**Oppervlakte en inhoud met behulp van integreren**We beschouwen eerst het bepalen van de oppervlakte van een gebied met behulp van integreren.   
  
Het gebied (= vlakdeel) wordt ingesloten de grafiek van , de -as en de lijnen en .   
Er geldt hier dat , voor . Zie de figuur hieronder.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **waarbij** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 1** Gegeven is de functie .  Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van ,  de -as en de lijnen en . Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 2** Gegeven is de functie . Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van , de -as en de lijn . Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** .   . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 3** Gegeven is de functie . Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van ,  de -as en de lijnen en . Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing**     . |  |

Soms wordt het ingesloten gebied begrensd door de grafieken van meerdere functies.  
Een eerste variant hiervan zien we in de figuur hieronder.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Voor wordt het gebied ingesloten door de lijnen en , door de grafiek van en de -as. Voor wordt het gebied ingesloten door de lijnen en , door de grafiek van en de -as.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 4** Gegeven zijn de functies   en . Het gebied wordt ingesloten door de -as, de grafieken van en de lijnen en .  Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** De grafieken van en snijden elkaar bij , |  |

want uit volgt dat , , .  
.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 5** Gegeven is de functie  . Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van , de -as en de lijnen en . Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** Een functie waarin absolute-waarde tekens voorkomen kunnen we niet primitiveren, dus herschrijven we het voorschrift van . |  |

Er geldt dat .   
Hieruit volgt dat  
   
   
   
 .  
   
In sommige speciale situaties kan men de oppervlakte van het gebied handiger uitrekenen dan m.b.v. de standaardmethode.

|  |  |
| --- | --- |
| Stel dat een lineaire functie is, dus   voor zekere constanten en .  is het gebied ingesloten door de grafiek van ,  de -as en de lijnen en . We stellen nog  en . Het gebied is een trapezium met bases   en en hoogte . M.b.v. de bekende formule voor de oppervlakte van een trapezium volgt er dat |  |

, of anders uitgedrukt:   
.   
Dit is ook explicieter schrijven als  
. Deze tweede formule is echter minder compact.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 6** Gegeven is de functie .  is het gebied ingesloten door de grafiek van , de -as en de lijnen en . Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** We geven twee methoden. **Methode 1** |  |

.  
**Methode 2**  
 is een trapezium met bases en en hoogte , dus de oppervlakte van is gelijk aan   
.  
  
We bekijken nu de oppervlakte van een recht paraboolsegment.

|  |  |
| --- | --- |
| Van een parabool wordt een stuk afgesneden.  In de figuur hiernaast staat de lijn loodrecht op de symmetrie-as van de parabool. De lijn raakt de parabool in de top en is een rechthoek. Dan geldt de **regel van Archimedes**: .  Deze regel is door Archimedes gevonden ongeveer 2000 jaar voordat de integraalrekening was ontwikkeld! heet de *omgeschreven rechthoek* van het paraboolsegment . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 7** Gegeven is de functie . Het gebied wordt ingesloten door de -as, de grafiek van en de lijnen en .  Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** De nulpunten van zijn en . We geven twee methoden. **Methode 1** |  |

.  
**Methode 2**  
 (regel van Archimedes).

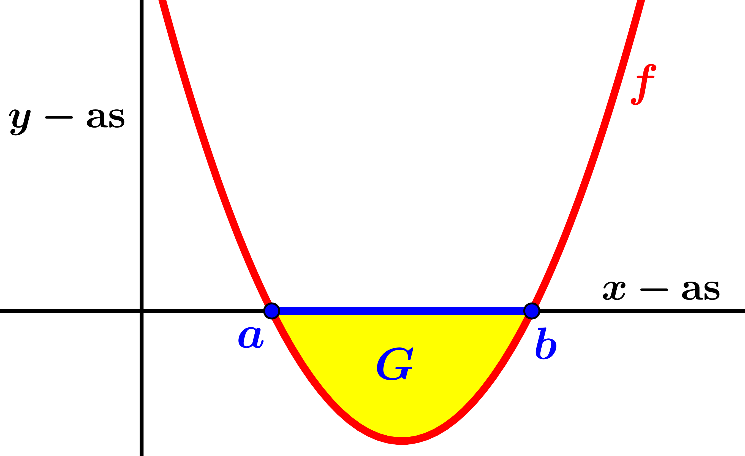
|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 8** Gegeven is de functie . Het gebied wordt ingesloten door de -as, de grafiek van en de lijn . Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** We geven twee methoden. **Methode 1** |  |

.  
**Methode 2**De grafiek van de wortel van een eerstegraadsfunctie is een halve gedraaide parabool, dus we kunnen de regel van Archimedes toepassen op het halve rechte paraboolsegment.  
De omgeschreven rechthoek van heeft breedte en hoogte . Er volgt dat  
 .  
  
Soms kan men gebruikmaken van **symmetrie** om het rekenwerk te bekorten.

|  |  |
| --- | --- |
| Zie de figuur hiernaast.  De grafiek van is symmetrisch t.o.v. de lijn . Verder is een willekeurig positief getal. Het gebied wordt ingesloten door de -as, de grafiek van en de lijnen  en .  Het gebied wordt ingesloten door de |  |

-as, de grafiek van en de lijnen en .  
Dan geldt vanwege de symmetrie dat , dus .  
Dit is gelijkwaardig met .  
Deze regel is met name handig als de grafiek van symmetrisch is t.o.v. de -as (dus als ).  
Dan krijgen we: .  
Het is vrijwel altijd gemakkelijker om in de primitieve in te vullen dan .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 9** Gegeven is de functie . Het gebied wordt ingesloten door de -as, de grafiek van en de lijnen en .  Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** De grafiek van is symmetrisch t.o.v. de -as, want |  |

, voor alle waarden van . Er volgt dat  
   
.   
  
We bekijken nu het geval dat het gebied onder de -as ligt. Zie de figuur hieronder.  
****  
Dan geldt er dat: .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 10** Gegeven is de functie .  Het gebied wordt ingesloten door de -as, de grafiek van en de lijnen en .  Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** Het gebied ligt onder de -as, dus |  |

.  
  
We beschouwen nu de situatie waarbij het gebied ingesloten wordt door de grafieken van twee functies en eventueel een of twee verticale lijnen. Het gebied wordt ingesloten de grafiek van , de -as en de lijnen en . Er geldt hier dat , voor .   
Zie de figuur hieronder.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Deze formule blijft juist als (een gedeelte van) onder de as ligt. | |
| **Voorbeeld 11** Gegeven zijn de functies en  Het gebied wordt ingesloten door de grafieken van en en de lijnen en .  Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** | |  |

.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 12** Gegeven zijn de functies  en . Het gebied wordt ingesloten door de grafieken van en . Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** Eenvoudig blijkt (algebraïsch) dat de grafieken van en elkaar snijden voor en . |  |

.   
Soms is het handiger om het gebied vanuit de -as te bezien. Zie de onderstaande figuur.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van ,  de -as en de lijnen en . Uit lossen we op. Dit geeft .  is de inverse functie van .  Dan geldt dat  , **waarbij** | |
| **Voorbeeld 13** Gegeven is functie . Het gebied wordt ingesloten door de  -as, de grafiek van en de lijn . Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** | |  |

We geven twee methoden.  
**Methode 1**  
 geeft , dus .  
   
.  
**Methode 2**  
Uit volgt dat .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 14** Gegeven zijn de functies  en . Het gebied wordt ingesloten door de lijn en de grafieken van en .  Bereken de exacte oppervlakte van . **Oplossing** De beide grafiekensnijden elkaar in het punt . |  |

We geven twee methoden.  
**Methode 1** geeft en geeft .  
   
   
.  
**Methode 2** geeft en geeft .  
   
.   
  
Soms sluiten de grafieken van twee functies meerdere gebieden in.  
Zie de onderstaande figuur. De grafieken van en sluiten vier gebieden in.

|  |  |
| --- | --- |
|  | is het totale ingesloten gebied. Indien numeriek bepaald mag worden, dan geldt dat   Indien m.b.v. primitiveren bepaald moeten worden, dan geldt dat |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 15** Gegeven zijn de functies  en .  en zijn de twee gebieden ingesloten door de grafieken van  en . Bepaal in drie decimalen nauwkeurig de som van de oppervlakten van deze gebieden. |  |

**Oplossing**M.b.v. een GR vinden we de aangegeven benaderingen van de -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van en . Er volgt dat .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 16** Gegeven is de functie  Het gebied wordt ingesloten door de -as,  de grafiek van en de lijn . De lijn verdeelt in twee vlakdelen met gelijke oppervlakte. Bereken de exacte waarde van . **Oplossing**    (of iets sneller, m.b.v. de regel van Archimedes: ). |  |

Er moet nu gelden dat , , ,   
, , dus .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 17** Gegeven zijn de functies en  . De grafieken van en snijden elkaar bij en . De grafieken van en sluiten een gebied in. De lijn verdeelt in twee vlakdelen met gelijke oppervlakte. a) Bereken de exacte oppervlakte van . b) Bereken in twee decimalen nauwkeurig. **Oplossing** a) |  |

.  
b) We moeten oplossen uit ,   
Dit is te herleiden tot ,   
, dus   
 . Deze vergelijking is niet algebraïsch op te lossen.  
We gebruiken daarom de GR. In het grafiekenmenu voeren we in:  
 en .Plotten van de grafieken van deze functies en vervolgens de snijpunten laten uitrekenen geeft: (waarbij gebruikt is dat .   
  
We beschouwen nu **omwentelingslichamen**. Deze ontstaan door een vlakdeel te wentelen om een lijn. Je krijgt dan een ruimtelijk lichaam. We willen m.b.v. integraalrekening de inhoud van zo’n omwentelingslichaam bepalen. De basisvorm staat in de onderstaande figuur.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Het gebied wentelen we om de -as Met , of korter , geven we de inhoud van het omwentelingslichaam aan. Dan geldt er dat:  . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 18** Gegeven is de functie . Het vlakdeel wordt ingesloten door de grafiek van , de -as en de lijnen en . Bereken exact. **Oplossing** |  |

.  
  
Laat nu een gebied zijn ingesloten door de grafieken van en en de lijnen en , waarbij , voor . Dit gebied wordt gewenteld om de -as. Zie de figuur hieronder.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
| **Voorbeeld 19** Gegeven zijn de functies en . Het gebied wordt ingesloten door de grafieken van en en de lijnen en .   wordt gewenteld om de -as. Bereken exact. **Oplossing** | |  |

.  
  
Het ingesloten gebied door de grafieken van twee functies (en eventueel twee verticale lijnen) kan ook onder de -as liggen. Zie de onderstaande figuur.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Er geldt hier dat ingesloten wordt door de grafieken van en en de lijnen en , waarbij , voor . Dan geldt er dat . Immers de grafiek van vormt de buitenste rand van het omwentelingslichaam, als wentelt om  de -as. |

De twee situaties (gebied boven de -as en gebeid onder de -as) kan men aldus samenvatten:  
.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 20** Gegeven zijn de functies  en . Het gebied wordt ingesloten door de grafieken van en .  wordt gewenteld om de -as. Bereken exact. **Oplossing**  geeft , ,  . |  |

.   
  
We bekijken nu een voorbeeld van de meer gecompliceerde situatie dat een deel van het gebied *boven* en een deel *onder* de -as ligt.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 21** Gegeven zijn de functies  en  . Het gebied wordt ingesloten door de grafieken van en .  wordt gewenteld om de -as. Bereken exact. **Oplossing**  geeft  , |  |

. Verder volgt uit dat . Als we wentelen om de -as, dan moet helder zijn wat de buitenste rand van het omwentelingslichaam vormt. Om dit goed te zien spiegelen we de grafiek van in de -as. Dit geeft de grafiek van een nieuwe functie .   
Er geldt dat . Uit volgt dat , . Nu is het volgende duidelijk:   
bij het wentelen van om de -as vormt de grafiek van de buitenste rand als en vormt de grafiek van de buitenste rand als . Er volgt dat  
   
   
   
   
 .  
  
Het kan zijn dat we een gebied wentelen om een horizontale lijn die niet samenvalt met de -as.  
Zie de onderstaande figuur.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van en de lijnen , en . Dan geldt er dat .  We kunnen namelijk de translatie ) toepassen. Hierdoor gaat de lijn over in de -as en de functie gaat over in de functie . Het verschoven gebied wordt ingesloten door de grafiek van de -as en |

de lijnen en . We krijgen dan:

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 22** Gegeven is de functie . Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van en de lijnen , en . Bereken exact. **Oplossing** |  |

Bij een wenteling om de -as is de hebben we gezien de formule:  
 .   
Door de rollen van en te verwisselen komen we dan tot een formule voor de inhoud van een omwentelingslichaam bij het wentelen om de -as. Zie de onderstaande figuur.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van ,  de -as en de lijnen en . Uit lossen we op. Dit geeft .  is de inverse functie van .  wordt om de -as gewenteld. Dan geldt dat ,. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 23** Gegeven is functie . Het gebied wordt ingesloten door de  -as, de grafiek van en de lijn .  wordt gewenteld om de -as. Bereken exact. **Oplossing** |  |

Uit volgt dat . Dit leidt tot  
   
   
  
Nu de situatie met het gebied ingesloten door twee grafieken en eventueel twee horizontale lijnen.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Immers, vanuit de -as gezien, vormt de grafiek van de ‘buitenste grafiek’ bij het wentelen om de -as. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 24** Gegeven zijn de functies  en  De grafieken van en sluiten het gebied in en snijden elkaar in de punten en .  wordt gewenteld om de -as. Bereken exact. **Oplossing** Uit volgt dat  (want hier ). |  |

Uit volgt dat . Er volgt dat  
   
   
.   
  
We bekijken nu het wentelen van een gebied om een verticale lijn die niet samenvalt met de -as.  
Zie de onderstaande linker figuur.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van en de lijnen , en .  
 wordt gewenteld om de lijn . Dan geldt er dat  
   
Dit is te begrijpen door de translatie uit te voeren. gaat dan over in de functie gegeven door en het gebied gaat dan over in een gebied We moeten dan wentelen om de -as. Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van en de lijnen , en de -as.  
Zie de bovenstaande rechter figuur.   
Uit volgt dat , dus . Dit impliceert dat  
.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 25** Gegeven is de functie . Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van en de lijnen , en . wordt gewenteld om de lijn . Bereken exact. **Oplossing** Uit volgt dat . Dit geeft: |  |

.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 26** Gegeven zijn de functies  en .  De grafieken van en snijden elkaar in de punten en en ze sluiten het gebied in.   wordt gewenteld om de lijn . Bereken exact. **Oplossing** Uit volgt dat |  |

en uit volgt dat . Dit geeft:  
   
   
   
   
.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 27** Bereken de inhoud van een bol met straal . **Oplossing** We krijgen een bol met straal als we een halve cirkelschrijf met straal wentelen om haar middellijn. Daarom introduceren we de functie  Als we stellen  dan volgt er dat en |  |

, dus . De grafiek van stelt daarom de bovenste helft van de cirkel voor met middelpunt en straal . Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van en de -as.  
De grafiek van is symmetrisch t.o.v. de -as, immers .  
   
Er volgt dat  
   
(vanwege de symmetrie) .  
  
We hebben dus gevonden: .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 28** Bepaal de inhoud van een kegel met hoogte waarvan de straal van het grondvlak gelijk is aan . **Oplossing** Beschouw de functie . Het gebied wordt ingesloten door de grafiek van , de -as en de lijn . We merken op dat . Door te wentelen om de |  |

-as ontstaat een kegel met hoogte waarvan de straal van het grondvlak gelijk is aan . Dit geeft  
   
.  
We herkennen als de oppervlakte van het grondvlak van de kegel, dus hebben we gevonden:  
  
.