**De negenpuntscirkel**Bekijk de volgende figuur.


Getekend is $∆ABC$ met daarin de zwaartelijnen $ AA\_{1} , BB\_{1}$ en $ CC\_{1}$ .
Verder zijn getrokken de hoogtelijnen $AA\_{2} , BB\_{2}$ en $CC\_{2}$ , die elkaar snijden in het hoogtepunt $H$. Tenslotte zijn nog aangegeven de middens $A\_{3} , B\_{3} en C\_{3}$ van de lijnstukken $AH, BH en CH$.

**Stelling** **1**
De punten $A\_{1} , B\_{1} , C\_{1} , A\_{2} , B\_{2} , C\_{2} , A\_{3} , B\_{3}$ en $C\_{3}$ liggen op één cirkel. **Opmerking**De in deze stelling voorkomende cirkel wordt de **negenpuntscirkel** genoemd.

**Bewijs**
Zie de figuur op de volgende pagina.



$A\_{1}B\_{1}$ is een middenparallel in $∆ABC$ en $A\_{3}B\_{3}$ is een middenparallel in $∆ABH$ , dus beide lijnstukken zijn evenwijdig aan *AB* (bekende eigenschap middenparallel) en bijgevolg staan beide loodrecht op de hoogtelijn $CC\_{2}$ in $∆ABC$. $B\_{1}A\_{3}$ is een middenparallel in $∆ACH$ en $A\_{1}B\_{3}$ is een middenparallel in $∆BCH$, dus beide lijnstukken zijn evenwijdig aan $CC\_{2}$. Hieruit volgt dat $A\_{3}B\_{3}A\_{1}B\_{1}$ een rechthoek is.
Geheel analoog (m.b.v. de hoogtelijn $AA\_{2}$) blijkt dat ook $B\_{3}C\_{3}B\_{1}C\_{1}$ een rechthoek is.
De twee rechthoeken hebben lijnstuk $B\_{1}B\_{3}$ als gemeenschappelijke diagonaal.
Er volgt m.b.v. (de omkering van) de **stelling van Thales** dat de zes punten$ A\_{3}, C\_{1}, B\_{3}, A\_{1}, C\_{3} en B\_{1}$ op een cirkel *Γ* liggen met $B\_{1}B\_{3}$ als diameter. Ook $A\_{1}A\_{3}$ en $C\_{1}C\_{3}$ zijn diameters van *Γ* omdat
$A\_{1}B\_{1}A\_{3}$ en $C\_{1}B\_{1}C\_{3}$ beide recht zijn (Thales).
Nog eens driemaal toepassen van (de omkering van) de stelling van Thales impliceert dat:
$A\_{2}$ ligt op *Γ* omdat $A\_{1}A\_{3}$ een diameter is van *Γ* en $A\_{1}A\_{2}A\_{3}$ recht is;
$B\_{2}$ ligt op *Γ* omdat $B\_{1}B\_{3}$ een diameter is van *Γ* en $B\_{1}B\_{2}B\_{3}$ recht is;
$C\_{2}$ ligt op *Γ* omdat $C\_{1}C\_{3}$ een diameter is van *Γ* en $C\_{1}C\_{2}C\_{3}$ recht is.
Hiermee is de stelling bewezen. Q.E.D.

De volgende stelling geeft informatie over de straal en de locatie van het middelpunt van de negenpuntscirkel *Γ*. We noemen $σ$ de omgeschreven cirkel van $∆ABC$.

**Stelling 2**
Het middelpunt van *Γ* is het midden van lijnstuk $OH$, waarbij $O$ het middelpunt is van $σ$ en $H$ het hoogtepunt is van $∆ABC$.
De straal van *Γ* is de helft van de straal van $σ$.
 **Bewijs**

|  |  |
| --- | --- |
| Noem $N$ het middelpunt van *Γ*.  $N$ is het midden van lijnstuk $A\_{1}A\_{3}$ omdat we in het bewijs van de vorige stelling gezien hebben dat $A\_{1}A\_{3}$ een diameter is van *Γ.*Laat $L$ het punt $σ$ zijn dat diametraal ligt t.o.v. $C$.Verder trekken we de lijnen $BL$ en $CL$. | negenpuntscirkel (3).png |

$OA\_{1}$ is een middenparallel van $∆BCL$, dus $OA\_{1}=\frac{1}{2}∙BL$ (1).
$BH$ staat loodrecht op $AC$ (hoogtelijn $BH)$ en $AL$ staat loodrecht op $AC$ (Thales), dus $BH$ en $AL$ zijn evenwijdig. Evenzo geldt dat $AH$ en $BL$ loodrecht staan op $BC$, dus $AH$ en $BL$ zijn evenwijdig.
Dit impliceert dat $ALBH$ een parallellogram is, dus $BL=AH.$
Daarom is (1) te herschrijven tot: $OA\_{1}=\frac{1}{2}∙AH=AA\_{3}=A\_{3}H.$
Omdat $AH$ en $OA\_{1}$ parallel zijn (beide staan loodrecht op $BC$), volgt er dat $A\_{3}HA\_{1}O$ en $AA\_{3}A\_{1}O$ parallellogrammen zijn. Dit impliceert:
I) $ N$ is het midden van $OH$;
II) $A\_{1}A\_{3}=OA $, dus de diameter van *Γ* is gelijk aan de straal van $σ$. Q.E.D.