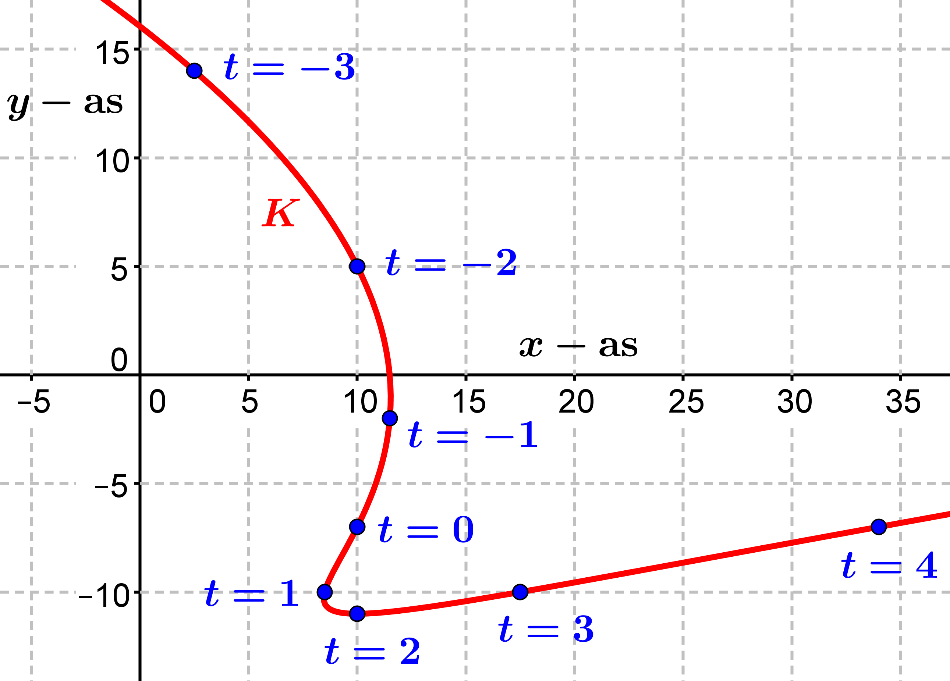
**Parameterkrommen**Een **parameterkromme** is een kromme die beschreven kan worden door  
 (\*) .  
Dit kan men ook noteren als (‘’ betekent ‘en’). Hierbij behoort de **parameter** tot een bepaald interval . De vergelijkingen In (\*) vormen de **parametervoorstelling** van . Vaak is te interpreteren als de **tijd**. Een bewegend object in een assenstelsel bevindt zich op het tijdstip in het punt . Bij een functie behoort bij elke waarde uit het domein precies één waarde. Elke verticale lijn snijdt de grafiek van daarom in hoogstens één punt. Een kromme waarbij twee punten boven elkaar liggen kan daarom niet de grafiek van een functie zijn. Met een parameterkromme kunnen we meer algemene krommen beschrijven dan met de grafieken van functies.  
  
**Voorbeeld 1**We maken een schets van de kromme : .   
  
Het kan handig zijn om, zoals hier, van een aantal punten de bijbehorende waarden aan te geven.  
Je ziet dan in welke richting de punten van doorlopen worden bij een toename of afname van de parameter . Deze kromme is duidelijk niet de grafiek van een functie.

Interessant is de vraag hoe men bij een parameterkromme de helling in een bepaald punt berekent.  
  
**Stelling 1**  
Gegeven is de kromme .   
De helling (van de raaklijn) in het punt van met parameterwaarde is gelijk aan .

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs**  We nemen het punt op   behorend bij de parameterwaarde en we  willen de helling in bepalen.  Daartoe nemen we een tweede punt  op behorend bij de  parameterwaarde . Als erg klein is,   dan is de helling van de lijn door en bij  benadering de helling in .   De helling van is gelijk aan   .  De helling in is gelijk aan:     . |  |

**Opmerkingen**  
1) Gebruikt is dat voor een willekeurige functie geldt: .  
 Dit is juist de definitie van de afgeleide.  
2) Aangenomen is dat . Dan nadert tot , dus zal zeker gelden dat  
 en daarom ook , als voldoende dicht bij ligt.  
 Derhalve bestaat de breuk (d.w.z. noemer ), als voldoende dicht bij ligt.  
  
**Stelling 2**  
Gegeven is de kromme , die geen punten bevat met   
.  
a) De punten van waarvoor de raaklijn **horizontaal** is worden gevonden door op te lossen  
 .  
b) De punten van waarvoor de raaklijn **verticaal** is worden gevonden door op te lossen  
 .  
  
**Bewijs**  
Volgens stelling 1 geldt dat (\*) voor de punten van .  
  
a) De raaklijn is precies dan horizontaal als en dit is volgens (\*) gelijkwaardig met  
 .  
b) De raaklijn in een punt van is precies dan verticaal is als de helling van de raaklijn niet  
 bestaat. Dit is volgens (\*) gelijkwaardig met de uitspraak dat voor de waarde behorende bij   
 de breuk niet bestaat, hetgeen weer gelijkwaardig is met .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 1** Gegeven is de parameterkromme . a) Bepaal het punt van waar de raaklijn  horizontaal is. b) Bepaal de punten van waar de raaklijn  verticaal is. c) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan   in het punt   **Oplossing** Stel en . |  |
| a) Op te lossen , , . Hierbij hoort het punt op .  b) We moeten oplossen: , , .  geeft het punt op ; geeft het punt op . c) We berekenen de waarde die bij punt behoort. Er moet gelden dat  , dus .  Dit geeft . De helling van is volgens stelling 1 gelijk aan .  De vergelijking van is daarom , oftewel . | |

**Definitie**Gegeven is de kromme . Stel dat en een extreme waarde hebben voor  
. Dan heet het punt een **keerpunt** van .

**Voorbeeld 2**Gegeven is de kromme beschreven door .  
a) Toon aan dat een keerpunt bevat.  
b) Bepaal de helling van in het keerpunt.

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing** a) Stel en .  Er geldt dat  en . Hieruit blijkt direct zowel als een extreme waarde heeft voor , dus heeft een keerpunt voor  . Het keerpunt is .  b) De helling in een willekeurig punt van is . Voor bestaat deze uitdrukking niet, maar voor  geldt er dat . |  |

De helling in het keerpunt is gelijk aan .  
   
**Voorbeeld 3**  
Gegeven is de kromme met parametervoorstelling  
, met .  
Bepaal de keerpunten van .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  Stel en .  Dan geldt er dat  en   .  De gemeenschappelijke nulpunten van en   zijn de getallen ( geheel) en in deze  punten hebben en een tekenwisseling.  en hebben dus een extreme waarde voor de  parameterwaarden en .  Dit geeft de vier keerpunten  , en . |  |