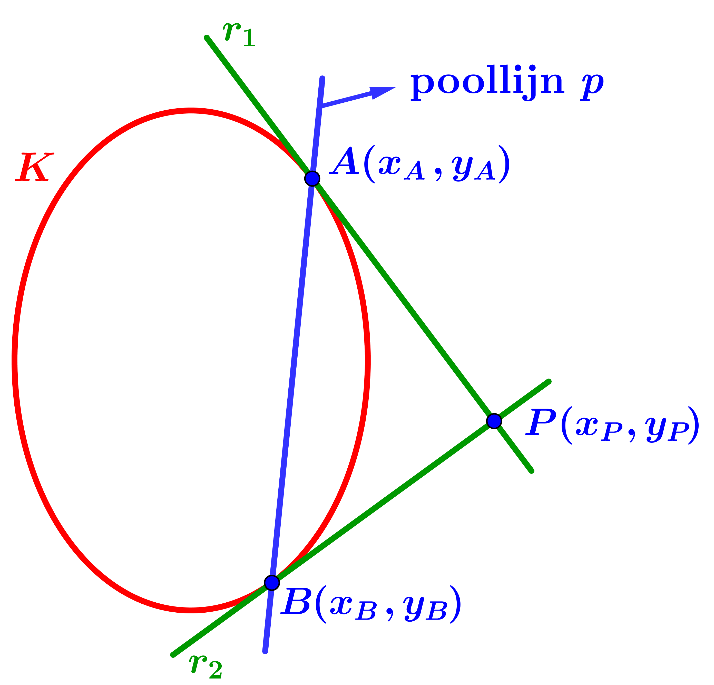
**Raaklijn en poollijn bij kegelsneden**

Een algemene kegelsnede (cirkel, ellips, hyperbool, parabool) heeft een vergelijking van de vorm: .  
Stel dat het punt op ligt. We willen de vergelijking van de raaklijn aan in opstellen. We stellen eerst de parametervoorstelling van een willekeurige lijn door op :   
 , waarbij en niet beide gelijk aan 0 kunnen zijn.  
Uitgeschreven in beide componenten hebben we: .  
De snijpunten van met vinden we door het oplossen van uit:  
,  
   
,   
hetgeen te herschrijven is tot de vorm , waarbij  
,  
 en  
.  
Er geldt dat , omdat op ligt. Dit geeft:   
Neem nu aan dat een raaklijn aan is. Dan heeft de vergelijking een tweevoudige oplossing en dit kan slechts het geval zijn als en   
We herschrijven als .   
Hieraan voldoen en (en alle andere oplossingen zijn van de vorm , , met ) .   
De vergelijking van is , dus  
   
en dit is om te schrijven tot  
   
, oftewel  
  
.  
  
Hiermee is de vergelijking van de raaklijn aan in het punt gevonden.  
Gegeven is nu een punt dat niet op ligt en we veronderstellen dat er vanuit twee raaklijnen aan te trekken zijn. Noem de twee raakpunten en   
Voor de raaklijnen in en in gelden volgens het eerder gevondene de volgende vergelijkingen  
,  
.  
ligtop beide raaklijnen, dus er geldt:  
.(1).(2)  
Beschouw nu de lijn met vergelijking:  
  
   
  
Dit is een lineaire vergelijking in en dus het stelt inderdaad een lijn voor.  
Volgens (1) en (2) voldoen de coördinaten van en aan deze vergelijking.  
De lijn is derhalve de lijn door de raakpunten en en heet de **poollijn** van punt t.o.v. de kegelsnede . Als op de cirkel ligt, dan is de poollijn gelijk aan de raaklijn in aan .  
De situatie is hieronder grafisch weergegeven:  
  
  
  
Op de eerder aangegeven manier zijn in de punten en de vergelijkingen van de raaklijnen   
 en op te stellen. Men kan de vergelijkingen van en ook vinden door de eenvoudige methode te gebruiken om de vergelijking van een lijn door twee gegeven punten op te stellen.  
  
We vatten samen wat we gevonden hebben.

|  |
| --- |
| **Werkschema voor het opstellen van de vergelijkingen van de raaklijnen vanuit punt   aan de kegelsnede : : \* stel de vergelijking van de poollijn van t.o.v. op:    \* los uit de vergelijking van de poollijn of op: of ; \* substitueer of in de vergelijking van ; \* los de tweedegraadsvergelijking in of *y* die zo ontstaat op; \* bepaal hiermee de coördinaten van de snijpunten en van met ; \* stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen aan in de punten en ;  dit zijn tevens de vergelijkingen van de raaklijnen vanuit punt aan de   kegelsnede .** |

Speciale gevallen van de vergelijking van de raaklijn in het punt .  
1) cirkel: raaklijn:   
2) parabool: raaklijn:   
3) ellips: raaklijn:   
4) hyperbool: raaklijn:   
  
Dezelfde formules gelden ook voor de poollijn van punt t.o.v. de kegelsnede  
(met vervangen door en vervangen door ).  
De methode om vanuit de vergelijking van de kegelsnede tot de vergelijking van de raaklijn in het punt te komen wordt wel **‘eerlijk delen’** genoemd.  
Daartoe moeten we in de vergelijking van :  
  
 vervangen door ,  
 vervangen door ,  
 vervangen door ,  
 vervangen door ,  
 vervangen door   
en een constante losse term of een constante factor onveranderd laten.  
Constante factoren worden meegenomen naar de vergelijking van de raaklijn, dus bijv. een term in de vergelijking van gaat bij overstappen naar de vergelijking van de raaklijn over de term  
 .  
Evenzo wordt m.b.v. eerlijk delen de vergelijking van een poollijn opgesteld.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 1** Bepaal vergelijking van de raaklijn aan de cirkel  in het punt .  **Oplossing** Eerlijk delen geeft voor de vergelijking van de raaklijn:  , dus . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 2** Bepaal vergelijking van de raaklijn aan de parabool in het punt .  **Oplossing** De vergelijking van de raaklijn is  , dus **.** | raaklijn en poollijn, voorbeeld 2.png |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 3** Bepaal vergelijking van de raaklijn aan de ellips  in het punt .  **Oplossing** De vergelijking van de raaklijn is , dus . | **raaklijn en poollijn, voorbeeld 3a.png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 4** Bepaal vergelijking van de raaklijn aan de hyperbool in het punt .  **Oplossing** De vergelijking van de raaklijn is  3 ∙, dus **6**. | raaklijn en poollijn, voorbeeld 4.png |

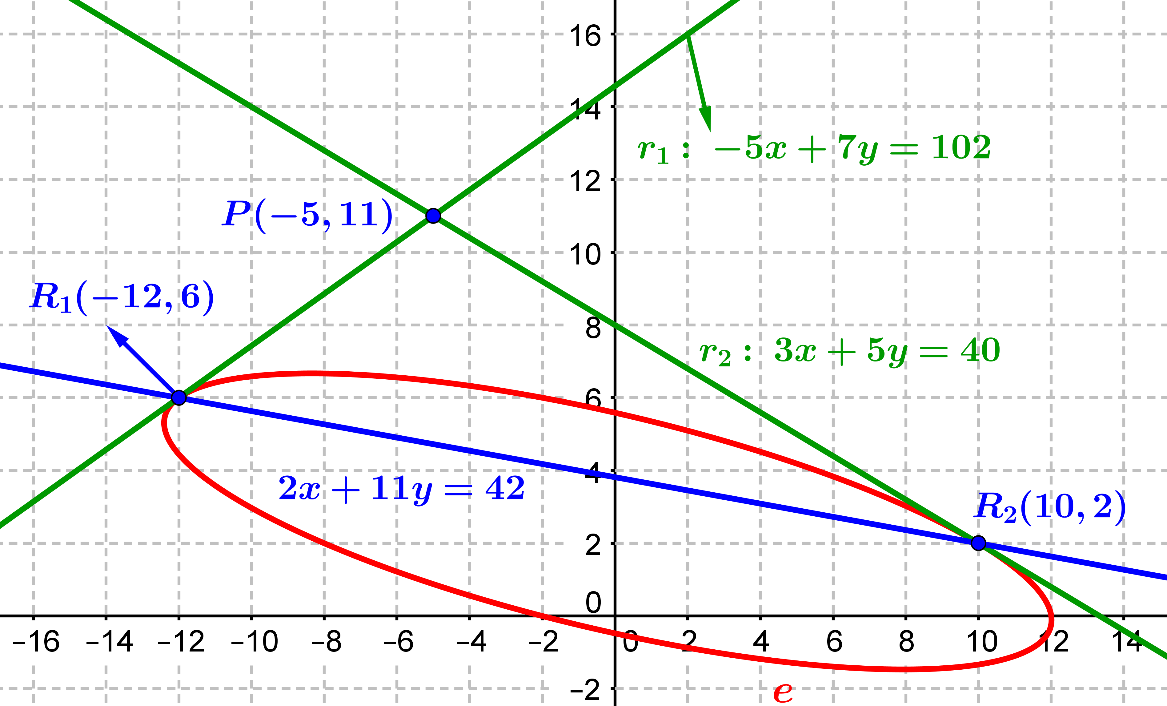
|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 5** Gegeven is de cirkel   .  Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan die gaan door het punt .  **Oplossing** **Methode 1** (m.b.v. de poollijn) De vergelijking van de poollijn van t.o.v. is  , dus .  Dit invullen in de vergelijking van geeft: | raaklijn en poollijn, voorbeeld 5.png |
| , , ,  , . De bijbehorende raakpunten zijn en  De raaklijnen aan in deze twee punten zijn: , dus en , dus . | |

**Methode 2** (m.b.v. de formule van Hesse)  
De algemene vergelijking van een lijn door het punt is .  
We herschrijven de vergelijking van als .  
Dit stelt een cirkel voor met middelpunt en straal .  
 raakt juist dan aan als .  
Volgende de formule van Hesse is dit gelijkwaardig aan .   
 , (kwadrateren) , ,  
 . . De oplossingen zijn , dus  
 . De vergelijkingen van de gezochte raaklijnen zijn  
 en , oftewel en .

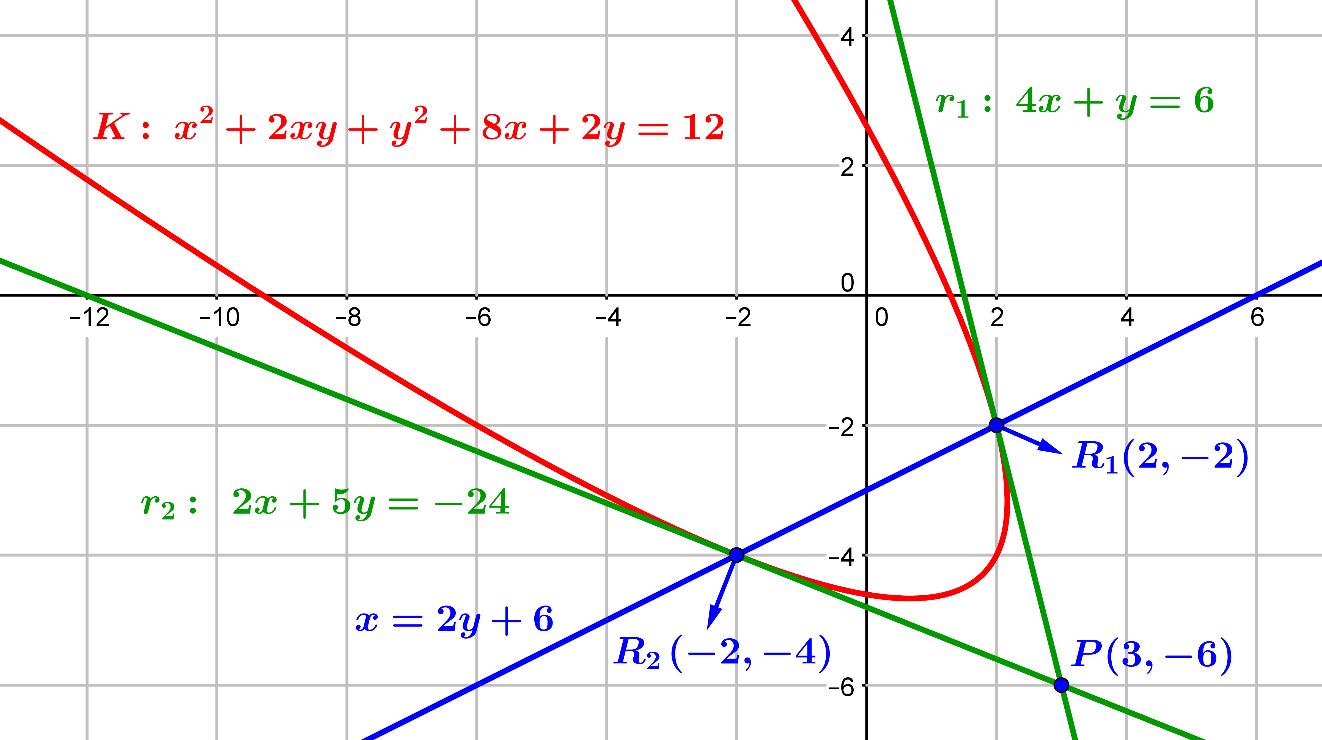
|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 6** Gegeven is de ellips .  Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen  aan die gaan door het punt .  **Oplossing** De vergelijking van de poollijn van t.o.v. is , dus .  Dit invullen in de vergelijking van geeft:  , , . . |  |

De oplossingen zijn , dus . De bijbehorende raakpunten zijn  
 en De raaklijnen aan in deze twee punten zijn:  
 , dus en  
.

**Voorbeeld 7**Gegeven is de (scheve) ellips .  
Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan die gaan door het punt . **Oplossing**De vergelijking van de poollijn van t.o.v. is  
, dus . Substitutie van in de vergelijking geeft:  
,   
,  
 , , , .  
De bijbehorende raakpunten zijn en   
De raaklijnen aan in deze twee punten zijn:  
, dus en  
, dus .



**Voorbeeld 8**Gegeven is de (scheve) parabool .  
Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan die gaan door het punt .  
  
**Oplossing**De vergelijking van de poollijn van t.o.v. is   
, dus . Dit invullen in de verg. van :  
, , .  
Dit geeft . De twee raakpunten zijn en . De bijbehorende raaklijnen zijn: en .



**Appendix**Er is ook een andere manier om de vergelijking van een raaklijn te bepalen aan een kromme  
 in een punt op . De letter gebruiken we hier niet omdat we deze reserveren voor de differentialen die we gaan gebruiken.   
Deze methode is ook op meer algemene krommen toepasbaar.  
Uit , volgt   
(de betekent hier ‘differentiaal’), ,   
, .  
De vergelijking van de raaklijn aan in is daarom   
 . We herleiden deze vergelijking.   
 ,   
 (\*).  
Omdat op ligt, geldt er dat .  
Bijgevolg is (\*) te herschrijven als  
, oftewel  
.  
Dit komt overeen met het eerder gevonden resultaat.