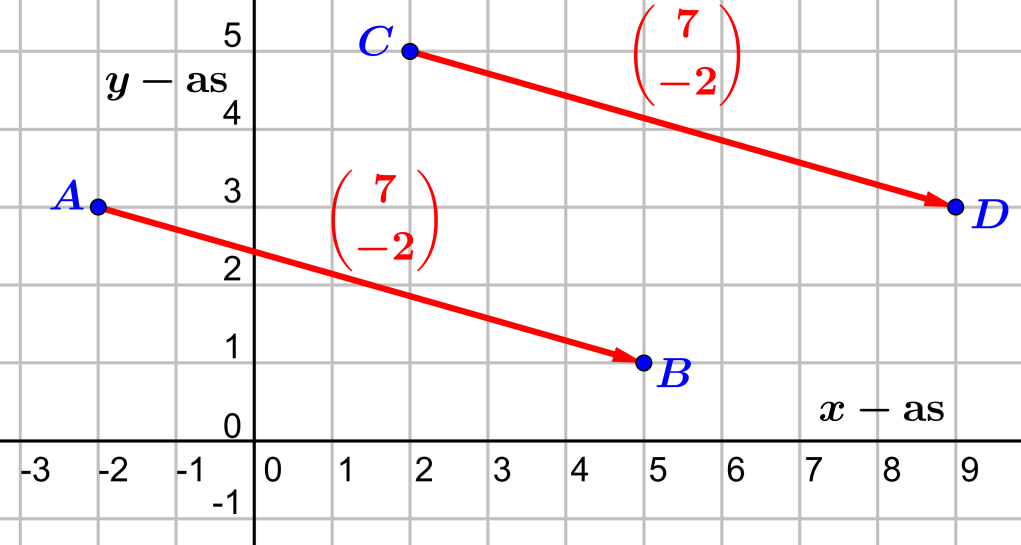
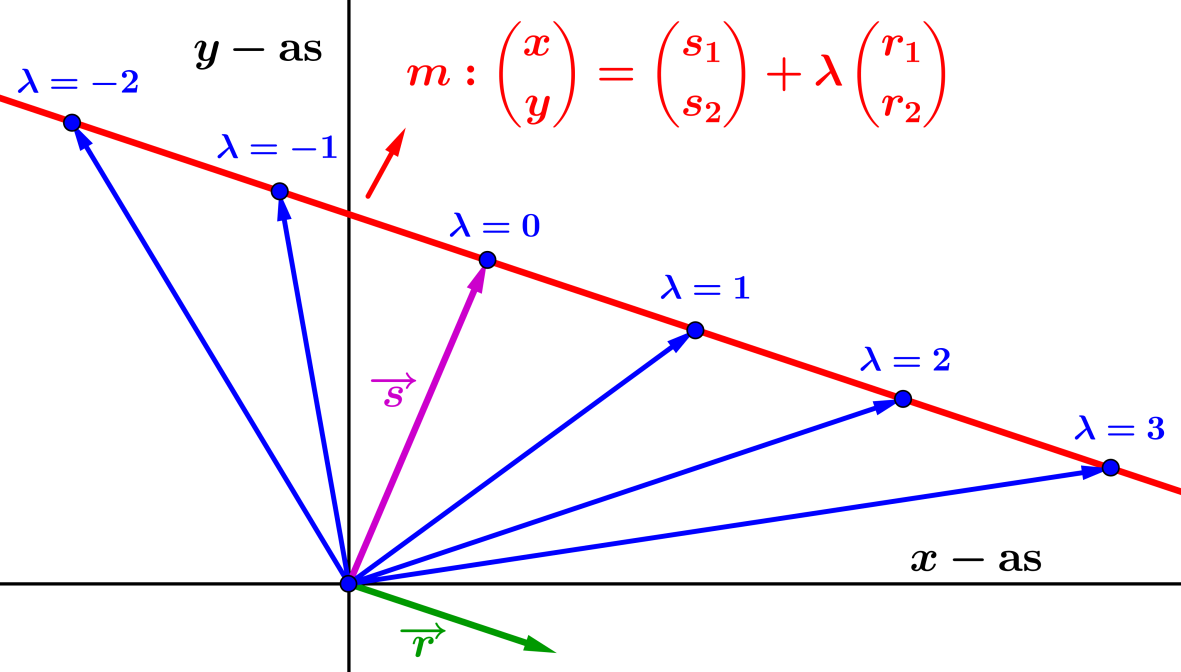
**A) Vectoren in het platte vlak (de tweedimensionale ruimte).**

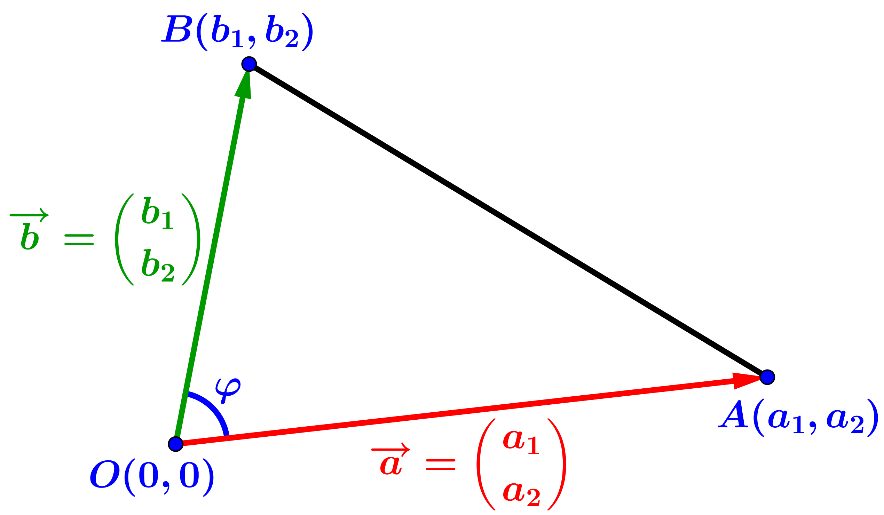
|  |  |
| --- | --- |
| Een **vector** in het platte vlak is een gericht lijnstuk (= pijl) met een beginpunt en een eindpunt. Als het beginpunt is en het eindpunt , dan is de vector van  naar : . De twee getallen en heten de **kentallen** van de vector . |  |

Hierbij kan en/of negatief zijn.   
De kentallen geven de coördinaatveranderingen aan als we van naar gaan.  
Als bijvoorbeeld de punten gegeven zijn, dan  
 .  
  
  
  
De grootte en richting van een vector liggen vast als de kentallen bekend zijn, maar de plaats kan variëren! De vector met de oorsprong als beginpunt en als eindpunt is  
 ; deze wordt vaak genoteerd als . Dit heet de **plaatsvector** behorend bij .  
De lijn door en wordt de **drager** van genoemd.  
De **nulvector** is de vector .   
De **tegengestelde** van vector is de vector die even groot is als maar tegengesteld gericht is aan . Deze wordt genoteerd als . Als , dan .  
  
Als een vector is en een getal dan definiëren we , dus de kentallen van vector  
 worden met de factor vermenigvuldigd. Als , dan heeft dezelfde richting als ;   
als , dan is de richting van tegengesteld aan die van .  
De **lengte** van de vector is gelijk aan en wordt genoteerd als .  
Hierbij is de stelling van Pythagoras toegepast.  
Vectoren kunnen we bij elkaar **optellen** en van elkaar **aftrekken**.  
Als en , dan spreken we af dat en .  
Optelling en aftrekking van vectoren hebben een meetkundige betekenis, zoals in de figuren hieronder is aangegeven.

|  |  |
| --- | --- |
| vector (3).png | vector (4).png |

Voor een willekeurig lijnstuk geldt: lengte van .  
We geven nu een manier aan om een lijn in vectorvorm te beschrijven. Neem een willekeurig punt op . De vector heet een **steunvector** van . Een vector ≠ waarvan de drager evenwijdig is aan heet een **richtingsvector** van . Stel nu dat van lijn een steunvector  
 en een richtingsvector gegeven zijn. Dan wordt de **parametervoorstelling** (pv)   
(ook wel genoemd de **vectorvoorstelling**) van de lijn gegeven door   
  
.   
  
Hierbij is de vector met de oorsprong als beginpunt en een variabel punt op de lijn als eindpunt. Door bij de steunvector van alle mogelijke veelvouden van de richtingsvector   
op te tellen, krijg je alle mogelijke vectoren met beginpunt en eindpunt op .   
Zie de onderstaande figuur. De pv van is ook componentsgewijs uit te schrijven : .   
  
De pv van een lijn is zeker niet uniek. Voor de steunvector kan elke vector genomen worden met als beginpunt en een punt op als eindpunt. De richtingsvector kan vervangen worden door , waarbij een willekeurig getal is. We kiezen bij voorkeur (indien mogelijk) een steunvector en een richtingsvector met gehele en relatief kleine kentallen.   
Een pv van de lijn door de punten en is:  
  
  
  
Hierbij is een richtingsvector en een steunvector van de lijn door en .  
  
**Voorbeeld 1**Geef een pv van de lijn door en .  
**Oplossing**  
De pv van is , oftewel .  
We kunnen vervolgens de richtingsvector nog een factor 5 kleiner maken.   
We vinden dan als pv van .  
  
**Voorbeeld 2**  
Bepaal de coördinaten van het snijpunt van de twee lijnen  
 en .  
.  
**Oplossing**Componentsgewijs worden de parametervoorstellingen van beide lijnen  
  
 en . We moeten waarden van en vinden waarvoor de corresponderende componenten gelijk zijn, dus moeten we of oplossen uit het stelsel vergelijkingen:  
 , oftewel , .  
Optellen van deze vergelijkingen geeft dat , dus .  
 hoeven we niet uit te rekenen, want met alleen is reeds het snijpunt te bepalen. We vinden:  
 en . Dit geeft als snijpunt   
We merken voor de volledigheid nog op dat we ook op uitkomen als we nemen.

|  |  |
| --- | --- |
| Voor de hoek φ tussen twee vectoren geldt dat . |  |

Voor de hoek tussen de vectoren en (notatie ) geldt de volgende formule   
. **(1)**  
  
We zullen **(1)** bewijzen. Beschouw de onderstaande driehoek (waarin ).  
  
Toepassen van de cosinusregel geeft:  
   
   
 , waarmee **(1)** bewezen is.  
  
De uitdrukking heet het **inproduct** van de vectoren en   
en wordt genoteerd als . De betrekking in **(1)** is te hiermee te herschrijven tot  
  
. **(2)**

**Voorbeeld 3**Gegeven zijn en . Bereken in hele graden nauwkeurig.  
**Oplossing**  
Toepassen van **(2)** geeft:   
 , dus 129°.  
 en staan juist dan loodrecht op elkaar als , dus als .  
Gelet op **(2)** hebben we hiermee gevonden dat:  
  
. **(3)**Hiermee kunnen we heel simpel een vector bepalen die loodrecht staat op een gegeven vector:  
  
. **(4)**

Er geldt immers dat . Een **normaalvector** van een lijn is een vector ≠ die loodrecht op die lijn staat. Een normaalvector van een lijn staat natuurlijk ook loodrecht op elke richtingsvector van die lijn. Er geldt de volgende eigenschap:  
  
**de vector is een normaalvector van de lijn** . **(5)**  
Bewijs van **(5)**.  
We bekijken eerst de lijn door de oorsprong met vergelijking . Deze vergelijking is te herschrijven als , dus het inproduct van de vectoren en is gelijk aan 0.   
Dit betekent volgens **(3)** dat loodrecht staat op voor elke punt op de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| Er volgt direct dat loodrecht staat op de lijn . Maar dan staat ook loodrecht op de lijn omdat de lijnen en onderling evenwijdig zijn. De omgekeerde eigenschap luidt: | normaalvector.png |

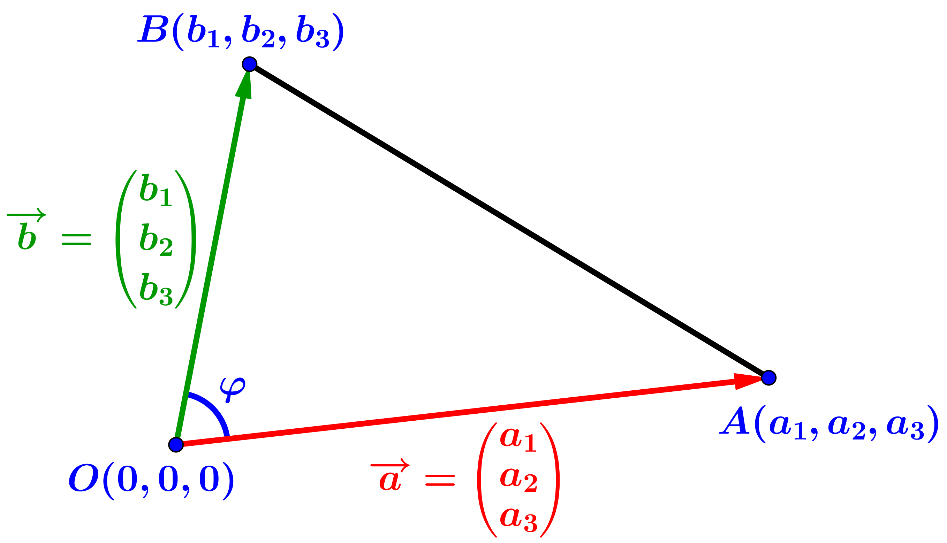
**als een normaalvector is van een lijn , dan is de vergelijking van van de vorm**

**, voor een zekere constante** . **(6)**  
  
Dit volgt eenvoudig door in het bewijs van **(5)** de stappen om te draaien.  
De waarde van in **(6)** wordt gevonden door in die vergelijking een punt van in te vullen.  
De eigenschap **(6)** impliceert het volgende resultaat:  
  
**een vergelijking van de lijn door punt die loodrecht staat op de vector is**. **(7)**Immers ligt op , dus volgt uit **(6)** dat .In vectornotatie is **(7)** te herschrijven als: . Hierin staat uitgedrukt dat voor elk punt van de lijn de vector loodrecht staat op de vector . Door **(4)** en **(5)** te combineren vinden we dat  
  
 **is een richtingsvector van de lijn** . **(8)**  
We laten nu zien hoe je een pv van een lijn kunt omzetten in een vergelijking en omgekeerd hoe je een vergelijking van een lijn kunt omzetten in een pv.  
Stel dat de lijn als pv heeft . Dan is een richtingsvector van , dus is (volgens **(4)**) een normaalvector van . Bovendien gaat door het punt .   
Een vergelijking van is daarom: .  
Dit was ook anders af te leiden, namelijk door de pv van componentsgewijs uit te schrijven:  
. We moeten hieruit elimineren en dit kan als volgt:  
vermenigvuldig de bovenste vergelijking met , de onderste met en tel de resulterende vergelijkingen bij elkaar op. We krijgen dan: . Samengevat:  
  
**een vergelijking van de lijn is** . **(9)**In vectornotatie is dit te herschrijven als: .  
Hierin staat uitgedrukt dat voor elk punt van de lijn de vector loodrecht staat op de vector . Omgekeerd stel dat een vergelijking van de lijn is.   
Dan is een normaalvector van , dus is een richtingsvector van (volgens **(4)**).  
Zoek een punt , liefst met gehele coördinaten, dat op ligt. Als dit niet lukt, dan kun je nemen in het geval dat ; als , dan , zodat je in dit geval kunt nemen .   
Als pv van kunnen we dan altijd kiezen. Samengevat.  
  
**een pv van de lijn is** , **waarbij een willekeurig punt op is**. **(10)**We leiden nu een formule af voor de afstand van een punt tot de lijn . Daartoe stellen we een pv op van de lijn door die loodrecht staat op. Stel dat het snijpunt is van en . Dan is de gezochte afstand tussen en gelijk aan de lengte van het lijnstuk .   
We werken de details uit. Een pv van is , dus componentsgewijs uitgeschreven: , . Dit substitueren we in de vergelijking van   
. Hieruit lossen we op .   
Voor deze waarde van vinden we voor het snijpunt van en :  
  
 en De gezochte afstand is gelijk aan :  
   
 . Samengevat:   
**de afstand van het punt tot de lijn is gelijk aan   
 (formule van Hesse)**. **(11)  
Voorbeeld 4**  
Bepaal in één decimaal nauwkeurig de afstand van het punt tot de lijn  
   
**Oplossing**  
Toepassen van **(11)** geeft: .  
De hoek tussen twee lijnen en (die per definitie niet-stomp is), kan als volgt uitgerekend worden. Bepaal een richtingsvector van en een richtingsvector van . De hoek tussen en is gelijk aan , als scherp of recht is en gelijk aan , als stomp is.  
Dit is als volgt in een formule te vertalen

**cos** , **(12)  
waarbij een richtingsvector is van en een richtingsvector is van** .De absolute waarde in de teller zorgt ervoor dat niet-stomp is. Er bestaat ook een andere handige formule voor de hoektussen twee lijnen die m.b.v. de goniometrie kan worden afgeleid:  
  
**tan** , **waarbij en de richtingscoëfficiënten zijn van en** . **(13)**  
 **Voorbeeld 5**Bepaal de exacte waarde van de hoek tussen de lijnen  
 en .  
**Oplossing**  
**Manier 1** en zijn richtingsvectoren van resp. ; hierbij is **(8)** gebruikt.  
Toepassen van **(12)** geeft:  
cos   , dus .  
**Manier 2**  
Er geldt dat en . Toepassen van **(13)** geeft:   
tan , dus .

**B) Vectoren in de (driedimensionale) ruimte.**  
  
Veel van hetgeen behandeld in A) voor het platte vlak is rechtstreeks uit te breiden voor de ruimte.  
Een **vector** in de ruimte is een gericht lijnstuk (= pijl) met een beginpunt en een eindpunt.   
Als het beginpunt is en het eindpunt , dan is de vector van naar :   
 . De drie getallen , en heten de **kentallen** van de vector .  
De vector met de oorsprong als beginpunt en als eindpunt is  
 ; deze wordt genoteerd als en heet de **plaatsvector** behorend bij .  
De **nulvector** is de vector . De lijn door en wordt de **drager** van genoemd. De **tegengestelde** van vector is de vector die even groot is als maar tegengesteld gericht is aan . Deze wordt genoteerd als . Als , dan .  
Als een vector is en een getal dan definiëren we , dus de kentallen van vector worden met de factor vermenigvuldigd. Als , dan heeft dezelfde richting als ;   
als , dan is de richting van tegengesteld aan die van .  
De **lengte** van de vector is gelijk aan en wordt genoteerd als .  
Hierbij is de stelling van Pythagoras (tweemaal) toegepast.  
Vectoren kunnen we bij elkaar **optellen** en van elkaar **aftrekken**.   
Als en , dan spreken we af dat en .  
Voor een willekeurig lijnstuk geldt: lengte van .

We geven nu een manier aan om een lijn in vectorvorm te beschrijven. Neem een willekeurig punt op . De vector heet een **steunvector** van de lijn . Een vector ≠ waarvan de drager evenwijdig is aan heet een **richtingsvector** van . Stel nu dat van een steunvector  
 en een richtingsvector gegeven zijn. Dan wordt de **parametervoorstelling** (pv) (ook wel genoemd de **vectorvoorstelling**) van de lijn gegeven door   
  
.   
  
Hierbij is de vector met de oorsprong als beginpunt en een variabel punt op de lijn als eindpunt. De pv van is ook componentsgewijs uit te schrijven: .  
  
Een pv van de lijn door de punten en is:  
  
.  
  
Het is direct te zien of twee lijnen waarvoor van beide de pv gegeven is evenwijdig zijn (twee samenvallende lijnen vatten we hier ook als evenwijdig op): de twee lijnen zijn juist dan evenwijdig als de richtingsvector van de ene lijn een veelvoud is van de richtingsvector van de andere lijn.  
Of twee niet-evenwijdige lijnen in de ruimte elkaar snijden of kruisen is minder snel te zien, maar er bestaat wel een eenvoudige methode om dit uit te zoeken.  
  
**Voorbeeld 6**  
Onderzoek of de lijnen en elkaar snijden  
of kruisen.  
  
**Oplossing**  
Componentsgewijs geldt en .  
We gaan na of er waarden van en bestaan waarvoor de -, - en -waarden die de beide stelsels opleveren gelijk zijn. We moeten dus proberen op te lossen het stelsel:  
 , oftewel .  
Uit (3) volgt dat . Dit substitueren in (1) geeft: , ,

en . Als voor de gevonden waarden en aan (2) is voldaan, dan zijn en snijdend. Als niet aan (2) is voldaan, dan zijn en kruisend. Er geldt hier dat  
, dus is aan (2) voldaan. De lijnen en zijn daarom snijdend.  
  
Het **inproduct** van de twee vectoren en wordt gedefinieerd door  
.   
  
Voor de hoek tussen de vectoren en (notatie ) geldt de volgende formule   
  
. **(14)**  
  
We zullen **(14)** bewijzen. Beschouw de onderstaande driehoek (waarin ).  
  
Toepassen van de cosinusregel geeft:  
   
   
   
 , waarmee **(14)** bewezen is.  
 en staan juist dan loodrecht op elkaar als , dus als .  
Gelet op **(14)** hebben we hiermee gevonden dat:  
  
 **(15)**  
  
Voor de hoek tussen twee lijnen en geldt:   
  
**cos** , **(16)  
waarbij een richtingsvector is van en een richtingsvector is van** . **Voorbeeld 7** is de lijn door de punten en ;  
 is de lijn door de punten en.  
Bereken in hele graden nauwkeurig.  
**Oplossing**  
, dus kunnen we als richtingsvector van nemen.  
, dus kunnen we als richtingsvector van nemen.  
Toepassen van **(16)** geeft:  
cos ,  
dus .

De algemene vergelijking van een vlak in de ruimte is , waarbij   
 en constanten zijn. Hierbij kunnen niet alle drie gelijk zijn aan . Een vlak heeft geen richtingsvector, want in een vlak komen oneindig veel verschillende richtingen voor.  
De richting van een vlak wordt bepaald door een vector die loodrecht op dat vlak staat.  
Dit heet een **normaalvector** van dat vlak. Analoog aan de tweedimensionale situatie geldt  
  
 **is een normaalvector van het vlak** . **(17)**Een lijn die loodrecht op een vlak staat heet een **normaal** van dat vlak.

**Voorbeeld 8**Bepaal het snijpunt van de lijn en het vlak .  
**Oplossing**  
We schrijven de pv van uit in zijn componenten: , , .  
Dit substitueren we in de vergelijking van : ,  
, , .  
De coördinaten van het snijpunt van en zijn daarom:  
, en , oftewel .  
  
We leiden nu een formule af voor de afstand van een punt tot het vlak . Daartoe stellen we een pv op van de lijn door die loodrecht staat op.   
Stel dat het snijpunt is van en . Dan is de gezochte afstand tussen en gelijk aan de lengte van het lijnstuk . We werken de details uit. Een pv van is , dus componentsgewijs uitgeschreven: , , . Dit substitueren we in de vergelijking van   
. Hieruit lossen we op .   
Voor deze waarde van vinden voor het snijpunt van en :  
, , . De gezochte afstand is gelijk aan :  
   
 .  
Samengevat:   
  
**de afstand van het punt tot het vlak is gelijk aan   
 (formule van Hesse)**. **(18)  
Of nog bondiger: , waarbij** .

We beschouwen nu de situatie dat in de vergelijking van een vlak een bepaalde variabele ontbreekt. Neem als voorbeeld het vlak . Het punt ligt in .  
Maar dan liggen ook alle punten in , waarbij een willekeurig getal is, omdat in de vergelijking van de variabele ontbreekt, dus wordt aan de variabele geen enkele beperking opgelegd. De punten , met variabel, liggen op een lijn evenwijdig aan de -as.  
Deze lijn ligt geheel in . Hieruit volgt dat evenwijdig is aan de -as of dat de -as geheel in ligt.  
Dit voorbeeld illustreert de volgende eigenschap.  
  
**Gegeven is de vergelijking van het vlak . Dan geldt:  
-as, -as en -as**.  **(19)**

Het is van belang om vaardigheid te hebben in het opstellen van een vergelijking van een vlak door drie gegeven punten.  
Als de snijpunten van het vlak met de coördinaatassen duidelijk zijn, dan is die vergelijking meteen op te stellen. Stel namelijk dat , en de snijpunten met de coördinaatassen zijn, waarbij we aannemen dat alle drie ongelijk aan nul zijn.  
Dan is een vergelijking van : .  
Dit stelt immers een lineaire vergelijking in en voor die gaat door de punten en , zoals door invullen blijkt. De gevonden vergelijking heet de **assenvergelijking** van .  
Van een vlak dat door de oorsprong gaat is geen assenvergelijking op te stellen.  
  
**Voorbeeld 9**  
Stel een vergelijking op van het vlak dat door de punten , ) en ) gaat.  
**Oplossing**  
De assenvergelijking van is: . Vervolgens werken we de breuken weg door beide leden met te vermenigvuldigen. Dit geeft als vergelijking van .  
  
Het kan zijn dat de snijpunten van met twee coördinaatassen duidelijk zijn, maar het snijpunt met de derde coördinaatas niet. Als er dan nog een ander gegeven punt is waar doorheen gaat, dan is snel een vergelijking van te bepalen.  
  
**Voorbeeld 10**  
Stel een vergelijking op van het vlak dat door de punten , ) en gaat.  
**Oplossing**  
Waar de -as snijdt is niet direct duidelijk. Noem dit punt .  
De assenvergelijking van is . Omdat door gaat, geldt er:  
 , , . Dit leidt tot , oftewel .  
  
**Voorbeeld 11**  
Stel een vergelijking op van het vlak dat door de punten en ) gaat en evenwijdig is aan de -as.

**Oplossing**  
Omdat evenwijdig is aan de -as, ontbreekt, vanwege **(18)**, de term met in de vergelijking.  
Dit geeft de (incomplete) assenvergelijking , oftewel   
  
Het kan voorkomen dat je een vergelijking van een vlak door drie punten en wilt opstellen waarbij het niet duidelijk is waar de coördinaatassen snijdt. Je kunt in dit geval niet de assenvergelijking van gebruiken. Daarom is een andere methode nodig. Om dit te kunnen beschrijven bespreken we eerst een nieuw soort product van twee vectoren. Met behulp hiervan kan een normaalvector van bepaald worden, waarna een vergelijking van het vlak snel is op te stellen.  
Het **uitproduct** van de twee vectoren en wordt gedefinieerd door  
.  
  
Het uitproduct van twee vectoren is dus een **vector**, maar het inproduct van twee vectoren een is **getal**.  
De formule van het uitproduct is eenvoudig te reproduceren als je onthoudt dat het bovenste kental begint met . Hiervan trek je af het product . Dit is dus met de twee indices verwisseld.  
Het tweede kental krijg je door in het eerste kental alle indices één plaats cyclisch door te schuiven: 2 wordt 3 en 3 wordt 1. Het derde kental krijg je door in het tweede kental weer alle indices één plaats cyclisch door te schuiven: 3 wordt 1 en 1 wordt 2.  
Er is nog een andere visuele manier om het uitwendig product weer te geven.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Het eerste kental van is (zie de linker tabel) ;  
Het tweede kental van is (zie de middelste tabel) ;  
Het derde kental van is (zie de rechter tabel) .  
De belangrijkste toepassing van het uitproduct is dat je nu een manier hebt om een vector te maken die loodrecht staat op twee gegeven vectoren. Er geldt namelijk dat  
  
 **en (20)**  
  
We zullen de eerste betrekking in **(20)** bewijzen; het bewijs van de tweede betrekking gaat analoog.  
Stel dat en . Dan .  
Om aan te tonen dat , moeten we volgens **(15)** nagaan dat .  
Hieraan is inderdaad voldaan, zoals door uitschrijven blijkt:  
   
.   
  
**Voorbeeld 11**  
Bepaal het uitproduct van de vectoren en .  
**Oplossing**  
 .  
Omdat men gemakkelijk een rekenfoutje maakt bij dit type berekeningen, is het een goede gewoonte om te controleren of de gevonden vector loodrecht staat op en .  
, dus .  
, dus .  
  
Met het gereedschap van het uitwendig product kunnen we op een universele manier een vergelijking van een vlak door drie gegeven punten opstellen.

|  |  |
| --- | --- |
| We willen een vergelijking van het vlak door de punten , , ), en bepalen. De twee vectoren  en  liggen in . Als we , die we zullen noemen, uitrekenen, dan is een vector die loodrecht staat op en (volgens **(20)**), dus staat loodrecht op |  |

de snijdende lijnen en . Nu zegt een algemene stelling uit de meetkunde dat een lijn die loodrecht staat op twee snijdende lijnen in een vlak loodrecht staat op dat vlak. Dit impliceert dat loodrecht staat op , dus is een normaalvector van . heeft daarom een vergelijking van de vorm   
, waarin , nu bekende getallen zijn en een nader te bepalen constante is. De waarde van kan uitgerekend worden door in deze vergelijking bijvoorbeeld het punt in te vullen, waarmee een vergelijking van gevonden is. Het is aan te raden om ter controle na te gaan dat ook en voldoen aan die vergelijking. We zullen de methode van het uitproduct gebruiken als andere, meer eenvoudige, methodes niet lukken.   
**Voorbeeld 12**Bepaal een vergelijking van het vlak door de punten , , ), en .  
**Oplossing**Beschouw de volgende twee vectoren en die evenwijdig zijn in :  
 en .  
, dus we kunnen als normaalvector van nemen. Dit geeft als mogelijke vergelijking van .  
Invullen van leidt tot: , dus   
We hebben dus gevonden de vergelijking (\*).  
Ter controle gaan we na of ook en aan deze vergelijking voldoen.  
, dus voldoet aan (\*).  
, dus voldoet aan (\*).  
  
**Bepalen van de afstand van het punt tot de lijn** . **(21)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Breng een vlak door aan loodrecht op** . **De richtingsvector van tevens een normaalvector van** . **Een vergelijking van is:** . **Bepaal het snijpunt van en . Dan geldt lengte van het lijnstuk** . |  |

**Voorbeeld 13**Gegeven zijn het punt en de lijn .   
Bereken de afstand van tot .  
  
**Oplossing**Het vlak door dat loodrecht staat op heeft als vergelijking .  
Het snijpunt van en wordt gevonden door op te lossen uit  
, . Dit geeft het punt   
We vindenhieruit dat   
.  
Er bestaat overigens een mooie formule om rechtstreeks de afstand van een punt tot een lijn uit te rekenen. Daartoe moeten we eerst een eigenschap van het uitproduct bespreken.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Laat en twee vectoren zijn. Deze vectoren spannen een parallellogram op.  Dan geldt dat . |  | | **(22)** |
| Bewijs van **(22)**  Laat .  Uit volgt dat | |  | | |

, dus   
  
We weten nu dus dat niet alleen loodrecht op en staat, waarmee de richting van de drager van vastligt, maar ook dat een welbepaalde lengte heeft. De richting van volgt de **kurkentrekkerregel**: draai een kurkentrekker over kortste hoek van naar .  
De richting waarin de kurkentrekker beweegt geeft de richting van aan.

Nu kunnen we een formule afleiden voor de afstand van een punt tot een lijn.  
  
**De afstand van het punt tot de lijn is gelijk aan**  
 . **(23)**  
  
We zullen deze formule bewijzen.

|  |  |
| --- | --- |
| Het punt is de loodrechte projectie  van op . is een parallellogram. De gezochte afstand is de lengte van .  Er geldt (vanwege **(22)** ) , dus . |  |

**Voorbeeld 13 (nogmaals)**Gegeven zijn het punt en de lijn . Bereken de afstand van tot .  
**Oplossing (nieuwe manier)**  
We passen **(23)** toe met , en .  
.  
 en

.  
M.b.v. **(23)** vinden we dat .

|  |  |
| --- | --- |
| Stel dat in de ruimte twee kruisende lijnen en gegeven zijn.  We willen de afstand tussen die lijnen uitrekenen.  Hiermee wordt bedoeld de kortst mogelijke afstand tussen een punt op en een punt op . Als deze afstand bereikt wordt voor het punt op en het punt op , dan geldt dat de lijn loodrecht staan op de beide lijnen.  De afstand tussen en is de lengte van het lijnstuk . |  |
| Er zijn zeker **drie methodes** om de afstand tussen twee kruisende lijnen en uit te rekenen. De eerste methode is wellicht de eenvoudigste. We stellen een vergelijking op van het vlak dat door gaat en evenwijdig is aan het vlak . Kies daartoe een punt op . In de figuur hiernaast is . Bereken het uitwendig product van een richtingsvector van en van . Dan is een normaalvector van . Omdat door gaat, is direct een vergelijking van te bepalen. |  |

Kies een punt op . De afstand van tot is dan gelijk aan de afstand van tot .  
Deze laatste afstand is m.b.v. de formule van Hesse te berekenen. We vatten dit samen.  
  
 **(24)**   
**Voorbeeld 13**  
Gegeven zijn de lijnen en .  
**Oplossing (met behulp van methode 1)** is vlak door dat evenwijdig is aan . Het punt ligt op , dus ook in . is een normaalvector van en gaat door   
, dus een vergelijking van is: .  
 is een punt op .  
 .

|  |  |
| --- | --- |
| We bespreken nu een tweede methode om de afstand van twee kruisende lijnen en te bepalen.  Stel dat van en de parametervoorstellingen zijn:  en . Dit is ook componentsgewijs uit te schrijven:   en |  |

Een willekeurig punt van is daarom ) en een willekeurig punt van is  
). Dit geeft dat .  
De afstand tussen en is gelijk aan de lengte van het lijnstuk als loodrecht staat op en .  
Er moet daarom gelden dat en . Dit leidt tot een stelsel van twee vergelijkingen in de twee onbekenden en dat vervolgens opgelost wordt. Daarna zijn de bijbehorende punten en bekend. M.b.v. van de formule voor de afstand tussen twee punten is tenslotte de lengte van , dus ook de afstand tussen en te berekenen. We vatten dit samen.

**(25)**  
  
**Voorbeeld 13 (nogmaals)**  
Gegeven zijn de lijnen en .  
**Oplossing (met behulp van methode 2)**Een willekeurig punt van is ) en een willekeurig punt van is  
). Hieruit volgt dat . Er geldt dat  
 en . Uitwerken geeft:  
  
 en  
, oftewel   
  
 , , .  
  
Optellen van deze vergelijkingen geeft , dus en vervolgens .  
Dit geeft de punten en   
We vinden daarom dat   
  
Ter voorbereiding voor de derde methode om de afstand tussen twee kruisende lijnen te bepalen, leiden we eerst een interessant hulpresultaat af.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **De lengte van de projectie van de vector op de drager van de vector is gelijk aan** . |  | **(26)** |

|  |  |
| --- | --- |
| We zullen **(26)** bewijzen.  Stel dat de hoek is tussen en de drager van . Dan geldt dat:  , waarmee **(26)** aangetoond is. |  |

**(27)**

|  |  |
| --- | --- |
| We zullen **(27)** bewijzen.  Stel dat de lengte van de (minimale) afstand tussen en is,   waarbij op en op ligt. De lijn staat loodrecht op en ,   dus is evenwijdig aan de drager van .  ligt op en ligt op .  is de loodrechte projectie van op de lijn en dit is  ook gelijk aan de loodrechte projectie van op de drager |  |

van . Toepassen van **(26)** geeft direct dat  
 , waarmee **(27)** bewezen is.  
  
**Voorbeeld 13 (nogmaals)**  
Gegeven zijn de lijnen en .  
**Oplossing (met behulp van methode 3)**Er geldt (met de notatie van **(27)**) dat  
 en .  
Hieruit volgt dat en   
. Dit leidt m.b.v. **(27)** tot:  
 7.

Van de drie methodes om de afstand tussen twee kruisende lijnen te berekenen is methode 1 de eenvoudigste. Methode 3 geeft meteen het antwoord in een formule, dus kan geprogrammeerd worden.   
We behandelen nu de hoek tussen een lijn en een vlak. Voordat we deze gaan uitrekenen moet eerst weten hoe deze hoek gedefinieerd wordt. Als een lijn evenwijdig is aan het vlak , dan spreken we af dat .

|  |  |
| --- | --- |
| Neem nu aan dat de lijn het vlak snijdt. Laat de loodrechte projectie zijn van op . Dan spreken we af dat . In woorden uitgedrukt: de hoek tussen een lijn en een vlak is de hoek tussen die lijn en zijn loodrechte projectie op dat vlak. In de figuur hiernaast geldt dat . |  |
| Als we in een bepaalde situatie m.b.v. vectoren de hoek tussen een lijn en een vlak willen uitrekenen, dan gebruiken we echter niet de loodrechte projectie van op . Wat we wel gebruiken is een normaal van die gaat door het snijpunt van en . De hoek tussen en is dan gelijk aan . We kiezen een richtingsvector van en een normaalvector van (dit is een richtingsvector van ). Dan geldt volgens **(16)** dat |  |

cos , dus . We vatten dit samen.  
  
**Voor de lijn en het vlak geldt dat** , **(28)**  
**waarbij**  **een richtingsvector is van en een normaalvector van** .  
  
**Voorbeeld 14**  
Bereken in hele graden nauwkeurig de hoek tussen de lijn   
en het vlak .  
**Oplossing** is een richtingsvector van en is een normaalvector van .  
, en .  
Toepassen van **(28)** geeft dat   
  , dus .

Als laatste behandelen we de hoek tussen twee vlakken.   
Eerst moet gedefinieerd worden wat er met de hoek tussen twee vlakken bedoeld wordt.

|  |  |
| --- | --- |
| Stel dat en twee vlakken zijn. Als ze evenwijdig zijn of samenvallen, dan zeggen we dat de hoek tussen deze vlakken gelijk is aan nul graden. Neem nu aan dat en niet evenwijdig of samenvallend zijn. Dan hebben ze een snijlijn gemeen, die we noemen. Met de hoek tussen   en bedoelen de kleinste (niet-stompe) hoek waarover rondom gedraaid moet worden om samen te vallen met . Als een normaal is van en is normaal is van , dan is het evident |  |

dat . Deze laatste hoek berekenen we als volgt. Neem een normaalvector van (dit is een richtingsvector van ) en een normaalvector van (dit is een richtingsvector van ).  
Dan geldt volgens **(16)** dat cos .  
  
We hebben daarom het volgende gevonden.  
  
**Voor twee vlakken en geldt dat  
cos** , **(29)  
waarbij een normaalvector is van en een normaalvector is van** .  
  
**Voorbeeld 15**  
Bepaal in graden nauwkeurig de hoek tussen de vlakken  
 en .  
**Oplossing**  
 is een normaalvector van en is een normaalvector van .  
.  
 en   
Toepassen van **(29)** geeft dat   
cos , dus .

**Inhoudsopgave**

|  |  |
| --- | --- |
| Introductie vectoren in het platte vlakke vlak | 1 |
| Optellen en aftrekken van vectoren (in het platte vlak) | 2 |
| Parametervoorstelling van een lijn (in het platte vlak) | 2 - 3 |
| Hoek tussen twee vectoren (in het platte vlak) | 4 |
| Het inproduct van twee vectoren (in het platte vlak) | 5 |
| Voorwaarde loodrechte vectoren; normaalvector van een lijn (in het platte vlak) | 5 - 6 |
| Omzetten pv lijn in een vergelijking en omgekeerd (in het platte vlak) | 7 |
| Formule (van Hesse) voor de afstand van een punt tot een lijn (in het platte vlak) | 8 |
| Hoek tussen twee lijnen (in het platte vlak) | 8 |
| Introductie vectoren in de ruimte | 9 |
| Parametervoorstelling van een lijn (in de ruimte) | 10 |
| Hoek tussen twee vectoren; het inproduct van twee vectoren (in de ruimte) | 11 |
| Hoek tussen twee lijnen; normaalvector van een vlak (in de ruimte) | 12 |
| Formule (van Hesse) voor de afstand van een punt tot een vlak | 13 |
| De assenvergelijking van een vlak | 14 |
| Het uitproduct van twee vectoren | 15 - 16 |
| Opstellen vergelijking vlak door drie gegeven punten | 17 |
| Bepalen van de afstand van een punt tot een lijn (in de ruimte) | 17 - 19 |
| Bepalen van de afstand tussen twee kruisende lijnen | 20 - 22 |
| Bepalen van de hoek tussen een lijn en een vlak | 23 |
| Bepalen van de hoek tussen twee vlakken | 24 |