**Domein en bereik van functies**

|  |
| --- |
| Als we de grafiek van een functie, bijvoorbeeld $f\left(x\right)=x^{3}-8x^{2}+13x+2$ willen tekenen, dan nemen we meestal alle mogelijke $x-$waarden, waarvoor de bijbehorende $y-$waarden bestaan. |
| De waarden die we toelaten voor $x$ bij een bepaalde functie vormen het **domein** van die functie. Als het domein bestaat uit alle mogelijke getallen op de $x-as$, dan zeggen dat het domein gelijk is aan $R$(de verzameling van alle reële getallen). Het domein van een functie $f$ geven we aan met $D\_{f}$. Hiernaast staat een deel van de grafiek van $f$ waarbij $D\_{f}=R$. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| In bepaalde gevallen willen we een ander domein kiezen. Stel bijvoorbeeld dat we voor de bovenstaande functie $D\_{f}=[-1, 5]$ nemen(het interval van $-1$ tot $5$). Dan wordt de grafiek zoals hiernaast is weergegeven.De verzameling van alle $y-$waarden die functie $f$ bij het gekozen domein kan aannemen wordt het **bereik** van $f$ genoemd, en we noteren dit als $B\_{f}$. In dit geval geldt dat $B\_{f}=\left[-20, 8\right]$. |  |

Het bereik van een functie, behorend bij een zeker domein, kan slechts goed bepaald worden indien een duidelijke schets is getekend. We zien dat hier de laagste waarde $y-$waarde gelijk is aan
$f\left(-1\right)=-20$ (met de GR te vinden via G-Solve → Y-CAL → $x=-1$). De hoogste$ y-$waarde wordt hier gevonden door de hoogte van de top te berekenen. Indien het m.b.v. de GR mag, dan kan dit via
G-Solve → MAX. Indien het algebraïsch moet, dan dient men de functie te differentiëren en de afgeleide gelijk aan $0$ te stellen. Bij de waarde $x$ die voldoet aan $f^{'}\left(x\right)=0$ dient men tenslotte de bijbehorende $y-$waarde uit te rekenen.
 **Opmerking**
Het minimum $-20$ bij $x=-1$ (in het voorgaande voorbeeld) kan met de GR niet via
G-Solve → MIN gevonden worden. Bij G-Solve → MIN zoekt de GR namelijk slechts naar $x-$waarden waar de grafiek een dal heeft, dus waar de grafiek overgaat van dalend naar stijgend.

Als een functie $f$ gegeven is en er gevraagd wordt naar het domein van die functie, dan wordt er bedoeld dat we de maximale verzameling van $x-$waarden zoeken waarvoor $f(x)$ bestaat.

**Voorbeeld 1**
Gegeven is de functie $f\left(x\right)=4-2\sqrt{6-3x}$ .
Bepaal $D\_{f}$ en $B\_{f}$.

**Oplossing**
Algemeen geldt dat $\sqrt{A} $precies dan bestaat als $A\geq 0$.
Voor de $x-$waarden van het domein geldt daarom dat $6-3x\geq 0$. Dit oplossen geeft $-3x\geq -6$, dus $x\leq 2$. Hiermee is gevonden dat $D\_{f}=\left⟨\leftarrow , 2]\right.$.
Om het bereik te bepalen, moeten we een schets maken van de grafiek van $f$.

Het beginpunt van de grafiek is het punt $(2 , 4)$, omdat $f\left(2\right)=4$.
Uit de schets lezen we af dat $B\_{f}=\left⟨\leftarrow ,4]\right.$.

**Voorbeeld 2**
Bepaal het domein en het bereik van de functie $f\left(x\right)=-40+2(x-6)^{4}$.
**Oplossing**
$f(x)$ bestaat duidelijk voor elk reëel getal $x$, dus $D\_{f}=R$.
We maken een schets van de grafiek van $f$.

Het laagste punt van de grafiek is $(6,-40)$ en $B\_{f}=[-40,\left.\rightarrow \right⟩$.
 **Voorbeeld 3**Bepaal het domein en het bereik van de functie $f\left(x\right)=$ $\frac{3x - 1}{x + 2}$ .

**Oplossing**
$f\left(x\right)$ bestaat voor alle $x$, behalve $x=-2$, dus $D\_{f}=R\\{-2\}$ (d.w.z. $R$ met daaruit weggelaten $-2)$.
$f\left(x\right)$ kan alle waarden bereiken, behalve $y=3$ (de lijn $y=3$ is een H.A. van de grafiek van $f$).
Hieruit volgt dat $B\_{f}=R\\{3\}$.



**Voorbeeld 4**
Bepaal het domein en het bereik van de functie $f\left(x\right)=1,5∙2^{x + 2}-4$.

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**$f(x)$ bestaat duidelijk voor elk reëel getal $x$, dus $D\_{f}=R$. De lijn $y=-4$ is een H.A. van de grafiek van $f$. We maken een schets van de grafiek van $f$.Uit de schets blijkt dat$B\_{f}=\left⟨-4, \left.\rightarrow \right⟩\right.$. |  |

 **Voorbeeld 5**Bepaal het domein en het bereik van de functie $f\left(x\right)=2+\sqrt{9-(x-5)^{2}}$ .

**Oplossing**
We bepalen eersthet domein: $9-(x-5)^{2}\geq 0$, $(x-5)^{2}\leq 9$, $-3\leq x-5\leq 3$ , $2\leq x\leq 8$.
Dit geeft $D\_{f}=\left[2, 8\right]$. We maken een schets van de grafiek van $f$.

****

Hieruit lezen we af dat $B\_{f}=\left[2, 5\right]$.

**Voorbeeld 6**Bepaal het domein en het bereik van de functie $f\left(x\right)=3-2∙log\_{3}(8-2x)$.

**Oplossing**
Algemeen geldt dat $log\_{g}(A)$ (waarbij $g>0$ en $g\ne 1$) precies dan bestaat als $A>0$.
Voor de $x-$waarden van het domein geldt daarom dat $8-2x>0$. Dit oplossen geeft $-2x>-8$, dus $x<4$. Hiermee is gevonden dat $D\_{f}=\left⟨\leftarrow ,\left.4\right⟩\right.$. We maken een schets van de grafiek van $f$.

Hieruit blijkt dat$B\_{f}=R$.

We geven nu wat algemenere resultaten voor bepaalde klassen functies.

**A)** $f\left(x\right)=a+b\sqrt{c+dx},$ waarbij $b\ne 0$ en $d\ne 0$.
We bepalen eerst het domein van $f$. Er moet gelden dat $c+dx\geq 0$, dus $dx\geq -c$.
Dit geeft dat $x\geq -{c}/{d}$ als $d>0$ en $x\leq -{c}/{d}$ als $d<0$. We vinden derhalve dat
$D\_{f}=[-{c}/{d}, \left.\rightarrow \right⟩$ als $d>0$ en $D\_{f}=\left⟨\leftarrow , -{c}/{d}]\right.$ als $d<0$.
Voor het bereik is het eenvoudig om in te zien dat $B\_{f}=[a, \left.\rightarrow \right⟩$ als $b>0$ en $B\_{f}=\left⟨\leftarrow ,a]\right.$ als $b<0$.

**B)** $f\left(x\right)=a+b(c+dx)^{n}$, waarbij $b\ne 0$ en $d\ne 0$; verder is $n$ een positief geheel getal.
In alle gevallen geldt dat $D\_{f}=R$. Voor het bepalen van het bereik onderscheiden we
1) $n$ is oneven. De grafiek van $f$ heeft dan een (uitgerekte) S-vorm en $B\_{f}=R$.
2) $n$ is even. In dit geval heeft $f$ een extreme waarde $a$ bij $x=-{c}/{d}$ en wel een minimum als
$b>0$ en een maximum als $b<0$. Dit geeft dat $B\_{f}=[a, \left.\rightarrow \right⟩$ als $b>0$ en $B\_{f}=\left⟨\leftarrow ,a]\right.$ als $b<0$.

**C)** $f\left(x\right)=$ $\frac{a + bx}{c + dx}$ , waarbij we aannemen dat $d\ne 0$ en dat de teller geen constant veelvoud is van de noemer (in welk geval de functie constant zou zijn).
De grafiek van $f$ heeft de V.A. $x=-{c}/{d}$ en $D\_{f}=R\\{-{c}/{d}\}$.
De grafiek van $f$ heeft de H.A. $y={b}/{d}$ en $B\_{f}= R\\{{b}/{d}\}$.

**D)** $f\left(x\right)=a∙g^{x}+b$, waarbij $a\ne 0$, $g>0$ en $g\ne 1$.
$f\left(x\right)$ bestaat voor elke $x-$waarde, dus dat $D\_{f}=R$.
De grafiek van $f$ heeft de H.A. $y=b$.
$B\_{f}=\left⟨b\right., \left.\rightarrow \right⟩$ als $a>0$ en $B\_{f}=\left⟨\leftarrow \right., \left.b\right⟩$ als $a>0$.

**E)** $f\left(x\right)=a+b∙log\_{g}(c+dx)$, waarbij $b\ne 0$ en $d\ne 0$.
De grafiek van $f$ heeft de V.A. $x=-{c}/{d}$.
$D\_{f}=\left⟨-{c}/{d}\right., \left.\rightarrow \right⟩$ als $d>0$ en $D\_{f}=\left⟨\leftarrow ,\left. -{c}/{d}\right⟩\right.$, als $d<0$.
Verder geldt dat $B\_{f}= R$.