hoek) sneller tot een oplossing leidt en dat de oplossingen makkelijker zijn weer te geven dan bij methode 1.   
Verder dient men er alert op te zijn of er bij de goniometrische vergelijkingen gemeenschappelijke factoren optreden. Je krijgt dan bijvoorbeeld het type:  
I) en dit geeft ; of  
II) en dit geeft .  
  
**Opmerking**  
De vorm van de oplossing die men vindt kan afhangen van de gevolgde methode.  
Meestal is het eenvoudig om in te zien dat twee uiterlijk verschillende antwoorden op hetzelfde neerkomen. Dit zullen toelichten bij enkele van de onderstaande voorbeelden. **Voorbeelden  
1)**    
 Het getal herkennen we als een getal uit de tabel zodat we vinden:  
 , ,   
 .   
  
**2)**    
 Er geldt dat , dus .   
 De vergelijking wordt: ,   
 , .   
  
**3)**   
 Deze is van het type , dus kan snel opgelost worden:   
 , , .  
**4)**   
 ***Methode* 1**  
 , .  
 I) , ,  
 .  
 II) , ,  
 .  
 ***Methode* 2**  
 , dus de vergelijking wordt ,  
 , , , .  
 We zullen laten zien dat de oplossingen die met de twee verschillende methodes  
 gevonden zijn identiek zijn. Bij methode 1 vonden we de oplossingen  
  **(**•**)**  **()**  **(×) (∎)** Zie de onderstaande figuur.   
   
 Tussen twee opeenvolgende aangegeven punten op deze lijn ligt een afstand van .   
 Er volgt direct dat de vier reeksen van oplossingen samen kort te beschrijven zijn  
 door de formule en dit zijn precies de oplossingen die gevonden  
 zijn met methode 2.  
  
**5)**   
 We zien dat hier in het linkerlid een gemeenschappelijke factor voorkomt.  
 Deze factor halen we buiten haakjes.   
 , ;  
I) geeft , ;  
 II) geeft ,  
 : , ,  
 ;  
 : , ,  
 . We hadden II) ook anders kunnen oplossen.   
 , , , ,.  
 Eenvoudig is in te zien (zie zo nodig voorbeeld 4) dat deze oplossingen een bondiger vorm van  
 zijn van de oplossingen die gevonden zijn met de eerste methode.

**6)**  , waarbij   
 We lossen de vergelijking eerst algemeen op en kijken daarna welke van die oplossingen in het  
 interval liggen.  
 ,  
 , .  
 We moeten nu en zodanig kiezen dat de bijbehorende waarden in het   
 interval liggen.  
   
   
   
  
   
   
    
 We merken op dat de twee oplossingen en twee keer gevonden worden.   
 Dit betekent dat de grafieken van en elkaar raken  
 voor en . Algemeen duiden meervoudige oplossingen op het raken van de  
 grafieken van de bijbehorende functies.  
  
**7)**  , waarbij   
 Eerst het minteken wegwerken: .  
 Vervolgens de sinusterm omzetten in een cosinusterm:  
 , .  
 Deze laatste vergelijking is van de vorm , dus kan op de standaardmanier  
 opgelost worden.  
 ,  
 , .  
 We bepalen nu die oplossingen die in het interval liggen.  
   
   
   
   
  
**8)**   
 Links staat het product van een sinus- en cosinusterm van dezelfde hoek,   
 dus gebruiken we de verdubbelingsformule van de sinus.  
 , , ,  
 ,  
 , .  
  
**9)** .  
 Hier zetten we de kwadratische term om in een eerstegraadsterm die een uitdrukking is van de  
 cosinus van de dubbele hoek dus van .  
 , , ,   
 , .  
  
**10)**  , waarbij   
 De gebruikelijke methodes leiden hier vanwege de factor niet tot een simpele  
 standaardvergelijking. Als we echter bedenken dat het kwadraat van een sinusterm uitgedrukt  
 kan worden in het kwadraat van een cosinusterm met dezelfde hoek (vanwege de formule  
 , dan ligt de aanpak voor de hand:   
 kwadrateer beide leden van de vergelijking.  
 , , ,   
 , , ,   
 4 , .   
 De oplossingen op het interval zijn:  
 , , , , , , , .  
 We dienen deze oplossingen nog te controleren omdat we gekwadrateerd hebben.  
 Na controle blijven nog slechts over de oplossingen , , , .  
 ***Opmerking***  
 Voor wie bekend is met de basiseigenschappen van de tangensfunctie is een  
 snellere oplossing mogelijk. We gebruiken de eigenschap:  
 ⟺ .  
 De gegeven vergelijking is te herschrijven tot  
 , , , ,   
 .   
 Dit geeft op het interval de vier eerder gevonden oplossingen: , , , .