**Grafieken van wortelfuncties**We bekijken grafieken van functies waarin worteluitdrukkingen voorkomen.
Wat ons vooral interesseert is het **domein** van en de **vorm van de grafiek** van dergelijke functies.
Daartoe bekijken we een aantal voorbeelden.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 1**$f\left(x\right)=1+1,5\sqrt{2x-4}$ .Het domein wordt gevonden door op te lossen: $2x-4\geq 0$. De oplossing is $x\geq 2$. Dit geeft $D\_{f}=\left[2, \left.\rightarrow \right⟩\right.$.Het punt $(2, 1)$ is het **beginpunt** van de grafiek. Je vindt dit door in de functie de randwaarde van het domein in te vullen: $f\left(2\right)=1+1,5\sqrt{2∙2-4}=1$; de worteluitdrukking wordt altijd nul in de rand van het domein. |  |

De grafiek een functie $f\left(x\right)=a+b\sqrt{cx+d}$, waarbij $a,b,$ $c$ en $d$ constanten zijn (met $c\ne 0$), is een halve parabool die over $90°$ gedraaid is. De grafiek heeft daarom een **verticale raaklijn** in het beginpunt. Zie de figuur hieronder voor de parabool die hoort bij de grafiek van $f$.

|  |  |
| --- | --- |
| De grafiek van $f$ krijg je door de grafiek van $g$ (een halve parabool) over $90°$ te draaien (in wijzerzin) om het punt $(2, 1)$. De formule van $g$ is: $g\left(x\right)=1+\frac{2}{9}(x-2)^{2}$, waarbij $x\leq 2$.Het gestreepte gedeelte maakt geen deel uit van de grafiek, maar dient slechts om het parabolisch karakter te illustreren.Zie Appendix $A$ voor het bewijs dat de grafiek van$f\left(x\right)=a+b\sqrt{cx+d}$ (met $c\ne 0$) een halve gedraaide parabool is,  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 2**$f\left(x\right)=-3+2\sqrt{-5-2x}$ .Voor het domein moeten we oplossen$-2x-5\geq 0$, $-2x\geq 5$, $x\leq -2\frac{1}{2}$ .Dit geeft: $D\_{f}=\left⟨\leftarrow \right., \left.-2\frac{1}{2}\right]$.$f\left(-2\frac{1}{2}\right)=-3$, dus het beginpunt van de grafiek van $f$ is $\left(-2\frac{1}{2}, -3\right)$. |  |

Laten we nu een algemene wortelfunctie van de vorm$f\left(x\right)=a+b\sqrt{cx+d}$ beschouwen ($b,c\ne 0)$.
Het domein van $f$ wordt bepaald door op te lossen $cx+d\geq 0$, $cx\geq -d$. Hieruit volgt dat
$x\geq -{d}/{c}$, als $c>0$ en $x\leq -{d}/{c}$, als $c<0$. Hiermee is gevonden:
$D\_{f}=\left[-{d}/{c}, \left.\rightarrow \right⟩\right.$, als $c>0$ en $D\_{f}=$ $\left⟨\leftarrow \right., \left.-{d}/{c}\right]$, als $c<0$.
Het beginpunt van de grafiek van $f$ is het punt $\left(-{d}/{c},a\right)$. De $x$- waarde van dit punt is altijd gelijk aan het randgetal van het domein van $f$.
De vorm van de grafiek van $f$ hangt af van de tekens van de getallen $b$ en $c$.
We geven hieronder een overzicht.
****
De grafiek loopt vanaf het beginpunt naar rechts als $c>0$ en naar links als $c<0$.
Aan de schets zien we ook dat het bereik van $f$ gelijk is aan $\left[a, \left.\rightarrow \right⟩\right.$, als $b>0$ en $\left⟨\leftarrow \right., \left.a\right]$, als $b<0$.

We bekijken nu grafieken van functies van de vorm $f(x)=\sqrt{ax^{2}+bx+c}$ . Het karakter van de grafiek wordt bepaald door het teken van $a$ en het teken van de discriminant $D=b^{2}-4ac$
van $ax^{2}+bx+c$.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 3**$f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}-2x-8}$ . Hier geldt dat $a=1>0$ en $D=36>0$.Het domein vinden we door op te lossen $x^{2}-2x-8\geq 0$, $(x-4)(x+2)\geq 0$.De oplossing is $x\leq -2 ∨ x\geq 4$. Het domein bestaat uit twee gedeelten:het interval $\left⟨\leftarrow , -2\right.$] en het interval$\left[4,\right.$ $\left.\rightarrow \right⟩$. Dit wordt als volgt genoteerd:$D\_{f}=\left⟨\leftarrow , -2\right.] ∪ \left[4,\right.$ $\left.\rightarrow \right⟩$. De grafiek staat hiernaast getekend. |  |

De grafiek nadert links tot de lijn $y=-x+1$ (als $x\rightarrow -\infty $ ) en rechts tot de lijn $y=x-1$
(als $x\rightarrow \infty $ ). Deze twee lijnen heten **scheve asymptoten** van de grafiek van $f$.
We zullen deze asymptoten toelichten. Kwadraatafsplitsen geeft: $f\left(x\right)=\sqrt{\left(x-1\right)^{2}-9}$.
Als $\left|x\right|$ heel groot is, dan geldt dat $\sqrt{\left(x-1\right)^{2}-9}$ nagenoeg gelijk is aan $\sqrt{\left(x-1\right)^{2}}=\left|x-1\right|$.
Neem b.v. $x=1001$; dan $\sqrt{\left(x-1\right)^{2}-9}≈999,996$ en $\left|x-1\right|=1000$. Algemeen geldt het volgende : als $G$ een heel groot getal is en $k$ een klein getal (t.o.v. $G$), dan $\sqrt{A+k}≈\sqrt{A}$. De reden hiervoor is dat de functie $g\left(x\right)=\sqrt{x}$ steeds zwakker stijgt voor toenemende waarden van $x$. Dit is ook grafisch in te zien: de grafiek van $g$ loopt steeds vlakker als we ons ver naar rechts op $x$-as bevinden.
Nu geldt dat $\left|x-1\right|=\left\{\begin{array}{c}x-1, als x\geq 1 \\-x+1. als x\leq 1\end{array}\right.$.
Uit deze beschouwingen blijkt dat grafiek van $f$ nadert tot de lijn $y=x-1$ als $x\rightarrow \infty $ en nadert tot de lijn $y=-x+1$ als $x\rightarrow -\infty $.
Er valt nog meer te zeggen over de grafiek van $f$. Stel $y=f(x)=\sqrt{x^{2}-2x-8}$ .

|  |  |
| --- | --- |
| Evident is dat $y\geq 0$. Kwadrateren geeft: $y^{2}=x^{2}-2x-8$, $\left(x-1\right)^{2}-y^{2}=9$, dus $\frac{(x - 1)^{2}}{3^{2}}$ $-$ $\frac{y^{2}}{3^{2}}$ $=1$. Dit is een translatie van de kromme $\frac{x^{2}}{3^{2}}$ $-$ $\frac{y^{2}}{3^{2}}$ $=1$. Deze vergelijking is een speciaal geval van de vergelijking $\frac{x^{2}}{a^{2}}$ $-$ $\frac{y^{2}}{b^{2}}$ $=1$ (met $a>0$ en $b>0$).Hier staat de vergelijking van een **hyperbool** $h$. Deze bestaat uit alle punten $P(x,y)$ waarvoor geldt dat $\left|PF\_{1}-PF\_{2}\right|=2a$, waarbij$F\_{1}=(-c,0)$ en $F\_{2}=(c,0)$, met $c=\sqrt{a^{2}+b^{2}}$.De twee punten $F\_{1}$ en $F\_{2}$ heten de **brandpunten** van de hyperbool. De twee gedeelten van de  |  |

grafiek heten de **takken** van de hyperbool. De twee lijnen met vergelijking $y=-\frac{b}{a}x$ en
$y=\frac{b}{a}x$ zijn de scheve asymptoten van $h$. Zoals hierboven gezien geldt voor de punten $\left(x,y\right)$ van de grafiek van $f$: $\frac{(x - 1)^{2}}{3^{2}}$ $- $ $\frac{y^{2}}{3^{2}}$ $=1$ en $y\geq 0$. Dit betekent dat de grafiek van $f$ de bovenste helft van een (verschoven) hyperbool is. We merken op dat de twee scheve asymptoten $y=-x+1$ en
$y=x-1$ loodrecht op elkaar staan, maar dit hoeft niet algemeen te gelden.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 4**$f\left(x\right)=\sqrt{4x^{2}+16x+12}$ .Hier geldt dat $a=4>0$ en $D=64>0$.Voor het domein moet gelden:$4x^{2}+16x+12\geq 0$, $x^{2}+4x+3\geq 0$, $(x+3)(x+1)\geq 0$, $x\leq -3 ∨ x\geq -1$.Dit geeft: $D\_{f}=\left⟨\leftarrow , -3\right.] ∪ \left[-1,\right.$ $\left.\rightarrow \right⟩$. Uit $f\left(x\right)=\sqrt{(2x+4)^{2}-4}$ blijkt dat $f\left(x\right)≈\sqrt{\left(2x+4\right)^{2}}=\left|2x+4\right|$, als $\left|x\right|$ heel groot is. De scheve asymptoten van de grafiek van $f$ zijn daarom $y=2x+4$ (rechts) en$y=-2x-4$ (links). Hier staan de asymptoten *niet* loodrecht op elkaar. De reden is dat $a\ne 1$. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 5**$f\left(x\right)=\sqrt{4x^{2}-12x+9}$ .Hier geldt dat $a=4>0$ en $D=0$. Uit deze twee betrekkingen volgt dat $4x^{2}-12x+9$ het kwadraat is van een eerstegraadsfunctie: $4x^{2}-12x+9=(2x-3)^{2}$.Dit geeft: $f\left(x\right)=\sqrt{(2x-3)^{2}}=\left|2x-3\right|$.Het domein van $f$ is $R$, de verzameling van alle reële getallen. Het voorschrift van $f$ zonder absolute waarde tekens is $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}2x-3 als x\geq 1\frac{1}{2}\\-2x+3 als x\leq 1\frac{1}{2}\end{array}\right.$ . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 6**$f\left(x\right)=\sqrt{4x^{2}+24x+45}$ .Hier geldt dat $a=4>0$ en $D=-144<0$.De parabool $y=4x^{2}+24x+45$ ligt geheel boven de $x$-as, dus $4x^{2}+24x+45>0$ voor alle $x$.Dit betekent dat $D\_{f}=R$.$f\left(x\right)=\sqrt{(2x+6)^{2}+9}≈\left|2x+6\right|$ als $\left|x\right|$ heel groot is. De scheve asymptoten van de grafiek van $f$ zijn daarom $y=2x+6$ (rechts) en $y=-2x-6$ (links).Stel nu dat $y=f\left(x\right)=\sqrt{4x^{2}+24x+45}$.Dan $y\geq 0$ en $y^{2}=(2x+6)^{2}+9=4(x+3)^{2}+9$.Dit is te herschreven als: |  |

$\frac{y^{2}}{3^{2}}$$- $ $\frac{(x + 3)^{2}}{\left(1\frac{1}{2}\right)^{2}}$$=1$. Hier staat de vergelijking van een hyperbool waarvan de brandpunten op de verticale lijn $x=-3$ liggen. De grafiek van $f$ is de bovenste tak van deze hyperbool.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 7**$f\left(x\right)=\sqrt{-x^{2}+4x+5}$ .Hier geldt dat $a=-1<0$ en $D=36>0$.We bepalen eerst het domein, dus op te lossen$-x^{2}+4x+5\geq 0$ $(×-1)$, $x^{2}-4x-5\leq 0$, $(x+1)(x-5)\leq 0$, $-1\leq x\leq 5$.Derhalve $D\_{f}=[-1, 5]$.Stel $y=f\left(x\right)=\sqrt{-x^{2}+4x+5}$. |  |

Dan $y\geq 0$ en $y^{2}=-x^{2}+4x+5$, $x^{2}-4x+y^{2}=5$, $(x-2)^{2}+y^{2}=9$.
Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt $(2, 0)$ en straal $3$. Omdat $y\geq 0$ voor de punten op de grafiek van $f$, stelt de grafiek van $f$ de bovenste helft van deze cirkel voor.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 8**$f\left(x\right)=\sqrt{-4x^{2}-8x+12}$ .Hier geldt dat $a=-4<0$ en $D=256>0$.Voor het domein moet gelden $-4x^{2}-8x+12\geq 0$ $(÷-4)$$x^{2}+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$, $-3\leq x\leq 1$.Dit geeft: $D\_{f}=[-3, 1]$.Stel $y=f\left(x\right)=\sqrt{-4x^{2}-8x+12}$. Dan geldt dat $y\geq 0$ en$y^{2}=-4x^{2}-8x+12$, $y^{2}=-4\left(x+1\right)^{2}+16$, $4\left(x+1\right)^{2}+y^{2}=16$, $\frac{(x + 1)^{2}}{2^{2}}$ $+ $ $\frac{y^{2}}{4^{2}}$ $=1$. |  |

Dit is een verschoven speciale versie van de volgende algemene kromme: $\frac{x^{2}}{a^{2}}$ $+ $ $\frac{y^{2}}{b^{2}}$ $=1$, waarbij $a>0$, $b>0$ en $a\ne b$. Deze kromme stelt een **ellips** $e$ voor. Er bestaan twee punten $F\_{1}$ en $F\_{2}$ zodanig dat voor elk punt $P$ van $e$ geldt: $PF\_{1}+PF\_{2}=K$, waarbij $K$ een constante is.
Deze constante $K$ is gelijk aan $2a$ in het geval $a>b$ en gelijk aan $2b$ in het geval $b>a$.
Als $a>b$, dan zijn de brandpunten $F\_{1}(-c,0)$ en $F\_{2}(c,0)$, waarbij $c=\sqrt{a^{2}-b^{2}}$.
Als $a<b$, dan zijn de brandpunten $F\_{1}(0, -c)$ en $F\_{2}(0, c)$, waarbij $c=\sqrt{b^{2}-a^{2}}$.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

 hier geldt $a>b$; $PF\_{1}+PF\_{2}=2a$ hier geldt $a<b$; $PF\_{1}+PF\_{2}=2b$

De grafiek van $f$ is de bovenste helft van een ellips waarvan de brandpunten op de verticale lijn
$x=-1$ liggen

**Appendix A**
We zullen gaan aantonen dat de grafiek van $f\left(x\right)=a+b\sqrt{cx+d}$, waarbij $b\ne 0 en c\ne 0$, een halve gedraaide parabool is.

|  |  |
| --- | --- |
| Daartoe moeten we eerst begrijpen hoe de coördinaten van een punt veranderen als we dit punt onderwerpen aan een rotatie van 90° in wijzerzin rondom de oorsprong $O$.Bekijk de figuur hiernaast.Het punt $P(x, y)$ gaat door een rotatie over 90° in wijzerzin over in het punt $P'(x^{'},y^{'})$. $Q$ is de loodrechte projectie van $P$ op de $x$-as en$R$ is de loodrechte projectie van $P'$ op de $x$-as.Merk op dat $OP=OP'$, $∠OQP=∠P'RO=90°$ en $∠OPQ=90°-∠POQ=∠P'OR$. Hieruit volgt dat $∆OPQ≅∆P'OR$ (ZHH congruentiekenmerk).  |  |

Dit impliceert: $x^{'}=y$ en $y^{'}=-x$.
Deze betrekking geldt niet alleen als $P$ in het eerste kwadrant ligt, maar ook voor de overige kwadranten, zoals men eenvoudig controleert.
We schrijven het voorschrift $f\left(x\right)=a+b\sqrt{cx+d}$ in de vorm $f\left(x\right)=a+b\sqrt{c\left(x-e\right)}$ ,
waarbij $e=-{d}/{c}$. Er zijn verschillende tekencombinaties van de optredende constanten mogelijk.
We zullen hier aannemen dat $b>0$ en $c>0$. De andere gevallen verlopen vrijwel analoog.
Merk op dat $D\_{f}=\left[e, \left.\rightarrow \right⟩\right.$. Beschouw de functie $g$ gegeven door $g\left(x\right)=a+\frac{1}{b^{2}c}(x-e)^{2}$, waarbij $D\_{g}=\left⟨\leftarrow \right., \left.e\right]$. De grafiek van $g$ is een halve parabool. We zullen aantonen dat bij een rotatie om het punt $(a,e)$ in wijzerzin over $90°$ de grafiek van $g$ overgaat in de grafiek van $f$. We passen op beide grafieken de translatie $T(-a,-e$) toe. De grafiek van $f$ gaat over in de grafiek van de functie $f\_{1}$, waarbij $f\_{1}\left(x\right)=b\sqrt{cx}$ met $D\_{f\_{1}}=\left[0, \left.\rightarrow \right⟩\right.$ en de grafiek van $g$ gaat over in de grafiek van de functie $g\_{1}$, waarbij $g\_{1}\left(x\right)=\frac{1}{b^{2}c}x^{2}$ met $D\_{g\_{1}}=\left⟨\leftarrow \right., \left.0\right]$.
Ter afkorting noemen we R rotatie om $(0, 0)$ in wijzerzin over $90°$.
 Het is voldoende om aan te tonen dat door R de grafiek van $g\_{1}$ overgaat in de grafiek van $f\_{1}$.
Voor de punten $(x,y)$ van de grafiek van $g\_{1}$ geldt: $y=\frac{1}{b^{2}c}x^{2}$. Door R gaat het punt $(x,y)$ over in het punt $(x^{'},y^{'})$, waarbij $x^{'}=y$ en $y^{'}=-x$. Door te substitueren $y=x'$ en $x=-y'$ gaat de betrekking $y=\frac{1}{b^{2}c}x^{2}$ over in $x^{'}=\frac{1}{b^{2}c}(-y^{'})^{2}$. Hieruit volgt dat $(y^{'})^{2}=b^{2}cx'$.
Vanwege $y^{'}=-x\geq 0$ (omdat $x^{'}\leq 0$, voor alle punten $(x,y)$ van de grafiek van $g\_{1}$), volgt er dat $y^{'}=\sqrt{b^{2}cx' }$, dus $y^{'}=b\sqrt{cx'}$. Hieruit blijkt dat alle punten $(x^{'},y^{'})$ op de grafiek van $f\_{1}$ liggen.
Het bovenstaande leert dat een willekeurig punt $(x,y)$ van de grafiek van $g\_{1}$ door R wordt afgebeeld op het punt $(y,-x)$ dat op de grafiek van $f\_{1}$ ligt. (\*)
Er dient nog aangetoond worden dat bij R elk punt van de grafiek van $f\_{1}$ het beeld is van een punt
van de grafiek van $g\_{1}$. Neem een willekeurig punt $(x,y)$ van de grafiek van $f\_{1}$. Dan geldt dat
$x\geq 0$, $y\geq 0$ en $y=b\sqrt{cx}$. Er volgt dat $y^{2}=b^{2}cx$, dus $x=\frac{1}{b^{2}c}y^{2}$. Dan geldt ook dat $x=\frac{1}{b^{2}c}(-y)^{2}$.
Omdat $-y\leq 0$, volgt hieruit dat het punt $(-y,x)$ op de grafiek van $g\_{1}$ ligt.
Gelet op (\*) wordt dit punt door R afgebeeld op het punt $\left(x,-\left(-y\right)\right)=(x,y)$ van de grafiek van $f\_{1}$
Hiermee is het bewijs voltooid.

We zullen nog motiveren hoe we de formule van $g$ gevonden hebben.
Neem aan dat de grafiek van $f$ ontstaat door de rotatie om $(a,e)$ over $90°$ in wijzerzin van een halve parabool. Bij deze parabool hoort een functie $g$ met een voorschrift van de vorm
$g\left(x\right)=a+λ(x-e)^{2}$, waarbij $λ$ een nader te bepalen constante is en $D\_{g}=\left⟨\leftarrow \right., \left.e\right]$; de top van de (halve) parabool is immers het punt $(a,e)$.
Er geldt dat $f\left(e+c\right)= a+b\sqrt{c\left(e+c-e\right)}=a+b\sqrt{c^{2}}=a+bc$.
Door het punt $P^{'}(a,a+bc)$ op de grafiek van $f$ terug te draaien over $90°$ in tegenwijzerzin krijg je het punt $P(e-bc, a+c)$ op de grafiek van $g$. Zie de figuur hieronder.
****
Er geldt daarom dat
$g\left(e-bc\right)=a+λ(-bc)^{2}=a+c$, $λ∙b^{2}c^{2}=c$, dus $λ=$ $\frac{1}{b^{2}c}$ .
Hiermee is gevonden: $g\left(x\right)=a+\frac{1}{b^{2}c}(x-e)^{2}$.