**Getallenrijen**Een **getallenrij,** of kortweg **rij,** is een oneindige rij getallen .
Hierbij doorlooptde subscript, ook **index** genoemd, de positieve gehele getallen .
De afzonderlijke getallen heten de **termen** van de rij.
De rij wordt ook wel korter genoteerd als . Voor de wiskunde zijn slechts die rijen interessant waarbij de termen volgens een eenduidig bepaald recept uit te rekenen zijn.
We onderscheiden hierbij twee manieren om rijen te beschrijven.

Een **directe** **formule** van een rij is een voorschrift waarmee elke term rechtstreeks uit de index berekend kan worden. Enkele voorbeelden zijn , en .
Elke term kan direct uitgerekend worden zonder de voorgaande termen te kennen.

Een **recursieve formule** van een rij is een voorschrift waarmee elke term vanaf een bepaalde index uit een of meer voorgaande termen te berekenen is.
In plaats van recursieve formule spreekt men ook wel van een **recurrente betrekking**.
We geven enkele voorbeelden van recursieve formules..

**1)** . Dit heet een recursieve formule van **orde 1** omdat uitgedrukt wordt in een term met index 1 lager. Hierbij moet apart de waarde van gegeven zijn; dit wordt de **beginwaarde** van de rij genoemd. Stel dat bijvoorbeeld , dan volgt dat
, ,
, , enzovoorts.

**2)** . Dit is een recursieve formule van **orde 2** omdat in het voorschrift van een term voorkomt waarvan de index 2 lager is dan van (en geen termen met een nog lagere index). Hierbij moeten de waarden van en apart gegeven zijn (dit zijn de **beginwaarden** van de rij). Als bijvoorbeeld en , dan volgt er dat
, , enzovoort.

**3)** . Dit is een recursieve formule van **orde 3**.
De waarden van moeten hierbij bekend zijn.

Als men een recursieve formule van een rij heeft, dan probeert men deze om te zetten in een directe formule, omdat dan afzonderlijke de termen dan sneller kan uitrekenen. Voor recursieve rijen van hogere orde is dit echter vaak niet mogelijk.
Er zijn twee eenvoudige typen van rijen die vaak voorkomen.

**A)** Een **rekenkundige rij** (rr) is een rij waarbij elk tweetal opeenvolgende termen hetzelfde verschil heeft, dus is een rr als er een getal bestaat zodanig dat
 voor alle . Het getal heet het **constante verschil** van de rij.
Deze rij is ook te schrijven in de recursieve vorm .
De directe formule voor zo’n rij is: , waarbij de beginterm is.

**B)** Een **meetkundige rij** (mr) is een rij waarbij elk tweetal opeenvolgende termen dezelfde verhouding heeft, dus is een mr als er een getal bestaat zodanig dat voor alle . Het getal heet de **reden** van de rij (reden verhouding).
De directe formule voor zo’n rij is: , waarbij de beginterm is.

Een rr en ook een mr ligt geheel vast wanneer twee van de termen bekend zijn.

Het kan soms handig zijn om voor de rij als beginindex 0 nemen.
De rij is dan .
De bovenstaande formules en betrekkingen worden dan op voor de hand liggende wijze aangepast.
De directe formule voor een rr is dan , waarbij de beginterm is en het constante verschil en de directe formule voor een mr is dan , waarbij de beginterm is en de reden. Hierbij geldt in beide gevallen dat .

We geven nu een aantal voorbeelden van situaties waarbij rijen optreden.

**Voorbeeld 1**
Jan zet een bepaald bedrag van euro op de bank. De bank geeft rente per jaar.
Noem het bedrag dat Jan na jaar op de bank heeft. Geef een formule voor .
**Oplossing**
Het bedrag groeit elk jaar met de factor ten opzichte van het bedrag in het vorige jaar. Dit geeft de recursieve formule: met .
De rij is daarom een meetkundige rij met als directe formule: ∙.

**Voorbeeld 2**
Stel dat je lijnen trekt in een plat vlak. Noem het aantal gebieden dat je dan maximaal kunt krijgen (de gebieden mogen ook onbegrensd zijn). Geef een formule voor .
**Oplossing**Om een maximaal aantal gebieden te krijgen moet je geen evenwijdige lijnen trekken en nooit drie of meer lijnen door één punt laten gaan. Elke nieuwe lijn die je trekt zal dus alle eerder getrokken lijnen snijden en niet gaan door een snijpunt van twee van die lijnen.
We zullen een recursieve formule voor afleiden. Om dit uit te leggen zullen we eerst als voorbeeld uitdrukken in . Stel dat er vier lijnen getrokken zijn die het vlak verdelen in het maximale aantal gebieden . Zie de onderstaande linkerfiguur.

|  |  |
| --- | --- |
| Getallenrijen (1).png | Getallenrijen (2).png |

We trekken nu een vijfde lijn die een maximaal aantal nieuwe gebieden oplevert.
Zie de bovenstaande rechterfiguur. Lijn snijdt de eerdere vier lijnen in vier punten en wordt daardoor in vijf stukken verdeeld. Elk van deze vijf stukken verdeelt het gebied waar het doorheen loopt in twee delen. Er komen daarom vijf nieuwe gebieden bij.
Hieruit blijkt dan .
Nu de algemene situatie. Stel dat er lijnen getrokken zijn die het vlak verdelen in het maximale aantal gebieden . Trek vervolgens een nieuwe lijn die een maximaal aantal nieuwe gebieden oplevert. Lijn snijdt de eerdere lijnen in punten en wordt daardoor in stukken verdeeld. Elk van deze stukken verdeelt het gebied waar het doorheen loopt in twee delen. Er komen daarom nieuwe gebieden bij.
Hieruit blijkt dan . Verder geldt dat .
We vinden hiermee: , ,
 en zo doorgaande algemeen dat
. Eenvoudig blijkt (m.b.v. theorie die later aan de orde komt) dat dit korter te schrijven is als: .

**Voorbeeld 3**
We maken codes bestaande uit nullen en enen op een rij waarbij er nooit twee enen naast elkaar staan. Een voorbeeld van zo’n code is . Deze code heeft lengte 12. Het aantal codes ter lengte dat je kunt maken noemen we . Geef een recursieve formule voor .
**Oplossing**
We bekijken alle codes met lengte . Deze codes zijn in te delen in twee groepen:
A: de codes die eindigen op een 0 ; B: de codes die eindigen op een 1.
De codes in groep A zijn alle codes ter lengte aangevuld met een 0 op het eind.
De groep A bevat daarom codes.
Voor een codes van groep B moet het voorlaatste teken een 0 zijn en het stuk van tekens dat hieraan voorafgaat is een wwillekeurige code van lengte .
De groep B bevat daarom codes.
Hieruit blijkt dat , voor alle .
Verder is het evident dat en . De rij begin daarom aldus
 .
De getallen die hierin voorkomen zijn de **Fibonacci-getallen**.

Bij veel problemen moet een aantal termen van een rij bij elkaar worden opgeteld.
Daartoe voeren we eerst een handige notatie in.
Als een rij getallen is, dan geven we de som van de eerste termen van deze rij aan met , dus . M.b.v. het symbool is dit te schrijven als:
De rij heet de **somrij** van de rij .
Als een rekenkundige of meetkundige rij, dan is er een korte formule voor .

**Stelling 1**
a) Als (rr), dan geldt dat .
b) Als (mr), dan geldt dat .
**Bewijs**a): We illustreren het bewijs eerst voor . Daartoe schrijven we onder elkaar

Optellen van beide betrekkingen geeft:

 , dus .
Nu de algemene situatie. We schrijven onder elkaar de betrekkingen:

 .
Tellen we beide betrekkingen bij elkaar op dan vinden we:
 . **(1)**
Elke uitdrukking tussen haakjes is van de vorm ; hierbij doorloopt de waarden
1 t/m . Er geldt voor elke waarde van :
 .
Voor elke waarde van komt er dus dezelfde som uit. Uit **(1)** volgt daarom dat
 en dit geeft dat .

b): Eerst weer een illustratie voor . Er geldt
 en
.
Trekken we de onderste vergelijking van de bovenste af, dan vinden we:
 , dus , zodat .
Nu de algemene situatie. Er geldt:
 en
.
Trekken we de onderste vergelijking van de bovenste af, dan vinden we:
 , dus .

De formules van stelling 1 zijn in woorden ook aldus te formuleren:
\* de som van een aantal opeenvolgende termen van een rekenkundige rij is gelijk aan
 (het aantal termen) × (het gemiddelde van de eerste en de laatste term) ;
\* de som van een aantal opeenvolgende termen van een meetkundige rij is gelijk aan
 (eerste term) × , waarbij de reden van de rij is.

Deze formules gelden natuurlijk niet alleen wanneer de som bij begint. De eerste term van de som kan een willekeurige index hebben. We geven twee voorbeelden.
Als de rij een rekenkundige rij is, dan geldt:
 .
Als de rij een meetkundige rij is, dan geldt:
 , waarbij de reden van de rij is.

Lineaire recursieve formules van orde 1 met constante coëfficiënten komen vrij regelmatig voor. Hierbij geldt dat , waarbij en constanten zijn. Voor krijgen we een rekenkundige rij met constant verschil en voor een meetkundige rij met reden .
We zullen nu aannemen dat . Soms is een dergelijke rij constant. Dit is het geval als geldt dat , dus als , oftewel . Merk op dat uit volgt dat alle termen van de rij gelijk zijn. Het getal heet het **dekpunt** van de rij.
We zullen voor de termen een directe formule bepalen. Noem . Er geldt:
 ;
 ;
 ;
 .
Zo doorgaande vinden we dat (dit kan formeel bewezen worden m.b.v. volledige inductie):

 .
 Dit is te herschrijven als
, dus , waarbij
 het dekpunt is van de rij. We vatten samen wat we gevonden hebben.

**Stelling 2**
Als voor de rij de recursieve formule geldt met ,
dan volgt dat , waarbij het dekpunt is van de rij.

Indien de rij met index begint, dan luidt de regel: , waarbij .
In woorden uitgedrukt:

Uit deze stelling volgt meteen een formule voor de somrij van een rij die door een lineaire recursieve formule van orde 1 met constante coëfficiënten beschreven wordt.

**Stelling 3**
Als voor de rij de recursieve formule geldt met ,
en , dan volgt dat , waarbij het dekpunt is van de rij.
 **Bewijs**

.

We zullen vervolgens rijen bekijken die door een lineaire recursieve formule van orde 2 met constante coëfficiënten beschreven wordt. Een dergelijke rij heeft een recursieve formule van de vorm: , waarbij en reële constanten zijn. Omdat de recursieve formule van orde 2 is, geldt er dat Ons doel is om voor een directe formule te vinden. We maken daarbij gebruik van de eigenschappen die door de volgende twee stellingen worden uitgedrukt.

**Stelling 4**Stel dat voor de twee rijen en geldt dat
 , .
Vorm een nieuwe rij die gegeven wordt door (, waarbij en willekeurig constanten zijn. Dan geldt dat .

**Bewijs**

 .

De bovenstaande stelling zegt: indien twee rijen voldoen aan een identieke recursieve formule van orde 2 met constante coëfficiënten, dan voldoet een willekeurige **lineaire combinatie**
 van die twee rijen ook aan deze recursieve formule.
 **Stelling 5**
Als voor de twee rijen en geldt dat
 , ,
 en dan volgt dat , voor alle .
**Bewijs**
We weten reeds dat en . Hieruit volgt successievelijk dat:
 ,
 ,
 , enzovoorts.

We proberen voor de rij met de recursieve formule , waarbij en gegeven reële waarden hebben, een oplossing te vinden van de vorm , voor geschikte, nader te bepalen, waarden van de constante . Er moet dan gelden dat
 , dus (na deling door ):
 . **(2)**Deze kwadratische vergelijking in heet de **karakteristieke vergelijking** die hoort bij de recursieve formule .
Stel dat en de wortels van deze vergelijking zijn (die ook complex kunnen zijn).
Merk op dat en omdat
Er geldt natuurlijk dat en .
Vorm de rij die gegeven wordt door (, waarbij en willekeurig constanten zijn (die ook complex kunnen zijn). Volgens stelling 4 geldt er dat
 . **(3)**
Noem de discriminant van de karakteristieke vergelijking.
We onderscheiden drie gevallen.

**A)** . Dan zijn en twee verschillende reële getallen.
We proberen en zodanig te kiezen dat
 en .
Dit geeft een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden:
 .
Vermenigvuldig de bovenste vergelijking met en trek hiervan de onderste vergelijking af.
We vinden dan dat , dus
Deze waarde substitueren we in de vergelijking en krijgen daarmee
 , dus .
Voor de gevonden waarden van en geldt dus inderdaad dat en .
Vanwege **(3)** en stelling 5 kunnen we concluderen dat
 , waarbij en .
Merk op dat en ; anders zou namelijk de gegeven recursieve formule niet van orde 2 zijn.

**B)** . Dan zijn en twee verschillende complexe getallen die elkaars geconjugeerde zijn, dus en , voor zekere reële getallen en ,
waarbij Schrijf deze twee complexe getallen in polaire vorm:
 en , waarbij
 en .
Merk op dat omdat .
Voor geldt dat (waarbij we de regel van De Moivre toepassen)

 .
Noemen we en , dan hebben we dus gevonden dat
.
We proberen nu en zodanig te kiezen dat
 en .
Dit geeft een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden
 .
Oplossen van en hieruit geeft (de details van de berekening zullen we niet opschrijven).
 en . **(4)**
Voor de gevonden waarden van en geldt dus inderdaad dat en .
Vanwege **(3)** en stelling 5 kunnen we concluderen dat
, waarbij en gegeven worden door **(4)**.

**C)** . De karakteristieke vergelijking **(2)** heeft dan twee gelijke reële wortels.
Deze gemeenschappelijke waarde noemen we .
De karakteristieke vergelijking **(2)** is te herschrijven als
 , dus , zodat en .
Duidelijk is dat ; anders zou er gelden dat , maar we hebben al gezien dat .
We voeren een nieuwe rij in gedefinieerd door , dus .
Door te substitueren in de recursieve formule
krijgen we: , dus (na deling door )
 . Dit is te schrijven in de vorm .
Als we dit laatste herhaaldelijk toepassen, dan krijgen we
 .
Hieruit blijkt dat de rij een rekenkundige rij is, dus bestaan er reële getallen en zodanig dat . Er volgt dat .
We moeten nog laten zien dat we en zodanig kunnen bepalen dat voor gelijk is aan en voor gelijk is aan . We moeten dus oplossen
 en . Men vindt eenvoudig:
 en .
Merk op dat ; anders zou namelijk de gegeven recursieve formule niet van orde 2 zijn.
We vatten samen wat we gevonden hebben.

**Stelling 6**
Gegeven is de recursieve formule van orde 2 (dus ) Verder is
de discriminant van de karakteristieke vergelijking **(2)**: .
Dan geldt:
 , waarbij en ;
 hierbij zijn en de (reële) wortels van **(2)** ; er geldt dat en .

 , waarbij
 en ;
 hierbij zijn en
 de complexe wortels van **(2)**.

, waarbij en ;
 hierbij is de dubbele wortel van **(2)**. Er geldt dat .

De formules in stelling 6 waarmee men en of en uitrekent kan men beter niet vanbuiten leren. Bij een gegeven recursieve formule met beginwaarden en berekent men en of en door twee vergelijkingen met twee onbekenden op te lossen.
We geven van elk van de mogelijke drie situaties in stelling 6 een voorbeeld.

**Voorbeeld 1**Gegeven is de recursieve formule , met en .
Geef een directe formule voor .
**Oplossing**
De karakteristieke vergelijking is: met als discriminant .
De wortels zijn en We weten derhalve dat .
De beginwaarden leiden tot en . Er volgt dat
 , , . Dit ingevuld in geeft . Hiermee is gevonden dat .

**Voorbeeld 2**
Gegeven is de recursieve formule , met en .
Geef een directe formule voor .
**Oplossing**
De karakteristieke vergelijking is: met als discriminant .
De wortels zijn
 en
 . Dit geeft
 . Invullen van de beginwaarden leidt tot:
 , dus en
 , dus .
Hieruit lost men eenvoudig op dat en en we komen daarmee tot
.

**Voorbeeld 3**
Gegeven is de recursieve formule , met en .
Geef een directe formule voor .
**Oplossing**
De karakteristieke vergelijking is: met als discriminant .
De oplossing is . Dit geeft: .
Invullen van de beginwaarden leidt tot:
 en , waaruit we eenvoudig oplossen en .
De directe formule is daarom .
Zeer bekend is de rij van de **Fibonacci-getallen**. Voor deze rij geldt de recursieve formule
 en . De rij begint aldus
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 … . Deze getallen komen in tal van wiskundige contexten voor. We zullen een directe formule voor de Fibonacci-getallen afleiden.
De karakteristieke vergelijking is met discriminant .
De oplossingen hiervan zijn en . Dit geeft:
 , voor zekere constanten en .
We moeten hierbij en oplossen uit
 en , oftewel
 en .
Eenvoudig lost men hieruit op: en . Dit leidt tot de directe formule:
 .

We zeggen dat een rij **convergeert** of **convergent** is indien de termen van die rij tot een vast getal naderen als de index onbeperkt toeneemt. Dit vaste getal heet dan de **limiet** van de rij. Als bijvoorbeeld , dan convergeert de rij naar 5, omdat tot nul nadert als steeds groter wordt. Als een rij niet convergeert, dan heet hij **divergent** of we zeggen dat de rij **divergeert**.
Het vinden van een directe formule van de termen een rij die door een recursieve formule gegeven wordt is niet alleen handig om snel termen te kunnen uitrekenen, maar het geeft ook informatie over het gedrag van de termen bij toenemende index.

**Stelling 7**
De rij wordt gegeven door de recursieve formule . Dan geldt:
a) als , dan convergeert de rij naar het dekpunt
b) als of , dan divergeert de rij , aangenomen dat ;
c) als en , dan is de rij constant ;
d) als en , dan is de rij divergent;
e) als en , dan is de rij constant ;
f) als en , dan zijn de termen van de rij afwisselend gelijk aan en ,
 met ; de rij is dan divergent.

**Bewijs**
Volgens stelling 2 geldt dat , waarbij het dekpunt is van de rij. Hieruit volgt dat ∙ (\*)
a): Stel dat ; dan nadert tot nul als onbeperkt toeneemt, dus volgt
 m.b.v. (\*) dat de rij convergeert naar .
b): Stel dat of ; dan nadert en dus volgens (\*) ook naar
 oneindig als onbeperkt toeneemt (aangenomen dat ) ; de rij is derhalve in dit
 geval divergent.
c) en d) volgen direct uit de recursieve formule.
e) en f): Stel dat . Er volgt dat
 , , .
 Aldus doorgaande vinden we:
 en .
 Merk op dat .
 Hieruit volgt direct de juistheid van de beweringen in e) en f).

Vervolgens onderzoeken we het gedrag van de termen van een rij die voldoet aan een de lineaire recursieve formule van orde 2, waarbij en constanten zijn.
Van belang is de waarde van de discriminant van de karakteristieke vergelijking
 . We onderscheiden drie gevallen.

**A)** . Er geldt dat voor zekere constanten ,
waarbij en de (reële) wortels van de karakteristieke vergelijking zijn.
We mogen en zullen aannemen dat (verwissel zo nodig en ).
Beschouw eerst het speciale geval dat . Omdat betekent dit dat
 , dus . De recursieve formule is in dit geval: . Er volgt dat
 en voor alle . We nemen aan dat en niet beide gelijk aan nul zijn (anders is elke term van de rij gelijk aan nul). Indien precies één van de getallen en gelijk is aan nul, dan is de rij slechts convergent als tot nul nadert als onbeperkt toeneemt en dit is juist dan het geval als .
Neem nu aan dat en beide ongelijk aan nul zijn. Als , dan is de rij convergent. Voor of is de rij divergent. Voor is de rij slechts dan convergent als .
We nemen nu aan dat . De directe formule
 is te herschrijven als , waarbij .
Merk op dat (en , dus nadert tot nul als .
De factor nadert daarom tot als . De rij zal derhalve juist dan convergeren als de rij convergent is en dit is precies dan het geval als .

**B)** . Dan geldt dat , voor zekere constanten
 en , waarbij en de complexe wortels van de karakteristieke vergelijking zijn. We mogen aannemen dat en niet beide gelijk aan nul zijn (anders voor alle ). Ook kunnen we aannemen dat met (want en zijn niet reëel) . Voor het convergentieonderzoek is het handig om de formule in een andere vorm te gieten. Er geldt dat
 , waarbij , en .
Merk op dat , dus bestaat er een reëel getal zodanig dat en
. Dit geeft:
. Hierbij is .
We bekijken de volgende gevallen.
**1)** . Er geldt dat voor alle en nadert tot 0 als . Hieruit volgt dat tot 0 nadert als .
**2)** . Er geldt dat tot ∞ nadert als . Verder bestaat er volgens stelling B in de appendix een getal zodanig dat voor oneindig veel waarden . Voor deze waarden van geldt dat en kan onbeperkt groot worden als steeds groter gekozen wordt. Hieruit volgt dat de rij divergeert.
**3) .** Er geldt voor deze situatie dat , waarbij .
Volgens stelling A in de appendix is de rij divergent, dus is ook de rij divergent.
**4)** . Er geldt dat , waarbij . Merk op dat
, waarbij . Omdat geen geheel veelvoud van is, geldt hetzelfde voor . Volgens stelling A in de appendix is de rij divergent, dus is ook de rij divergent.

**Appendix

Stelling A**Stel dat , waarbij en reële getallen zijn en met .
Dan is de rij divergent.
**Bewijs**We geven een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat de rij convergent is, dus dat nadert tot een zekere limiet als . In dit geval nadert tot 0 als .
We gebruiken de formule . Dit geeft:
 .
Deze uitdrukking kan slechts tot 0 naderen voor als
voor . Voor moet dan gelden dat voor een zeker geheel getal waarbij voor . Er volgt dat
 , dus
 . Vanwege voor zou dit betekenen dat een geheel veelvoud van is, wat in strijd is met de aanname dat en .
Uit de hiermee bereikte tegenspraak volgt dat de rij divergent is
 **Stelling B**
Stel dat , waarbij en reële getallen zijn en θ geen geheel veelvoud van
 is. Dan bestaat er een getal zodanig dat , voor oneindig veel waarden van .
**Bewijs**De redenering verloopt indirect (bewijs uit het ongerijmde). Stel dat de bewering niet klopt.
Dan zijn er voor elk getal , hoe klein we dit ook kiezen, slechts eindig veel waarden van waarvoor , dus bestaat er een positief geheel getal zodanig dat , voor alle
. Dit impliceert dat de rij naar 0 nadert voor , hetgeen echter in tegenspraak is met stelling A. Hiermee is stelling B bewezen.