**Oplossen van ongelijkheden  
  
A) Lineaire ongelijkheden**  
Dit zijn ongelijkheden van de vorm , of ongelijkheden die tot deze vorm te herleiden zijn. Hierbij mag in de plaats van het ‘’ – teken ook of staan. We nemen hierbij aan dat .   
Hoe de oplossing verder verloopt, hangt af van het teken van :  
 als , dan (het ongelijkheidsteken blijft intact);  
 als , dan (het ongelijkheidsteken klapt om).  
Wanneer we zeggen dat het **teken omklapt**, dan bedoelen we het volgende:  
 gaat over in , gaat over in , gaat over in en gaat over in .  
  
  
**Voorbeeld 1**  
Los op: .  
  
**Oplossing**  
Eerst herleiden: . De oplossing hiervan is .  
  
  
**Voorbeeld 2**  
Los op: .  
  
**Oplossing**  
Herleiden geeft: ; omdat , klapt het teken om, zodat we vinden: .  
  
Het is handig om een **algemeen ongelijkheidsteken** in te voeren, namelijk .  
Dit teken kan staan voor of .  
Wanneer we oplossen , dan volgt dat (het ongelijkheidsteken blijft intact).  
Als we oplossen , dan volgt dat (het ongelijkheidsteken klapt om).  
Dus met de overgang van naar geven we aan dat het teken omklapt.  
  
De klasse ongelijkheden in A) kunnen we nu beschrijven als . Voor de oplossing geldt:  
 uit volgt dat , in het geval dat ;  
 uit volgt dat , in het geval dat .

**B) Kwadratische ongelijkheden**  
Dit zijn ongelijkheden van de vorm , of ongelijkheden die tot deze vorm te herleiden zijn. We nemen hierbij aan dat .   
  
Vier belangrijke speciale typen, kwadratische ongelijkheden zijn:  
  
**B1)** **B3)**   
 ; ;  
 ; .  
geen enkele voldoet.  
  
**B2)** **B4)**   
 ; ;  
geen enkele voldoet. ;  
 .  
  
De juistheid van de gevonden oplossingen in de gevallen en kan men inzien met behulp van de twee figuren die hieronder zijn getekend.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Bekijken we nu de algemene kwadratische vergelijking .  
De aanpak om deze op te lossen is als volgt. Probeer eerst op te lossen , zo nodig met behulp van de discriminant . We weten dan of de parabool met vergelijking  
 de as snijdt of raakt, en zo ja, waar dit optreedt.  
We maken een schets van de parabool, rekening houdend met het type  
(een dalparabool als en een bergparabool als ). Eventuele snijpunten of raakpunten met de as worden aangegeven. Nadat de schets gemaakt is, kunnen we aflezen voor welke er geldt dat .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 3**  Los op: .   **Oplossing**  geeft , dus  .  We maken een schets van (dalparabool).  Uit de schets blijkt dat de oplossing van is:  . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 4**  Los op: .   **Oplossing**  geeft .  We maken een schets van (bergparabool).  Uit de schets blijkt dat de oplossing van is:  . |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Voorbeeld 5**  Los op: .   **Oplossing**  Het is handiger om geen haakjes uit te werken.  geeft , dus  of .  M.b.v. een schets vinden dat de oplossing van   is: . |  | |
| Voor het vervolg is het nuttig om eerst uit te leggen wat stijgende  en dalende functies zijn.  Een functie , die gedefinieerd is op een domein , heet **stijgend**  als voor alle en in geldt:   indien , dan volgt er dat (1).   Anders uitgedrukt: is stijgend indien bij toenemende  waarden in de bijbehorende waarden ook toenemen.   Zie hiernaast een voorbeeld van een stijgende functie. | |  |

We merken op dat omgekeerd voor een stijgende functie uit volgt dat .   
Stel immers dat . Het is dan onmogelijk dat : anders zou er namelijk volgen dat . Bovendien zou uit volgen dat , dus, (gelet op (1)), geldt er dan dat  
. In beide gevallen komen we in strijd met de aanname dat . Er blijft daarom slechts de mogelijkheid over. Hiermee is aangetoond dat   
 indien , dan volgt er dat (2).  
(1) en (2) zijn korter uit te drukken als  
 en   
Dit is korter te schrijven als (3).  
Hierbij betekent ‘’: is gelijkwaardig met. Algemeen betekent , dat de twee beweringen  
 en gelijkwaardig zijn: uit volgt en uit volgt .  
(3) komt op hetzelfde neer als: ) (het teken blijft intact) (4).

|  |  |
| --- | --- |
| Een functie , die gedefinieerd is op een domein , heet **dalend**  als voor alle en in geldt:  indien , dan volgt er dat (5).  Anders uitgedrukt: is dalend indien bij toenemende  waarden in de bijbehorende waarden afnemen.  (5) komt op hetzelfde neer als:  (het teken klapt om) (6).  Zie hiernaast een voorbeeld van een dalende functie. |  |

**C) Exponentiële ongelijkheden**Dit zijn ongelijkheden van de vorm , of ongelijkheden die tot deze vorm te herleiden zijn.  
Hierbij is een positief getal met . Dit getal heet het **grondtal**.  
  
We bekijken de grafiek van de functie .  
Daarbij onderscheiden we twee gevallen: en .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

In beide gevallen geldt dat voor elke waarde van en is de as een horizontale asymptoot. We zien dat de functie stijgend is voor en dalend voor .  
Dit leidt tot de oplossingen van , waarbij we twee gevallen onderscheiden.  
  
I) . De oplossing van is . Voor de functie is de ongelijkheid  
 te herschrijven als . Hieruit vinden we:   
  
 .  
  
II) .  
Dan voldoet elke aan en geen enkele aan .  
  
Voor het geval dat krijgen we een mooie bondige oplossing:  
 .

**Voorbeeld 6**Los op: .  
  
**Oplossing**  
 .  
  
  
**Voorbeeld 7**  
.  
  
**Oplossing**

**D) Logaritmische ongelijkheden**Dit zijn ongelijkheden van de vorm , of ongelijkheden die tot deze vorm te herleiden zijn. Hierbij is een positief getal met . Dit getal heet het **grondtal**.   
We bekijken de grafiek van de functie .

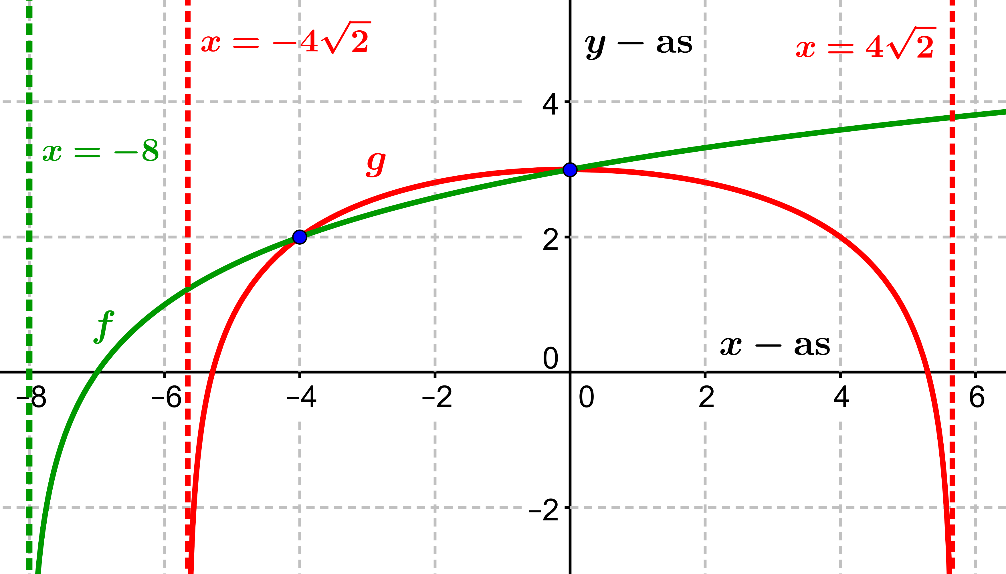
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Het domein van de functie is het interval en het bereik bestaat uit alle reële getallen.   
We zien dat de functie stijgend is voor en dalend voor .  
Dit geeft het volgende resultaat.  
  
 .  
  
We dienen de gevonden ongelijkheid en nog te combineren met de domeineisen  
 en . De volledige oplossing is als volgt:  
  
 ,  
  
 ,  
  
 en  
  
 .   
In het eerstegeval, met , betekent de dubbele ongelijkheid dat én .  
We moeten dan de twee ongelijkheden en elk apart oplossen, en hun oplossingen combineren. Merk op dat we hier niet hoeven te eisen dat , want als en , dan geldt automatisch dat . Analoog voor de andere gevallen.  
 **Voorbeeld 8**Los op: .  
  
**Oplossing**  
 (want   
 .

|  |  |
| --- | --- |
| **Andere manier**  Schets de grafiek van ,  waarbij .   .  .  Aflezen geeft: |  |

**Voorbeeld 9**Los op: .   
  
**Oplossing**  
   
   
 (want   
 .

|  |  |
| --- | --- |
| **Andere manier**  We schetsen de grafieken van   en .  Er geldt dat en .         .   Aflezen uit de figuur geeft: |  |

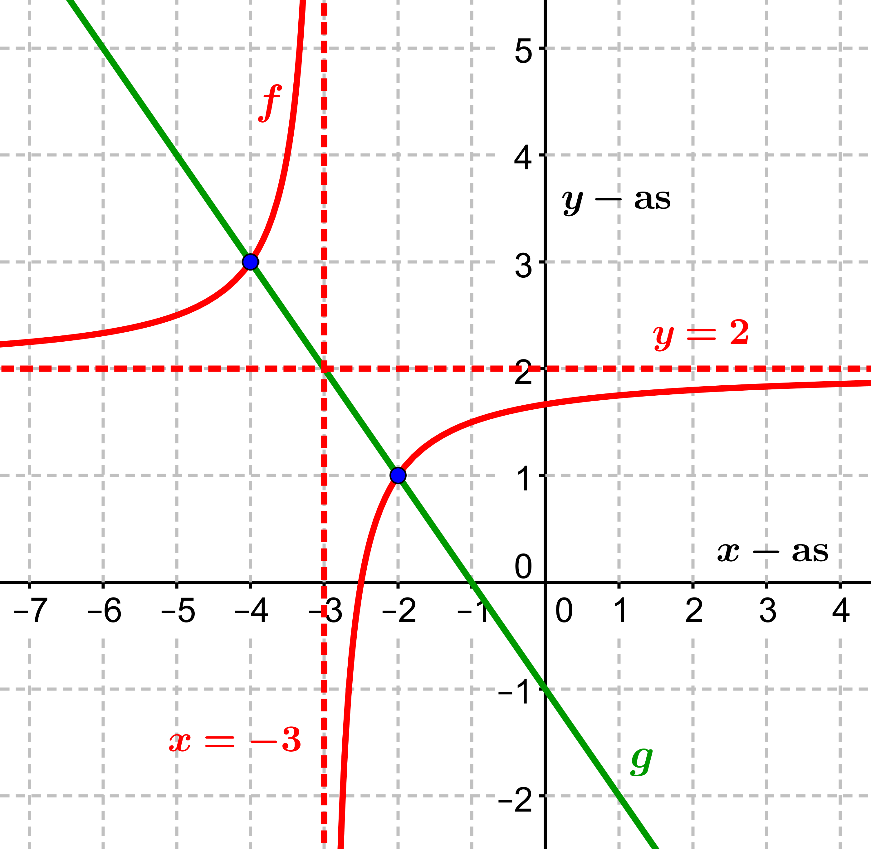
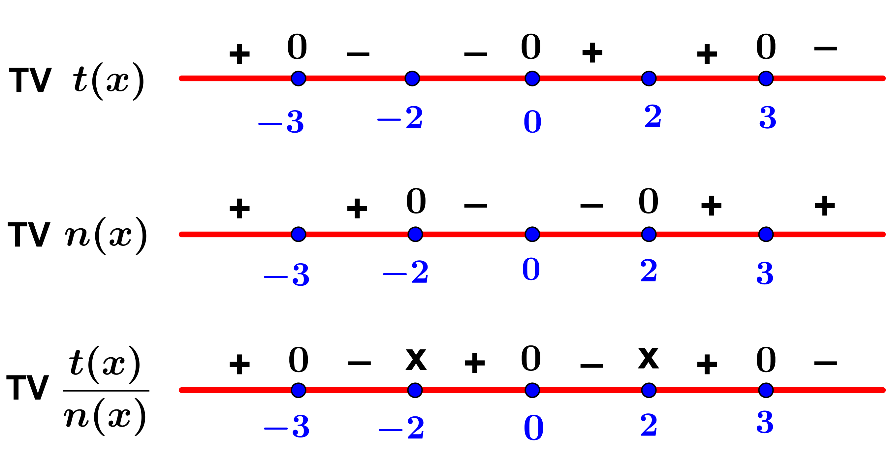
**Voorbeeld 10**Los op: .  
**Oplossing**  
 (want   
   
   
 .  
 **Andere manier**Tekende grafieken van en , waarbij en   
. algebraïsch oplossen geeft . Vervolgens vinden we met aflezen: . **  
E) Gebroken ongelijkheden**Dit zijn ongelijkheden van de vorm , of ongelijkheden die tot deze vorm te herleiden zijn. Hierbij nemen we aan dat de variabele daadwerkelijk voorkomt in de functie

Vooraf merken we op dat het herleiden van tot , zonder verdere restrictie, incorrect is. Je hebt dan namelijk beide leden van de ongelijkheid met vermenigvuldigd, maar dit is foutief voor de waarden van waarvoor negatief is: dan klapt namelijk het teken om. Voor andere waarden van waarvoor positief is, blijft het teken intact.  
Er zijn twee goede methodesom de ongelijkheid  op te lossen.  
  
**Methode 1**

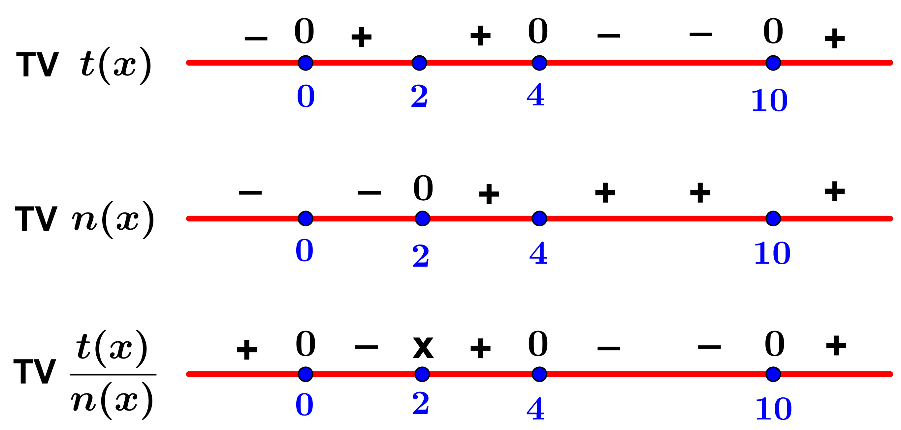
1) Herleid de ongelijkheid op nul: , dus .  
2) Los op: en .  
3) Maak een tekenverloop van en van .  
4) Combineer de twee gevonden tekenverlopen tot een tekenverloop van .  
5) Lees uit het tekenverloop van af waar ‘’ geldt.  
  
**Methode 2**  
1) Los op: .  
2) Maak een duidelijk schets van de grafieken van en .  
3) Lees uit de schets af waar geldt.  
  
In de voorbeelden die nu volgen zullen we steeds beide methodes aangeven.  
  
**Voorbeeld 11**  
Los op: .

**Oplossing**  
**Methode 1**   
 . Stel en .

|  |  |
| --- | --- |
| geeft ;  geeft .  We bekijken nu het tekenverloop (TV)   van , en de breuk  (zie de figuur hiernaast). Aflezen geeft:  . |  |

**Methode 2**   
 .  
We schetsen de grafieken van en . ****  
Aflezen uit de schets geeft: .  **Voorbeeld 12**Los op: . **Oplossing  
Methode 1**  . Stel en .  
  
Hieruit lezen we af dat:   
  
**Methode 2**

|  |  |
| --- | --- |
| We schetsen de grafieken van  en .        .  Aflezen geeft uit de schets geeft:   . |  |

**Voorbeeld 13**Los op:  .  
  
**Oplossing**  
**Methode 1**  
   
 .  
Stel en .   
  
Hieruit lezen we af: :   
**Methode 2**  
We maken een schets van en .

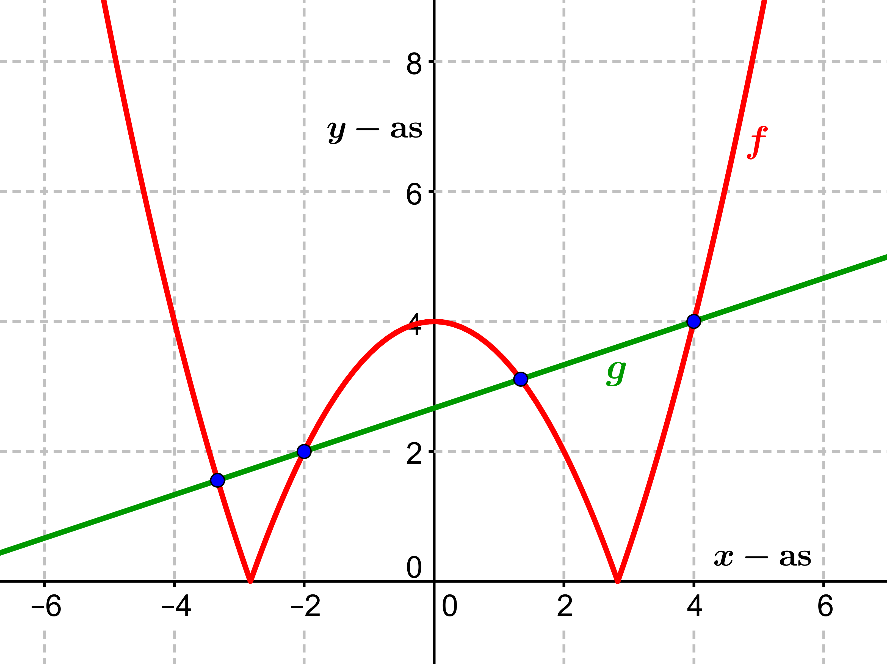
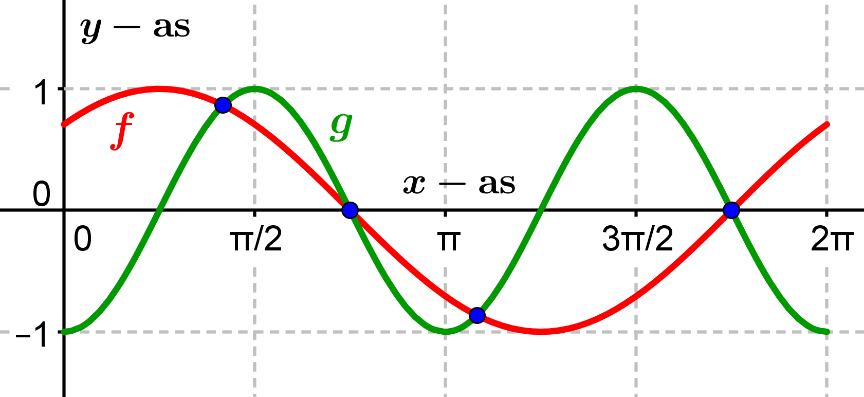
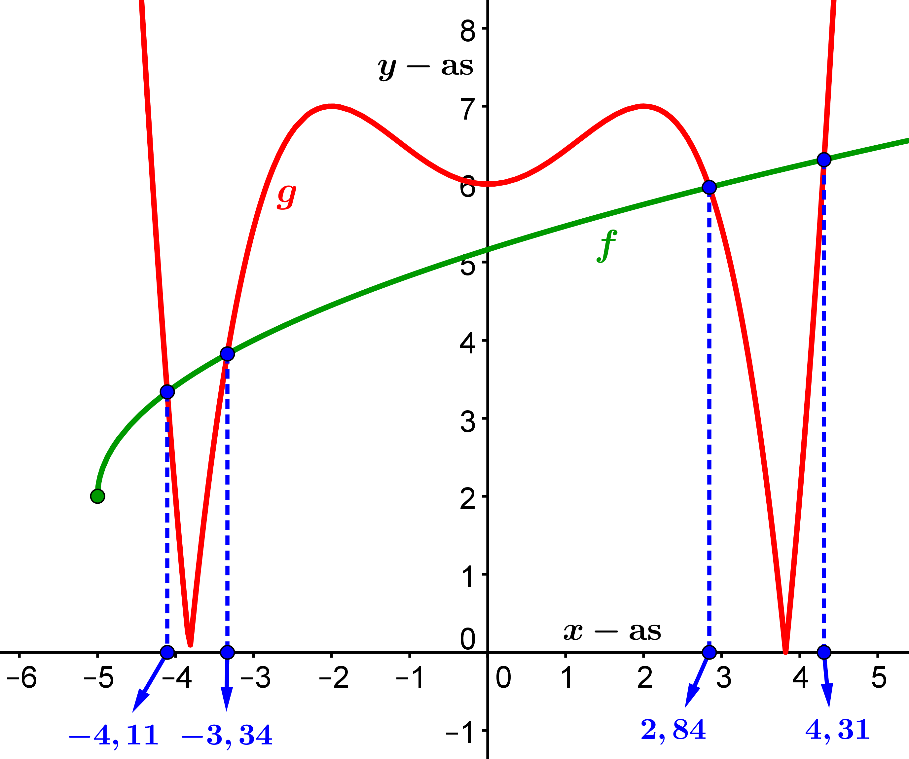
|  |  |
| --- | --- |
| . Aflezen uit de schets geeft: |  |

**F) Voorbeelden van overige typen  
  
Voorbeeld 14**Los op: .  
  
**Oplossing**

|  |  |
| --- | --- |
| , ,   ,  ,   , .   Controle leert dat alleen voldoet.   We maken een schets van  en .   Merk op dat . Aflezen uit de schets geeft:  als . |  |

**Voorbeeld 15**Los op: .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**        .  We maken een schets van  en .  Aflezen uit de schets geeft:    . |  |

**Voorbeeld 16**Los op: .  
  
**Oplossing**  
 .I)   
 .  
II)   
 .  
We maken een schets van de grafieken van en .  
  
****Aflezen uit de schets geeft: .  
  
**Voorbeeld 17**  
Los op: , voor .  
  
**Oplossing**  
   
   
   
.  
De oplossingen op het interval zijn: , , , 1 .  
We maken een schets van de grafieken van en .  
  
Aflezen uit de schets geeft:  
 .  
  
**Voorbeeld 17**  
Los op in twee decimalen nauwkeurig: .  
  
**Oplossing**We mogen hier de grafische rekenmachine gebruiken en maken derhalve een schets van de grafieken van en . We merken op dat .  
  
De oplossingen van zijn bij benadering: , , en .  
Aflezen uit de schets geeft: