**Harmonische trilling**Een **harmonische trilling** is een op- en neergaande beweging van een puntdeeltje waarvan de hoogte te beschrijven is door ( en ). Hierbij is de tijd en de **amplitude** (= maximale uitwijking t.o.v. de evenwichtsstand). Op het tijdstip bevindt het deeltje zich in de evenwichtsstand en begint dan naar boven te bewegen.

|  |  |
| --- | --- |
| Een harmonische trilling is op te vatten als de **loodrechte** **projectie** van een eenparige cirkelbeweging van een puntdeeltje op de verticale middellijn van de cirkel. is dan te interpreteren als de **hoeksnelheid**, d.w.z. de hoek in radialen die per tijdseenheid doorloopt. We noemen dit ook de hoeksnelheid van de trilling.We merken op dat per periode de afstand aflegt. Hierbij is de straal van de cirkel die doorloopt.Ook in de natuurkunde kun je te maken krijgen met een harmonische trilling, bijvoorbeeld bij de beweging van een elektrisch geladen deeltje in een condensator waarop een wisselspanning staat.  |  |

De **periode** of **trillingstijd** van de harmonische trilling is .
De **frequentie** is het aantal perioden per tijdseenheid, dus .

Stel nu dat we twee harmonische trillingen hebben met een gelijke hoeksnelheid en een gelijke amplitude. Ze worden beschreven door:
 en .
Dan loopt het ene deeltje voor (of achter) op het andere met een **tijdsverschil** van
. Welke fractie van een periode loopt dan dat deeltje voor op de andere?
Dit is gelijk aan en heet het **faseverschil** van de twee trillingen. Het is ook gelijk aan .
Voor de bijbehorende eenparige cirkelbewegingen geldt dan dat het ene deeltje een voorsprong (of achterstand) heeft van deel van de omtrek van de volledige cirkel.
 **Som (samenstelling) van twee harmonische trillingen**Stel dat, waarbij en .
Stelt dan weer een harmonische trilling voor? Dit is in het algemeen *niet* het geval, zoals te zien is
aan het volgende voorbeeld: neem , en .
De grafieken van , en zijn getekend in de volgende figuur:



Er geldt de regel:
**de som van twee harmonische trillingen is slechts dan weer een harmonische trilling als de hoeksnelheden (dus de trillingstijden) gelijk zijn.**

We gaan nu eerst uit van gelijke hoeksnelheden en stellen .
Dan kan bewezen worden dat een harmonische trilling is van de vorm:
 (het bewijs zullen we hier niet geven).
Hoe kunnen we en berekenen? Hiervoor zullen twee gevallen onderscheiden:

**I) De amplitudes zijn gelijk**. Stel .
Dan kunnen en met een van de vier formules van Mollweide algebraïsch berekend worden.
De formule is: .
Passen we de bovenstaande formule toe, dan krijgen we:

 .
Hieraan zien we dat en
Twee speciale gevallen zijn vermeldingswaard.
A) ( geheel). Dan , dus .
De twee harmonische trillingen hebben dan een faseverschil van en doven elkaar volledig uit.
B) ( geheel). Dan , dus .
De twee harmonische trillingen hebben dan een faseverschil van en versterken elkaar.
**II) De amplitudes zijn ongelijk.**
Dan mogen en benaderd worden m.b.v. de grafische rekenmachine.
Dit gaat als volgt. We plotten de grafiek van , d.w.z. we voeren in:
.
Het handigste is het om deze functie te plotten op het interval , waarbij .
Je ziet dan precies één periode van . Na het plotten passen we toe: G-Solve ⟶ Max.
De waarde van het maximum geeft dan de (benaderde) waarde van .
Vervolgens bepalen we m.b.v. G-Solve ⟶ Root een nulpunt van .
Indien in dit nulpunt de grafiek van *stijgend* door de as gaat, dan geeft dit nulpunt de waarde van . Indien in dit nulpunt de grafiek van *dalend* door de as gaat, dan lopen we m.b.v. de cursortoets naar het andere nulpunt. Hier gaat de grafiek *stijgend* door de as.
Dit nulpunt geeft nu de waarde van .

**Voorbeeld 1**
, waarbij en .
Schrijf in de vorm . Bereken en algebraïsch.

**Oplossing**
Een algebraïsche oplossing is mogelijk omdat en gelijke hoeksnelheden (dus gelijke trillingstijden) en gelijke amplitudes hebben. De formule van Mollweide geeft:

 .
We zien hieraan dat en .

**Voorbeeld 2**
, waarbij en .
Schrijf in de vorm .
Geef de waarden van en in twee decimalen nauwkeurig.
 **Oplossing**De periode van is gelijk aan .
We plotten de grafiek van op het interval .
In V-Window nemen we , (-)max: , en (-)max: 8.
Er geldt immers dat en , dus .
De grafiek wordt als volgt:



M.b.v. G-Solve ⟶ Max en G-Solve ⟶ Root vinden we dat en

**Voorbeeld 3**
, waarbij en
Schrijf in de vorm .
Geef de waarden van en in drie decimalen nauwkeurig.

**Oplossing**
De periode van is gelijk aan . We plotten de grafiek van
 op het interval .
In V-Window nemen we , (-)max: , en (-)max: 30.
De grafiek wordt als volgt:


M.b.v. G-Solve ⟶ Max en G-Solve ⟶ Root vinden we dat en .

We willen nu de periode van de som van twee harmonische trillingen bepalen.
Stel weer dat, waarbij en .
 hoeft dan geen harmonische trilling te beschrijven, maar kan wel een periodieke functie zijn.
Er geldt de volgende eigenschap (die we hier niet zullen bewijzen):

  **is periodiek is een rationaal getal**.

De twee meest voorkomende gevallen zijn die waarbij en beide rationale (dus mogelijk gehele) getallen zijn en die waarbij en rationale (dus mogelijk gehele) veelvouden van zijn.
We nemen nu aan dat inderdaad een rationaal getal is, zeg , waarbij en positieve gehele getallen zijn. We zullen hierbij aannemen dat de breuk zo eenvoudig mogelijk geschreven is, d.w.z. dat er in de teller en noemer geen gemeenschappelijke factoren voorkomen. Anders gezegd, we nemen aan dat de grootste gemene deler van en gelijk is aan 1.
Dit is kort te noteren als .
Van de standaardfunctie past er precies één periode in het interval .
Van bijvoorbeeld de functie passen er precies 4 periodes in het interval , omdat de periode van deze functie gelijk is aan . In het algemeen geldt voor de functie
 ( dat er precies periodes passen in het interval . Hierbij hoeft geen geheel getal te zijn. We vinden hiermee het volgende:
 in het interval passen periodes van en periodes van .
Door alles te delen door en vervolgens alles te vermenigvuldigen met (of direct alles te vermenigvuldigen met ), komen we tot:
 in het interval passen periodes van en periodes van .
Na de tijd (vanaf ) zijn de trillingen en derhalve weer in dezelfde positie als op het tijdstip . Uit het gegeven dat kan men dan afleiden dat er geen met bestaat zodanig dat na de tijd vanaf de trillingen en weer in dezelfde positie zijn als op het tijdstip . Hieruit volgt dat de periode van gelijk is aan .
We hebben hiermee het volgende resultaat gevonden.

**Stelling 1**
Stel dat, waarbij en .
Verder is gegeven dat , waarbij en positieve gehele getallen zijn met .
Dan is de periode van gelijk aan . Dit is ook gelijk aan .

In een concrete situatie kan men beter, i.p.v. de bovenstaande formule te memoriseren, de hiervoor beschreven stappen zelf uitvoeren. We geven hieronder enkele voorbeelden.
Merk op dat dat de getallen en in de bovenstaande voorbeelden geen enkele rol spelen.
We kunnen ons daarom beperken tot voorbeelden waarin en .

**Voorbeeld 4**
, waarbij en .
In het interval passen periodes van en periodes van .
In deze betrekking delen we alles door een zodanig getal dat en overgaan in twee positieve gehele getallen waarvan de grootste gemene deler gelijk is aan 1.
We zien dan snel in dat we alles moeten delen door . Dit leidt tot het volgende:
in het interval passen periodes van en periodes van .
De periode van is daarom gelijk aan . Als we stelling 1, zouden toepassen dan vinden we dat , dus de periode van is gelijk aan .

**Voorbeeld 5**
, waarbij en .
In het interval passen periodes van en periodes van , dus (alles delen door 6) passen in het interval periodes van en 5 periodes van .
De periode van is daarom gelijk aan .