**Lineaire afbeeldingen**Een lineaire afbeelding in het platte vlak is een afbeelding die aan elke vector een andere vector  
 in het platte vlak toevoegt, waarbij voldaan is aan de volgende twee eigenschappen:  
1) , voor elke tweetal vectoren en .  
2) , voor elke vector en elk reëel getal .  
Een simpel gevolg is dat (de nulvector wordt op zichzelf afgebeeld).   
Een afbeelding die *niet* op zichzelf afbeeldt, kan dus zeker niet lineair zijn.  
Een lineaire afbeelding ligt vast als de beelden van de vectoren en bekend zijn.  
Stel namelijk dat en , dan volgt dat   
 (volgens eigenschap 1)  
 (volgens eigenschap 2) .  
We hebben daarom gevonden dat (matrixproduct), waarbij .  
 heet de matrix die hoort bij de lineaire afbeelding .  
De twee kolommen van zijn de beelden van de eenheidsvectoren en .  
  
Analoog kunnen we lineaire afbeeldingen in de ruimte definiëren.   
Deze voldoen weer aan de eigenschappen 1) en 2). Een lineaire afbeelding ligt vast als de beelden van de vectoren , en bekend zijn.   
Stel namelijk dat , en , dan volgt dat  
   
   
. We hebben daarom gevonden dat , waarbij .  
De drie kolommen van zijn de beelden van de eenheidsvectoren , en .  
  
Er zijn zeer algemene lineaire afbeeldingen mogelijk, waarover een uitgebreide theorie bestaat.  
Wij bekijken voornamelijk lineaire afbeeldingen die een meetkundige bewerking voorstellen, zoals rotaties, spiegelingen en loodrechte projecties. Dat ze inderdaad lineair zijn, zullen we niet bewijzen. **A) Voorbeelden van lineaire afbeeldingen in het platte vlak**Een lineaire afbeelding in het platte vlak ligt, zoals we gezien hebben, vast indien de beelden van de vectoren en bekend zijn. Maar het is ook mogelijk dat de beelden van twee andere vectoren en gegeven zijn. Ligt dan ook vast?   
De theorie (waarop we hier niet verder zullen ingaan) leert dat (dus ook de bijbehorende matrix ) vastligt door de beelden van en als en niet op dezelfde lijn door de oorsprong liggen, d.w.z.  
 kun je niet krijgen door met een bepaald getal te vermenigvuldigen. De officiële uitdrukking hiervoor is dat en **lineair onafhankelijk** zijn. Dit blijkt gelijkwaardig te zijn met de voorwaarde dat determinant van de matrix ongelijk is aan . De matrix heeft dan een inverse matrix .  
We zullen nu aangeven hoe in dit geval bepaald kan worden.   
Stel dat en en dat en . Er geldt dan dat  
 en .  
Deze twee laatste betrekkingen zijn te combineren tot één matrixvergelijking:  
.   
Door beide leden aan de rechterkant met te vermenigvuldigen, krijgen we  
, ,  
dus . We vatten samen wat we gevonden hebben.  
  
**Stelling 1**  
Stel dat een een lineaire afbeelding is van naar die afbeeldt op en afbeeldt op .  
Hierbij is aangenomen dat de vectoren en lineair onafhankelijk zijn, dus dat bestaat.  
Voor de matrix die hoort bij geldt dan dat  
.  
   
**Voorbeeld 1**  
Van de lineaire afbeelding is gegeven dat en , waarbij   
 en . Bepaal de matrix die hoort bij .  
  
**Oplossing  
Methode 1** (de snelste methode)  
We merken op dat , dus bestaat.   
Toepassen van stelling 1 geeft dat  
.   
  
**Methode 2** (met stelsels vergelijkingen)  
Stel   
De betrekkingen en leiden tot de stelsels vergelijkingen  
 en .   
We herschrijven dit als twee stelsels van elk twee vergelijkingen met twee onbekenden:  
 en .  
Uit (2) volgt . Dit substitueren in (1) geeft: , , dus .  
Uit (4) volgt . Dit substitueren in (3) geeft: , , dus   
Hiermee is gevonden dat .  
  
**Methode 3** (met behulp van ‘vegen’)  
Hierbij gebruiken we de ‘veegmethode’. De gegeven betrekkingen zetten we in een matrix  
. In de eerste twee kolommen staan de kentallen van en , en in de laatste twee kolommen staan de kentallen van de bijbehorende beeldvectoren. is door de verticale streep verdeeld in twee helften. We gaan nu drie typen kolomoperaties op de kolommen van uitvoeren:  
1) een kolom met een getal vermenigvuldigen;  
2) een veelvoud van een kolom optellen bij een andere kolom in dezelfde helft van ;  
3) twee kolommen in dezelfde helft verwisselen.  
Hierbij moet elke operatie in de linkerhelft van gekopieerd worden in de rechterhelft (de eerste kolom correspondeert met de derde kolom en de tweede kolom correspondeert met de vierde kolom).  
Door het lineaire karakter van geldt in elke fase van het proces dat de derde kolom (opgevat als vector) het beeld is van de eerste kolom en de vierde kolom het beeld is van de tweede kolom  
We kiezen de operaties zó dat we eindigen met de vorm . Dan is het beeld van  
 en het beeld van . Hieruit volgt dat . Niet elk van de drie mogelijke kolomoperaties hoeven bij een specifieke matrix toegepast te worden. Het uitvoeren van een kolomoperatie (‘veegoperatie’) geven we aan met en de -de kolom noteren we als (.  
  
   
  
   
  
 . Hiermee is gevonden dat .  
  
Met bijvoorbeeld de notatie bedoelen we: bij de eerste kolom tellen we maal   
de tweede kolom op en het resultaat wordt de nieuwe eerste kolom.  
  
**Opmerking**Als we een grafische rekenmachine mogen gebruiken, dan hoeven we niet apart uit te rekenen. We kunnen gewoon intikken en de GR geeft direct het antwoord.

|  |  |
| --- | --- |
| **A1) Rotatie rondom .** De matrix stelt een rotatie voor rondom de oorsprong over de hoek (tegen de wijzers van de klok als en met de wijzers van de klok als ). Dan wordt afgebeeld op en wordt afgebeeld op .   Hieruit blijkt dat . |  |

Enkele speciale gevallen:  
I) (kwartslag linksom draaien; dan , dus .  
  
II) (kwartslag rechtsom draaien; dan , dus .  
  
III) ; dan , dus .  
IV) ; dan , dus .  
  
V) ; dan , dus .  
  
VI) ; dan , dus .

|  |  |
| --- | --- |
| **A2) Spiegeling in een lijn door** .  is de matrix die hoort bij de spiegeling in de lijn . Bij deze spiegeling wordt afgebeeld op en wordt afgebeeld op . Met behulp van stelling 1 volgt dat     , dus  . |  |

Hierbij is gebruikt dat, aangenomen dat .   
 **Voorbeeld 2**  
De lineaire afbeelding is de spiegeling in de lijn .  
Bepaal de matrix die hoort bij .  
**Oplossing**  
We zullen niet de hierboven gevonden algemene formule toepassen (die wat lastig te memoriseren is),  
maar het probleem voor deze concrete situatie rechtstreeks oplossen.  
Bij het toepassen van geldt dat en .  
(omdat een richtingsvector is van en een normaalvector).  
Gelet op stelling 1 volgt er dat .  
  
We vermelden enkele speciale spiegelingen.  
I) (spiegelen in de lijn ; dan , dus   
II) (spiegelen in de lijn ; dan , dus   
III) (spiegelen in de -as ; dan , dus   
IV) , d.w.z. tot laten naderen; dan nadert naar en nadert naar 0.  
 Dit correspondeert met een spiegeling in de -as. , dus .  
  
De elementen van de matrix die hoort bij de spiegeling in de lijn zijn weer te geven in een goniometrische vorm.  
Laat de hoek (in graden) zijn die met de positieve -as maakt, waarbij .  
Dan geldt dat . Er volgt dat

|  |  |
| --- | --- |
| en    . |  |

Hierdoor gaat de matrix over in: .   
  
Deze formule is ook op een meer meetkundige manier af te leiden.  
We zullen het geval bekijken dat (de andere gevallen verlopen analoog, met kleine aanpassingen). Stel , , en .   
De vectoren en zijn de kolommen van de matrix .  
De hoek tussen en is gelijk aan , dus de hoek tussen en is ook gelijk aan .  
Hieruit volgt direct dat .

|  |  |
| --- | --- |
| De hoek tussen en is gelijk aan , dus is ook de hoek tussen en gelijk aan .  De hoek tussen en de -as is gelijk aan . Dit geeft:    .  Hiermee is de formule van nogmaals   afgeleid. |  |

**A3) Loodrechte projectie op een lijn door de oorsprong**

|  |  |
| --- | --- |
| is de matrix die hoort bij loodrechte projectie op de lijn . Bij deze loodrechte projectie wordt   afgebeeld op en afgebeeld op . Toepassen van stelling 1 geeft  , dus  . |  |

**Voorbeeld 3**De lineaire afbeelding is de loodrechte projectie op de lijn .  
Bepaal de matrix die hoort bij .  
**Oplossing**We zullen niet de hierboven gevonden algemene formule toepassen, maar het probleem voor deze concrete situatie rechtstreeks oplossen.  
Bij het toepassen van geldt dat en .  
(omdat een richtingsvector is van en een normaalvector).  
Gelet op stelling 1 volgt er dat .  
We kunnen lineaire afbeeldingen na elkaar uitvoeren.   
Stel dat we eerst de lineaire afbeelding uitvoeren en daarna de lineaire afbeelding (beide in ).  
Het resultaat heet de **samenstelling** van en (in deze volgorde) en wordt genoteerd als .  
 blijkt weer een lineaire afbeelding te zijn (eenvoudig te bewijzen), die we zullen aangeven met .  
 is de matrix behorend bij , is de matrix bij en is de matrix bij .  
 beeldt af op de vector en deze vector wordt vervolgens door afgebeeld op   
de vector . Dit leert dat .   
Analoog blijkt dat . De conclusie is dat voor de matrix van   
Ook geldt natuurlijk dat en . Er volgt dat  
 (dus en hebben dezelfde eerste kolom) en  
 (dus en hebben dezelfde tweede kolom).  
We kunnen hieruit concluderen dat . Het gevonden resultaat leggen we vast.  
  
**Stelling 2**  
Stel dat de lineaire afbeelding de de samenstelling van de lineaire afbeeldingen en   
(in deze volgorde), dus .  
 is de matrix behorend bij , is de matrix bij en is de matrix bij , Dan geldt:  
.  
   
**Opmerking**  
Natuurlijk kan men ook meer dan twee lineaire afbeeldingen samenstellen.  
De matrix die hoort bij deze samenstelling is het product van de matrices van de afzonderlijke afbeeldingen. De volgorde van vermenigvuldigen is als volgt:  
rechts komt de matrix behorend bij de eerste lineaire afbeelding;  
links hiervan de matrix behorend bij de tweede lineaire afbeelding;  
hier weer links van de matrix behorend bij de derde lineaire afbeelding; enzovoorts. **Voorbeeld 4.**  
Voer de volgende lineaire afbeeldingen uit:  
: spiegeling in de lijn , gevolgd door  
 rotatie rondom de oorsprong (in tegenwijzerzin) over .  
Bepaal de matrix die hoort bij deze samenstelling.  
**Oplossing**  
De matrix die hoort bij is (zie pag. 6).  
De matrix die hoort bij is (zie pag. 5).  
Met behulp van stelling 2 volgt dat  
 .  
 **Voorbeeld 5**  
Bepaal de matrix die hoort bij de vermenigvuldiging V t.o.v. de lijn ( met factor .  
**Oplossing**V blijkt een lineaire afbeelding te zijn (dit zullen we niet bewijzen). We merken op dat V   
 en (want ligt op en staat loodrecht op ).  
Toepassen van stelling 1 geeft dat   
, dus   
  
**.**   
  
**Voorbeeld 6**  
Bepaal de matrix die hoort bij de vermenigvuldiging V t.o.v. de lijn ( met factor .  
**Oplossing**We passen niet het algemene resultaat van voorbeeld 5 toe, maar lossen het probleem rechtstreeks op.  
V beeldt af op (want ligt op ) en af op (want .  
Toepassen van stelling 1 geeft dat .  
  
  
**B) Voorbeelden van lineaire afbeeldingen in de ruimte**  
  
Een lineaire afbeelding ligt vast indien de beelden van , en bekend zijn.  
Het kan ook zijn dat de beelden van de drie vectoren van , en bekend zijn.  
De theorie leert dat vastligt indien en niet in één vlak liggen. De officiële uitdrukking hiervoor is dat en **lineair onafhankelijk** zijn. Dit blijkt gelijkwaardig te zijn met het feit dat . In dit geval heeft een inverse matrix We zullen de bijbehorende matrix  
 bepalen. Stel dat , en .   
Deze drie betrekkingen zijn te schrijven als  
, en .  
Een nog bondiger weergave hiervoor is de enkele matrixbetrekking:   
 Hieruit volgt:  
 .  
  
Dit resultaat leggen we vast.  
  
**Stelling 3**  
Stel dat een een lineaire afbeelding is van naar die afbeeldt op , afbeeldt op en afbeeldt op . Hierbij is aangenomen dat de vectoren , en lineair onafhankelijk zijn, dus dat bestaat. Voor de matrix die hoort bij geldt dan dat  
  
 .

**Voorbeeld 7**  
Voor een lineaire afbeelding geldt dat , en .  
Bepaal de matrix die hoort bij .  
**Oplossing**We merken op dat , dus bestaat.   
Toepassen van stelling 3 geeft:.  
  
We bekijken nu lineaire afbeeldingen in de ruimte die een meetkundige bewerking voorstellen.  
  
**B1) Rotatie rondom een coördinaatas**We beschouwen een rotatie rondom de -as over de hoek (in tegenwijzerzin).  
Dan wordt afgebeeld op , op en op .  
  
(zie A1 voor een motivatie van de beelden van en ).  
De matrix behorend bij deze rotatie is daarom .  
  
Duidelijk is hoe de matrix wordt bij een rotatie over de hoek om een andere coördinaatas:  
rotatie om de -as geeft ;  
  
rotatie om de -as geeft .  
  
**B2) Loodrechte projectie op een vlak door de oorsprong**Laat het vlak zijn door de oorsprong waarop we loodrecht gaan projecteren.  
De vergelijking is van de vorm . Hierbij is een normaalvector van .

|  |  |
| --- | --- |
| is de loodrechte projectie op . We kiezen nu twee vectoren en in zodanig dat , en lineair onafhankelijk zijn.  Dan moeten en loodrecht staan op , dus  (het inproduct van en en ook van en moet gelijk zijn aan nul). |  |

De vectoren en kunnen op talloze manieren gekozen worden. Een manier die altijd lukt staat in het volgende schema. In de laatste kolom staat de determinant van de matrix met de opeenvolgende kolommen , en .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Geval |  |  | determinant |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Merk op dat in beide gevallen de determinant ongelijk aan is, dus , en zijn lineair onafhankelijk.  
De vectoren en zijn gerelateerd aan het uitwendig product. Er geldt namelijk dat  
 in het geval dat , terwijl er in het geval geldt dat   
 en . We stellen en .   
Er geldt dat het volgende effect heeft: , en .  
Toepassen van stelling 3 leert dat de matrix van voldoet aan  
.   
M.b.v. wiskundige software blijkt dat deze laatste formule voor beide gevallen van de tabel overgaat in  
  
.   
  
Als lengte 1 heeft, dus , dan gaat de laatste formule over in  
  
.  
  
Deze formule is te herschrijven als  
  
 **, waarbij**  **en** . (1)Dit kan ook rechtstreeks afgeleid worden. Voor een bewijs, zie de Appendix.

**Voorbeeld 8**  
Gegeven is het vlak met vergelijking . is de loodrechte projectie op .  
Bepaal de matrix die hoort bij .  
**Oplossing**  
 is een normaalvector van . We kiezen de vectoren en in .  
Omdat , en (beelden van ), volgt m.b.v. stelling 3 dat  
.  
  
**Andere methode**  
 is een normaalvector van met lengte 1, dus .  
M.b.v. (1) volgt dat .  
  
**Voorbeeld 9**  
Gegeven is het vlak door de punten , en .  
a) Bepaal de matrix die hoort bij de loodrechte projectie op .  
b) Bepaal het beeld van bij de loodrechte projectie op het vlak .

**Oplossing**  
Een normaalvector van is   
, waarbij natuurlijk ook een normaalvector van is. We kiezen de vectoren en in .  
Omdat , en (beelden van de spiegeling ), volgt m.b.v. stelling 3 dat  
.  
  
**Andere methode**  
 is een normaalvector van met lengte 1, dus .  
Er volgt dat .  
b) We vinden m.b.v. a) dat het beeld van gelijk is aan  
 .   
Het beeld van is daarom het punt .   
  
**B3) Spiegeling in een vlak door de oorsprong**Laat het vlak door de oorsprong zijn waarin we spiegelen.

|  |  |
| --- | --- |
| De vergelijking is van de vorm  . Hierbij is   een normaalvector van .   is de loodrechte projectie op .   We kiezen nu, zoals in B2), twee vectoren   en in zodanig dat , en lineair   onafhankelijk zijn. |  |

Zoals in B2) kunnen we en kiezen volgens het schema:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Geval |  |  | determinant |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

We stellen en . Er geldt dat het volgende effect heeft: , en .  
Toepassen van stelling 3 leert dat de matrix van voldoet aan  
.  
M.b.v. wiskundige software blijkt dat deze laatste formule voor beide gevallen van de tabel overgaat in  
.  
  
Als lengte 1 heeft, dan gaat de laatste formule over in  
  
.  
  
Deze formule is te herschrijven als  
 **, waarbij**  **en** . (2)  
Dit kan ook rechtstreeks afgeleid worden. Voor een bewijs, zie de Appendix.

**Voorbeeld 10**  
Gegeven is het vlak .  
a) Bepaal de matrix die hoort bij de spiegeling in het vlak .  
b) Bepaal het beeld van bij de spiegeling in het vlak .

**Oplossing**a) is een normaalvector van . Verder zijn en vectoren in .  
We merken op dat , en lineair onafhankelijk zijn, want .  
Bij de spiegeling in het vlak geldt dat , en . Er volgt dat  
  
.   
b) Het beeld van is ,   
  
dus het beeld van is .  
  
**B4) Rotatie rondom een lijn door de oorsprong**We roteren rondom de lijn door de oorsprong over de hoek . Laat een richtingsvector   
van zijn. We mogen en zullen aannemen dat lengte 1 heeft, d.w.z. .  
Voor de matrix die hoort bij de rotatie rondom over de hoek geldt de betrekking:  
**,** (3)  **waarbij**  **en** .  
  
Voor een bewijs, zie de Appendix.  
  
**Voorbeeld 11**  
Gegeven is de lijn .  
Bepaal de matrix die hoort bij de rotatie rondom over .  
**Oplossing**  
Een richtingsvector van met lengte 1 is . Dit geeft en  
 . Verder geldt dat en .   
Dit alles leidt door toepassing van de bovenstaande formule tot:   
   
 ∙ ∙ .  
  
Voor in (3) krijgen we . (4)  
   
Als we nemen in (3), dan krijgen we de matrix die **spiegeling in de lijn door**  voorstelt:  
. (5)   
De matrix die hoort bij de **loodrechte projectie op de lijn door**  vinden we m.b.v. (5):  
voor elke vector geldt:   
, dus   
 . (6)  
  
De matrices die we bij B1) gevonden hebben zijn een speciaal geval van matrix in (3).   
Neem bijvoorbeeld (rotatie om de -as), dus , en .  
Dan reduceert de bovenstaande matrix tot .  
  
Een eenvoudige lineaire afbeelding is de **vermenigvuldiging t.o.v. de oorsprong met de factor** .  
De bijbehorende matrix is .

We kunnen natuurlijk allerlei lineaire afbeeldingen samenstellen.  
Stelling 2, die afgeleid was voor lineaire afbeeldingen in , geldt ook voor lineaire afbeeldingen in   
Het bewijs verloopt analoog.  
  
**Voorbeeld 12**  
Bepaal de matrix die hoort bij de samenstelling van de volgende drie lineaire afbeeldingen  
 : spiegeling in het vlak ;  
 : rotatie rondom de lijn over een hoek van ;  
 loodrechte projectie op het vlak .  
**Oplossing**  
De matrices behorend bij de afbeeldingen , en noemen we , en .  
Een normaalvector van is en twee vectoren in zijn en .   
De vectoren , en zijn lineair onafhankelijk, want .   
Bij het toepassen van geldt dat , en . Er volgt dat  
  
.  
  
 is een richtingsvector van , terwijl en twee vectoren loodrecht op zijn.  
, en zijn lineair onafhankelijk, want .   
Bij het toepassen van geldt dat , en . Er volgt dat  
  
.   
  
Een normaalvector van is en twee vectoren in zijn en .  
, en zijn lineair onafhankelijk, want .  
Bij het toepassen van geldt dat , en . Er volgt dat  
.   
  
We vinden daarom dat  
.   
  
**Andere methode**  
Hierbij maken we gebruik van de -matrices die bij de afbeeldingen behoren.  
 is een normaalvector van met lengte 1; de bijbehorende -matrix is  
. Dit geeft, vanwege (2):  
.  
  
 is een richtingsvector van met lengte 1;   
de bijbehorende -matrix is . Dit geeft, vanwege (5):  
  
.  
  
 is een normaalvector van met lengte 1; de bijbehorende -matrix is  
. Dit geeft, vanwege (1):  
  
.  
  
We vinden daarom wederom dat  
.

**Samenvatting lineaire afbeeldingen in de ruimte**

|  |  |
| --- | --- |
| **Lineaire afbeelding** | **Matrix** |
| Vermenigvuldiging t.o.v. de oorsprong met de factor |  |
| Loodrechte projectie op het vlak , gevolgd door de rotatie rondom de lijn over |  |
| Loodrechte projectie op het vlak |  |
| Spiegeling in het vlak |  |
| Rotatie rondom de lijn over de hoek |  |
| Rotatie rondom de lijn over |  |
| Spiegeling in de lijn |  |
| Loodrechte projectie op de lijn |  |

Hierbij geldt steeds dat , en .  
Voor de motivatie zie de Appendix.  
  
  
  
  
  
  
  
  
**C) Eigenvectoren en eigenwaarden**We herhalen eerst enkele basisfeiten over determinanten en stelsels vergelijkingen.  
  
Voor een – matrix geldt: .  
Dit heet de **determinant** van en wordt ook vaak genoteerd als .  
We schrijven dan dat .  
Voor een - matrix geldt:  
.   
Dit verder uitwerken geeft:   
   
 .  
  
Beschouw het stelsel vergelijkingen . (7)  
Dit is natuurlijk ook in een matrixvorm te schrijven:  
  
, waarbij . (7’)  
  
 is zeker een oplossing van (7), d.w.z. voldoet aan (7’).  
De theorie zegt dan:  
(7’) heeft een oplossing . (8)  
  
Beschouw nu het stelsel vergelijkingen . (9)  
De matrixvorm hiervan is  
  
, waarbij . (9’)  
 is zeker een oplossing van (9), d.w.z. voldoet aan (9’).  
De theorie zegt:  
(9’) heeft een oplossing . (10)

Als voor een lineaire afbeelding in het platte vlak of in de ruimte geldt dat , voor een zekere vector en een zeker reëel getal , dan heet een **eigenvector** en een **eigenwaarde** van .  
Een eigenvector is dus een vector die door de lineaire afbeelding op een veelvoud van zichzelf wordt afgebeeld. Stel dat de matrix is die hoort bij . Dan heet ook een eigenvector en ook een eigenwaarde van . De betrekking is te herschrijven als , dus , waarbij de eenheidsmatrix is. Derhalve geldt dat Hierbij is dus .  
Toepassen van (8) of (10) op de matrix impliceert dat  
  
. (11)

Deze vergelijking heet de **karakteristieke vergelijking** van .  
  
De eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren vinden we daarom als volgt:  
1) los de karakteristieke op; dit geeft de mogelijke eigenwaarden;  
2) los voor elke eigenwaarde het stelsel vergelijkingen volledig op;   
 alle oplossingen hiervan, met uitzondering van , zijn de eigenvectoren behorend bij .  
  
Een lineaire afbeelding hoeft geen (reële) eigenwaarden te hebben. Bijvoorbeeld de rotatie in het platte vlak over heeft geen eigenwaarden, omdat geen enkele vector op een veelvoud van zichzelf wordt afgebeeld. We bekijken nu een aantal voorbeelden van matrices waarin de eigenwaarden en eigenvectoren bepaald moeten worden.  
  
**Voorbeeld 13**  
Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix .  
**Oplossing**  
We moeten oplossen uit , dus . Uitwerken geeft:  
, , , .  
We berekenen nu de bijbehorende eigenvectoren:  
I) : , . Hieruit volgt dat .  
Bij horen daarom de eigenvectoren: , waarbij een reëel voorstelt.  
II) : , . Hieruit volgt dat .  
Bij horen daarom de eigenvectoren: (.  
**Voorbeeld 14**  
Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix .  
**Oplossing**  
We moeten oplossen uit , dus ,  
, ,  
, , ,   
 .  
I) : , dus . Dit geeft .  
Bij horen de eigenvectoren: (.  
II) : , dus . Dit geeft .  
Bij horen de eigenvectoren: (.  
III) : , dus . Dit geeft .  
Bij horen de eigenvectoren: (.  
**Opmerking**  
Het valt op dat de vectoren , en onderling loodrecht op elkaar staan. De reden hiervoor is dat de matrix symmetrisch is t.o.v. de hoofddiagonaal (van linksboven naar rechtsonder).  
  
**Voorbeeld 15**  
Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix .  
**Oplossing**  
We moeten oplossen uit , dus ,  
  
 ,

,   
,  
, .  
Dit mogen we m.b.v. de GR oplossen. We vinden dan en (dubbele wortel).  
I) : , dus .   
Dit stelsel is te vereenvoudigen tot , waarna we vinden: en .   
Bij horen de eigenvectoren: (.  
II) : , dus .   
Deze drie vergelijkingen zijn gelijkwaardig met: . Dit is één lineaire vergelijking met drie onbekenden. Een dergelijke vergelijking heeft een algemene oplossing met vrije parameters.  
We stellen bijvoorbeeld en ; dan .  
Bij horen de eigenvectoren: ( en niet beide 0).  
Hier wordt een willekeurig veelvoud van de vector opgeteld bij een willekeurig veelvoud van de vector . Op deze manier verkrijgen we elke vector die ligt in het vlak door en .  
Elke vector in ( ) is een eigenvector bij . Formeel wordt dit uitgedrukt door te zeggen dat een tweedimensionale **eigenruimte** is.  
  
Het uitwerken van geeft voor een 3 bij 3 matrix reeds aanzienlijk rekenwerk (met een niet geringe kans op rekenfouten), zoals bij voorbeeld 11 gebleken is.   
We gaan nu onderzoeken of het iets gemakkelijker kan.   
Stel dat de matrix is waarvan we de eigenwaarden willen bepalen.   
We moeten oplossen .   
De waarde van de determinant geven we aan met .  
Dit is een derdegraadsfunctie, dus , voor zekere getallen  
 en . De termen met en in de determinant krijgen we slechts als we  
 uitwerken. Je krijgt dan de termen en .  
Hieruit blijkt dat en . Hierbij is de som van de elementen van de hoofddiagonaal van . Dit heet het **spoor** van de matrix , genoteerd als .  
Verder merken we op dat ( ).  
Hiermee is gevonden dat . We hebben dus reeds:  
. Invullen van leidt tot   
, dus . Conclusie:  
  
. (12)  
  
Hierbij kunnen en m.b.v. de rekenmachine bepaald worden.  
We passen dit toe op de matrix van voorbeeld 15.  
, , ,  
.   
Dit geeft, vanwege (12): .

**Voorbeeld 16**Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix .  
**Oplossing**  
We stellen en maken gebruik van (12).  
  
 , , ,  
.  
We moeten oplossen: . De GR geeft als enige reële oplossing .  
Deze voldoet inderdaad aan de karakteristieke vergelijking: .  
: , dus . Dit is gelijkwaardig met  
  
 . We tellen (a) op bij (c) en tweemaal (a) op bij (b).  
Dit leidt tot het stelsel . Hieruit vinden we dat en .  
Bij horen de eigenvectoren: (.  
**Opmerking**  
De matrix die we hier gebruikt hebben is de matrix die we hadden in voorbeeld 11, vermenigvuldigd met 3. De matrix aldaar hoorde bij de rotatie rondom de lijn over de hoek van . Deze matrix heeft duidelijk als 1 als enige eigenwaarde. Bijgevolg heeft de matrix het getal 3 als enige eigenwaarde. De eigenvectoren zijn de veelvouden van de richtingsvector van .  
  
**D) Toepassingen van eigenvectoren en eigenwaarden**  
  
Eigenvectoren en eigenwaarden worden op veel gebieden toegepast. Een belangrijke toepassing is het **diagonaliseren** van matrices. Dit zullen we nu gaan toelichten voor 3 bij 3 matrices.  
Vooreerst zullen we drie ruimtelijke vectoren , en **lineair onafhankelijk** noemen als ze niet in een vlak liggen. We zeggen dan ook wel dat ze de driedimensionale ruimte **opspannen**.   
Elke vector is dan te schrijven als een lineaire combinatie van , en , d.w.z. er bestaan getallen  
en zó dat . Hieraan blijkt voldaan te zijn als determinant van de matrix met , en als kolommen ongelijk is aan nul. We zullen deze theorie hier niet verder uitleggen (zie zo nodig een boek over lineaire algebra), maar slechts toepassen.  
Stel dat de matrix drie lineair onafhankelijke eigenvectoren , en heeft, behorend bij de eigenwaarden , en . Deze eigenwaarden hoeven niet onderling verschillend te zijn.  
Vorm de matrix waarvan de kolommen , en zijn. We weten dan dat .   
De matrix heeft derhalve een inverse matrix . Laat verder , en de standaard eenheidsvectoren zijn. Beschouw nu de matrix .   
   
. Analoog blijkt dat en .   
De kolommen van (van links naar rechts) zijn daarom de vectoren , en .  
Dit geeft: . Deze matrix is een **diagonaalmatrix**: elk element dat niet op de hoofddiagonaal staat is gelijk aan 0. We zeggen in dit geval dat we de matrix kunnen **diagonaliseren**.  
Een van de redenen dat diagonaalmatrices prettig zijn om mee te werken is dat machten van die matrices zeer eenvoudig zijn uit te rekenen: als , dan .  
De juistheid hiervan is simpel m.b.v. volledige inductie aan te tonen.  
Uit de gevonden betrekking leiden we af dat   
Willen we nu bijvoorbeeld uitrekenen, dan gaat dit als volgt:  
   
   
 .   
Algemeen geldt dat . (13)  
  
**Voorbeeld 17**Neem de matrix uit voorbeeld 14.   
Bereken voor een willekeurig positief geheel getal .  
**Oplossing**

Zie de uitwerking bij voorbeeld 14.  
 is een eigenvector bij de eigenwaarde , is een eigenvector bij de eigenwaarde en is een eigenvector bij de eigenwaarde . De matrix met , en als kolommen is en . Berekening geeft dat .   
Hieruit volgt door toepassing van (16) dat  
  
   
   
  
 .   
  
We benadrukken nogmaals dat het diagonaliseren van een 3 bij 3 matrix slechts mogelijk is indien er drie eigenvectoren zijn die de ruimte opspannen.  
Een andere toepassing van het diagonaliseren van matrices treedt op bij het bepalen van een directe formule van een rij die door een lineaire recursieve betrekking met constante coëfficiënten beschreven wordt. Beschouw bijvoorbeeld de rij van Fibonacci , waarbij en  
, voor . We zoeken een directe formule voor . Er geldt dat   
  
, voor alle . Ook geldt dat , dus  
  
. Door dit proces te herhalen krijgen we  
  
, waarbij . We gaan de matrix diagonaliseren.  
De eigenwaarden van vinden we uit , ,   
De oplossingen hiervan zijn of .  
Er geldt duidelijk dat en .  
We bepalen vervolgens de bijbehorende eigenvectoren.  
I) : , . Beide betrekkingen zijn gelijkwaardig met   
 (dit is in te zien als we de eerste betrekking vermenigvuldigen met ).  
 Een bijbehorende eigenvector is daarom .  
II) : , . Beide betrekkingen zijn gelijkwaardig met   
 (dit is in te zien als we de eerste betrekking vermenigvuldigen met ).  
 Een bijbehorende eigenvector is daarom .   
De matrix waarvan en de kolommen zijn is . Er geldt dat .  
De matrix is daarom diagonaliseerbaar. Een berekening (zo nodig m.b.v. de GR) geeft dat  
. We komen hiermee tot:  
   
  
 . We vinden hieruit:  
  
, zodat .

**Voorbeeld 18**Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen  
, met en .  
Stel van en een directe formule op.  
**Oplossing**  
Het stelsel differentievergelijkingen is in matrixvorm te schrijven:  
, waarbij en .   
We merken op dat   
, enz.  
Door dit proces voort te zetten vinden we dat  
.  
Om gemakkelijk te kunnen uitrekenen, gaan we diagonaliseren.  
De eigenwaarden worden gevonden uit , ,  
, , .  
We berekenen nu de bijbehorende eigenvectoren:  
I) : , . Hieruit volgt dat .  
Een bijbehorende eigenvector is .  
II) : , . Hieruit volgt dat   
Een bijbehorende eigenvector is .  
De matrix met en als kolommen is . Vanwege is diagonaliseerbaar.   
We vinden eenvoudig dat . Hiermee komen we tot , dus  
  
   
  
 . Dit geeft:  
  
, dus

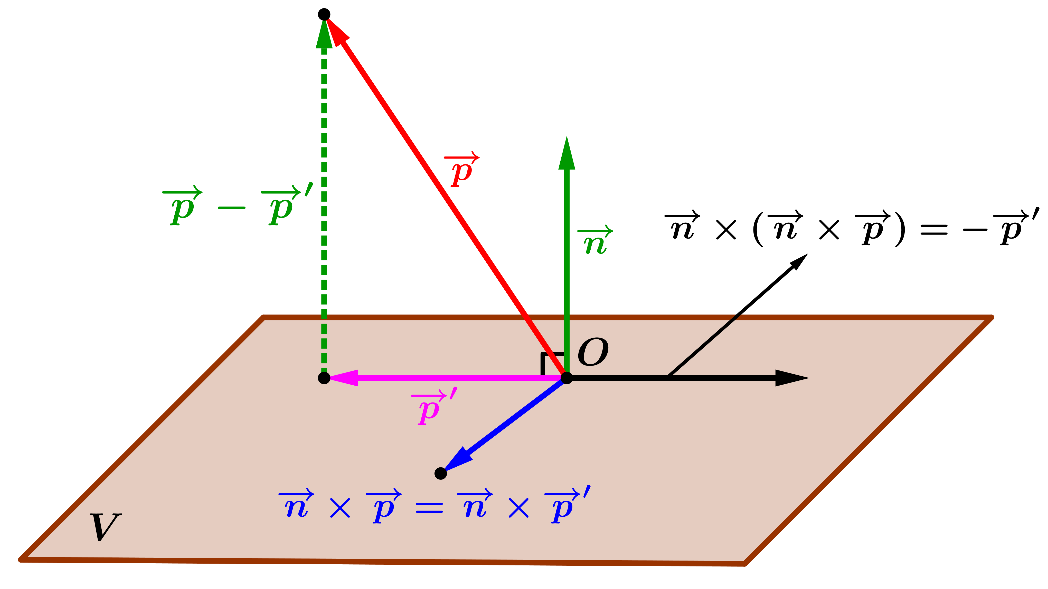
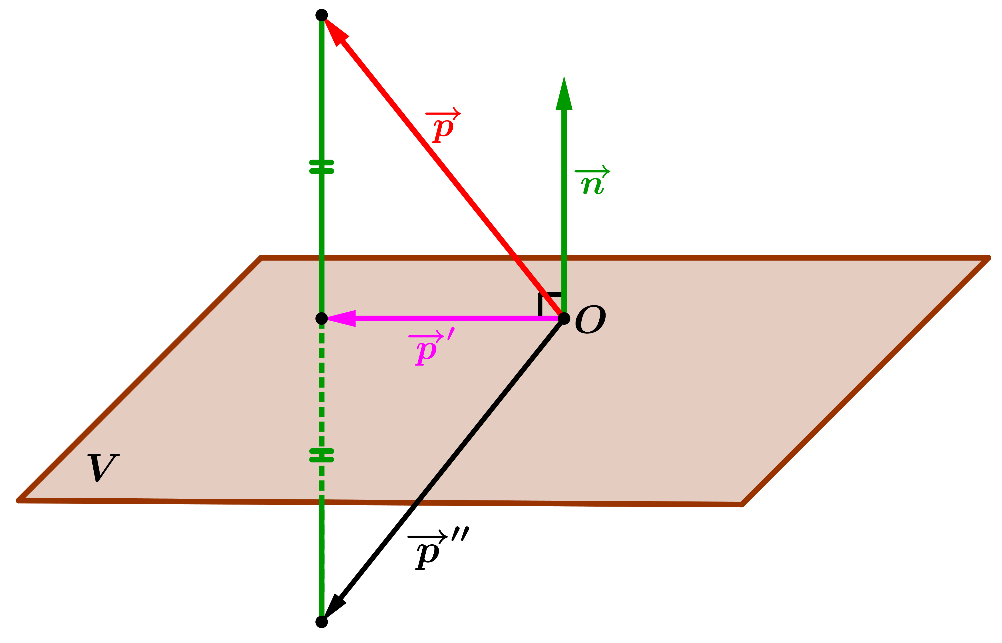
en .

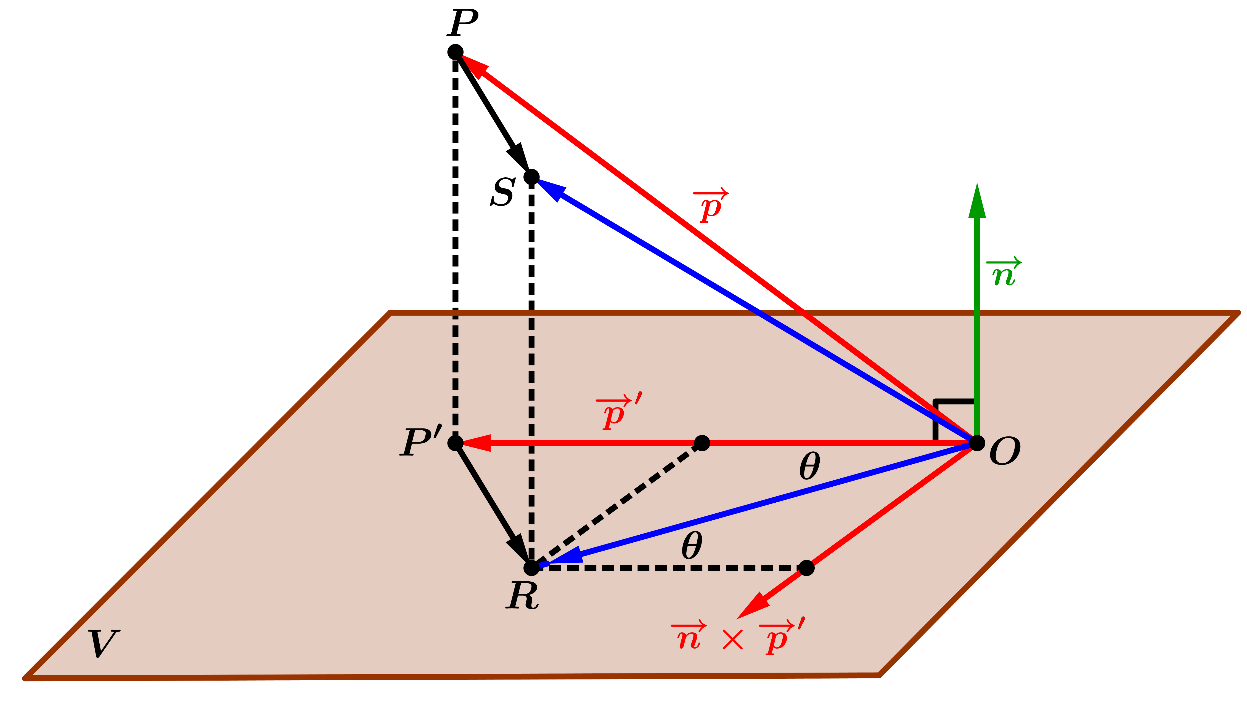
**Voorbeeld 19**  
Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen:  
 , waarbij en .  
Stel van en een directe formule op.  
**Oplossing**  
Het stelsel differentievergelijkingen is in matrixvorm te schrijven:  
, waarbij en .   
Herhaald toepassen van deze betrekking geeft:   
. De eigenwaarden van worden gevonden uit:  
. , ,   
. We moeten oplossen .   
De GR vindt de oplossingen .  
I) : , dus . Dit geeft .  
Een bijbehorende eigenvector is .  
II) : , dus . Dit geeft .  
Een bijbehorende eigenvector is .  
III) : , dus . Dit geeft .  
Een bijbehorende eigenvector is .  
De matrix met , en als kolommen is en .   
Berekening geeft dat . Hieruit volgt dat , dus

.   
  
Dit geeft: .  
  
Conclusie: , en .

**Appendix**We zullen laten zien dat de matrices van veel algemene meetkundige ruimtelijke lineaire afbeeldingen uit te drukken zijn in één matrix (voor alle afbeeldingen dezelfde structuur), eventueel aangevuld met de eenheidsmatrix .  
  
In deze appendix stelt steeds een vector voor met lengte 1, dus . Het vlak door de oorsprong loodrecht op noemen we het *normaalvlak* van . Neem nu een willekeurige vector . We vormen het uitwendig product van en : .   
De kentallen van en zitten in elkaar verstrengeld in dit uitwendig product.  
Er is echter een manier om deze kentallen te scheiden van elkaar. Dit gaat als volgt:  
.  
  
Stellen we , dan hebben we gevonden dat .  
  
Het uitwendig product hebben we dus herschreven als een matrixproduct. Stel dat de lineaire afbeelding is die als bijbehorende matrix heeft. Er geldt dat , voor elke vector .  
We zullen nu gaan onderzoeken welke meetkundige bewerking voorstelt. Er geldt, zoals bekend uit de eigenschappen van het uitwendig product, dat . Dit betekent dat elke vector op een vector in het normaalvlak afbeeldt. De loodrechte projectie van op geven we aan met .

|  |  |
| --- | --- |
| Er geldt dat , dus .  Dit impliceert dat ,  , dus .    , want en . De vector verkrijgen we daarom door deze in over te roteren. De draairichting volgt de *kurkentrekkerregel*. |  |

Nu is het effect van duidelijk.  
  
**De lineaire afbeelding , gedefinieerd door** ,  **is de loodrechte projectie   
op het normaalvlak van , gevolgd door een rotatie in over .**We merken op dat hieruit volgt dat voor een vector gelegen in geldt dat loodrecht staat op en dat de vector is die we krijgen door in over te draaien (volgens de kurkentrekkerregel).  
  
We gaan vervolgens na hoe uit te verkrijgen is m.b.v. de matrix .  
Beschouw nogmaals de voorgaande figuur waarin een paar elementen zijn toegevoegd.  
  
  
De vector ligt in dus de vector krijgen we door in over te draaien (volgens de kurkentrekkerregel). Gelet op het feit hoe uit ontstaat (namelijk door een rotatie over ), zien we nu in dat we verkrijgen door in over 180° te draaien.   
Hieruit blijkt dat . Dit leidt tot  
. We kunnen hieruit concluderen:  
  
**de matrix behorend bij de loodrechte projectie op het normaalvlak van voldoet aan**.  
  
We bekijken vervolgens de spiegeling in het normaalvlak van . Stel dat de loodrechte spiegeling aangeeft van de vector in . De vector is nog steeds de loodrechte projectie van op . Hierboven hebben we gezien dat . Zie de figuur op de volgende pagina.  
Evident is dat er geldt , zodat   
Hiermee is het volgende afgeleid  
  
**de matrix behorend bij de spiegeling in het normaalvlak van voldoet aan**.  


Tenslotte onderzoeken we de rotaties rondom de lijn met richtingsvector . Deze lijn wordt de **drager**  
van genoemd. Laat de draaiingshoek gelijk zijn aan . Beschouw de volgende figuur.  
  
Bij de rotatie rondom over de hoek gaat over in en over in .   
Het beeld van de vector is derhalve de vector . Er geldt dat  
 (want )  
 .   
.   
   
 .   
Hiermee is aangetoond:  
  
**de matrix behorend bij de rotatie rondom de drager van over de hoek voldoet aan  
.**