**Aantonen van symmetrie bij grafieken van functies

A) Lijnsymmetrie**
Gegeven is een functie met domein en een getal . Het getal hoeft niet tot te behoren.
De grafiek van is **lijn-symmetrisch** in de lijn als aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:
I): is symmetrisch t.o.v. , d.w.z. dat er voor elk getal geldt:
 ligt in ⟺ ligt in ;
II): voor elk getal waarvoor in ligt, geldt dat .

|  |  |
| --- | --- |
|  Vaak bestaat uit alle reële getallen, anders uitgedrukt . In dit geval geldt: de grafiek van is **lijn-symmetrisch** in de lijn als voor elk getal voldaan is aan. Zie hiernaast een voorbeeld van een grafiek die  lijn-symmetrisch is.(als , dan ligt links van ). Als speciaal geval hebben we: |  |

de grafiek van is lijn-symmetrisch in de as (dus in de lijn ) als voor elk getal voldaan is aan .

**Voorbeeld 1**
Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** Voor elk getal geldt dat  en   , dus de grafiek van is lijn-symmetrisch in de lijn . |  |

**Opmerking 1**
Nadat we in het bovenstaande voorbeeld uitgerekend hebben dat , kunnen we sneller dan hierboven bepalen. De betrekking geldt namelijk voor elk getal , dus geldt ook als we vervangen door .
Dit geeft dat .
Deze aanpak zullen we ook in latere voorbeelden toepassen.

**Voorbeeld 2**
Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** Voor elk getal geldt dat   , dus  . De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de  lijn . |  |

**Opmerking 2**
Stel dat een veelterm is (constante veelvouden van machten van bij elkaar opgeteld).
Dan zal de grafiek van lijn-symmetrisch zijn in de lijn als na het uitwerken en herleiden van alleen even machten van voorkomen. Er volgt dan direct dat
, want als een even getal is.
Dit verschijnsel hebben we gezien in de voorbeelden 1 en 2.

**Voorbeeld 3**
Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

**Oplossing**Voor elk getal geldt dat

, dus .
De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de lijn .
**

Voorbeeld 4**Gegeven is de functie
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** We bepalen eerst het domein van . Er moet gelden dat , , dus . Derhalve . Dit domein is  symmetrisch t.o.v. het getal 2. We merken op dat  juist dan tot behoort als . Voor elk getal , met , geldt dat  , dus . |  |

De grafiek van is derhalve lijn-symmetrisch in de lijn .

**Opmerking**
De grafiek van in voorbeeld 4 is een halve cirkel. Dit is als volgt in te zien.
Stel . Kwadrateren geeft dat , dus , oftewel
. Dit stelt, zoals bekend, een cirkel voor met middelpunt en straal 2.
De punten van de grafiek van vormen de bovenste helft van deze cirkel omdat .

**Voorbeeld 5**
Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** Voor elk getal geldt dat   , dus de grafiek van is  lijn-symmetrisch in de lijn . |  |

 **Voorbeeld 6**Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Methode 1**Voor elk getal geldt dat   , dus de grafiek van is lijn-symmetrisch in de lijn . |  |

**Methode 2**M.b.v. de eigenschappen
 en
vinden we dat

  , dus
 .
De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de lijn .

**Methode 3**M.b.v. de eigenschap blijkt dat
 . De grafiek van de functie is symmetrisch in de as (omdat ), dus (translatie!) de grafiek van is lijn-symmetrisch in de lijn .
**Voorbeeld 7**
Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** Voor elk getal geldt dat en  . Door het kwadraat van de eerste betrekking op  te tellen bij de tweede vinden we: . De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de lijn . |  |

**Voorbeeld 8**Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** Voor elk getal geldt dat    , dus  . |  |

De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de lijn .
 **Voorbeeld 9**Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

**Oplossing**
We bepalen eerst het domein van . Er moet gelden dat , , dus
. We merken op dat symmetrisch is t.o.v. het getal 4.

|  |  |
| --- | --- |
|  behoort tot . Voor elk getal , met , geldt:  , dus  . De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de lijn . |  |

**B) Puntsymmetrie**
Gegeven is een functie met domein en een punt . Het punt hoeft niet op de grafiek van
 te liggen. De grafiek van is **punt-symmetrisch** t.o.v. het punt als aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:
I): is symmetrisch t.o.v. , d.w.z. dat er voor elk getal geldt:
 ligt in ⟺ ligt in ;
II): voor elk getal waarvoor in ligt, geldt dat (\*).
De betrekking (\*) betekent dat het gemiddelde is van de getallen en .

|  |  |
| --- | --- |
|   Vaak bestaat uit alle reële getallen,  anders uitgedrukt . In dit geval geldt: de grafiek van is **punt-symmetrisch** t.o.v.  het punt als voor elk getal geldt dat . Zie hiernaast een voorbeeld van een grafiek die punt-symmetrisch is  (als , dan ligt links van ). |  |

Als speciaal geval hebben we:
de grafiek van is punt-symmetrisch in de oorsprong als voor elk getal geldt dat
.

**Voorbeeld 10**
Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** Voor elk getal geldt dat  , dus .  Er volgt dat , dus de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt . **Opmerking** Het punt is het **buigpunt** van de grafiek van . Algemeen kan men aantonen dat de grafiek van een derdegraadsfunctie punt-symmetrisch is t.o.v. het buigpunt.  |  |

**Voorbeeld 11**Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing** geeft eenvoudig dat , dus . is symmetrisch t.o.v. het getal 6. We merken op dat juist dan tot behoort als . Voor elk getal , met , geldt dat  , dus .Er volgt dat .De grafiek van is daarom punt-symmetrisch t.o.v. het punt .De puntsymmetrie is evident als we herschrijven als. |  |

De functie is punt-symmetrisch in , dus (translatie!) de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt .
 **Voorbeeld 12**Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** Het domein bestaat uit alle reële getallen,  met uitzondering van , d.w.z. . Voor elk getal , met , geldt dat , dus .  Er volgt dat   , dus de grafiek van is  punt-symmetrisch t.o.v. het punt . |  |

**Opmerking**Het punt is het snijpunt van de twee asymptoten van de grafiek van .
Algemeen geldt dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. de snijpunt
van de asymptoten en van de grafiek van . **Voorbeeld 13**
Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** We bepalen eerst het domein van . geeft . is symmetrisch t.o.v. het getal 0. behoort tot  . Voor elk getal , met , geldt dat en   . |  |

(want ).
Er volgt dat .
De grafiek van is daarom punt-symmetrisch t.o.v. het punt .

**Voorbeeld 14**Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Oplossing** Voor elk getal geldt dat  , dus . Er volgt dat, dus de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt . |  |

**Voorbeeld 15**Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
|  **Methode 1** Voor elk getal geldt dat en   ( en ) ( en ).  |  |

Er volgt dat , dus de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt .

**Methode 2**
M.b.v. de eigenschappen
 en
vinden we dat:

∙∙ ∙∙ , dus
.
Er volgt dat : , dus de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt .

**Methode 3**M.b.v. de eigenschap blijkt dat
. De functie is punt-symmetrisch t.o.v. het punt
 (omdat , dus (translatie!) is de grafiek van punt-symmetrisch t.o.v. het punt .

**Voorbeeld 16**
Gegeven is de functie .
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

**Oplossing**


Voor elk getal geldt:
, dus
.
Er volgt dat .
De grafiek van is daarom punt-symmetrisch t.o.v. het punt .