Examen VWO

2011

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\quad\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\quad\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

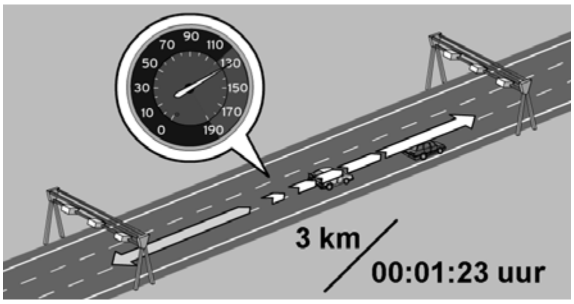
Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Snelheidscontroles en boetes

De politie controleert de snelheden van auto's op snelwegen op verschillende manieren. Een betrekkelijk nieuwe manier is de zogeheten **trajectcontrole**. Met een camera wordt een auto aan het begin en aan het eind van een traject gefotografeerd. Met een simpel rekensommetje (lengte van het traject gedeeld door de tijd) berekent de computer hoe hard de auto gemiddeld gereden heeft over het traject.
Op een voorlichtingssite van het Openbaar Ministerie wordt dit toegelicht met een voorbeeld.
Zie de figuur hiernaast.
In dit voorbeeld legt een auto een traject van 3 km af in 00:01:23 uur (1 minuut en 23 seconden). De gemiddelde snelheid is dan 130 km/uur.

figuur



Bij dergelijke metingen zijn altijd kleine meetfouten mogelijk. Daarom krijgen automobilisten pas bij een overschrijding van 4 km/uur of meer een boete.

Op sommige trajecten vindt de controle met meer dan twee cameraposten plaats; voor ieder deeltraject wordt dan apart de gemiddelde snelheid berekend. De hoogte van deze gemiddelde snelheden bepaalt dan of er een boete volgt.
Op de N256 geldt een maximumsnelheid van 80 km/uur. Op deze weg is een traject van 9 km opgedeeld in deeltraject A van 4 km en deeltraject B van 5 km.
Een automobilist rijdt met hoge snelheid en remt in de loop van het traject flink af. Hij legt deeltraject A af met een gemiddelde snelheid van 120 km/uur en deeltraject B met een gemiddelde snelheid van 60 km/uur.
Voor het eerste deeltraject wordt hij beboet.

5p **1** Onderzoek door een berekening of deze automobilist een boete zou krijgen als het traject van 9 km **niet** opgedeeld zou zijn in deeltrajecten.

Justitie onderscheidt drie soorten wegen, elk met een eigen boetesysteem: buiten de bebouwde kom, autosnelwegen en binnen de bebouwde kom.

Buiten de bebouwde kom geldt voor auto's een maximumsnelheid van 80 km/uur. Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen buiten de bebouwde kom geldt (bij benadering) de volgende formule:

$$B_{buiten} = 16,527 \cdot 1,092^{s}$$

Hierbij is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/uur en B_{buiten} het onafgeronde boetebedrag in euro's. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op hele euro's.
Bijvoorbeeld: bij een snelheid $v = 90$ km/uur hoort een snelheidsoverschrijding $s = 10$ km/uur. Het bijbehorende boetebedrag in euro's is $16,527 \cdot 1,092^{10} \approx 39,85$ en dit wordt afgerond op 40 euro.

Verkeersonderzoekers gebruiken liever een formule waarin niet de snelheidsoverschrijding s voorkomt, maar de werkelijke snelheid v in km/uur. Zo'n formule is van de vorm $B_{buiten} = a \cdot 1,092^v$.

4p **2** Bereken de constante a in vier decimalen nauwkeurig.

Het boetebedrag op de autosnelweg (in euro's) hangt ook af van de grootte van de overschrijding van de maximumsnelheid (in km/uur). Zie onderstaande tabel.

tabel

snelheidsoverschrijding (km/uur)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
boetebedrag (€)	16	20	24	27	32	37	40	45	51	56	62

Omdat bij hogere snelheden het risico van een ongeval steeds meer toeneemt, vertonen de boetebedragen in de tabel een toenemende stijging. Althans, zo lijkt het op het eerste gezicht, maar de stijging van de boetebedragen is soms afnemend. Een voorbeeld: als de overschrijding toeneemt van 5 km/uur naar 6 km/uur neemt het boetebedrag met 4 euro toe, terwijl van 6 km/uur naar 7 km/uur de toename 3 euro is. Dat komt doordat de boetebedragen eerst met een formule zijn berekend en vervolgens afgerond op hele euro's.

Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen **binnen** de bebouwde kom geldt (bij benadering) de volgende formule:

$$B_{binnen} = 3,018 \cdot s^{1,212}$$

Hierbij is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/uur en B_{binnen} het onafgeronde boetebedrag in euro's. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op hele euro's.

4p **3** Toon aan dat zich bij deze formule ook het verschijnsel voordoet dat de stijging van de **afgeronde** boetebedragen soms afnemend is.

4p **4** Stel een formule op voor de afgeleide van B_{binnen} en toon daarmee aan dat de **onafgeronde** boetebedragen bij deze formule toenemend stijgen.

500 meter schaatsen

De prestaties van een wedstrijdschaatser zijn afhankelijk van zijn of haar conditie, maar ook van externe factoren zoals de kwaliteit van het ijs en de weersomstandigheden. Als een schaatser in een seizoen op dezelfde ijsbaan meerdere keren een 500 meter aflegt, kunnen we de invloed van externe factoren vrijwel verwaarlozen. We gaan er daarom van uit dat de 500-meter-tijden in dat geval normaal verdeeld zijn.

Benjamin is een jonge schaatser, die altijd traint op dezelfde ijsbaan in Utrecht. Zijn trainingstijden op de 500 meter zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 39,72 seconden en een standaardafwijking van 0,43 seconden.

3p **5** Bereken hoeveel procent van de trainingstijden op de 500 meter van Benjamin onder de 39 seconden ligt.

Ook Sabrina traint op deze baan voor de 500 meter. Haar gemiddelde tijd is 41,32 seconden. Van de 100 trainingsritten op de 500 meter reed zij 25 keer onder de 41 seconden. Met behulp van deze gegevens en het feit dat haar trainingstijden normaal verdeeld zijn, kan de bijbehorende standaardafwijking van de trainingstijden van Sabrina berekend worden.

4p **6** Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

Benjamin en Sabrina trainen vrijwel altijd samen. Ze willen hun trainingsritten elke trainingsdag in een andere volgorde rijden. Toen ze als junioren allebei dagelijks 3 trainingsritten reden, begonnen ze op de eerste trainingsdag met de volgorde BSSBBS en waren ze al na 20 trainingsdagen door alle mogelijke volgordes heen. Nu ze senioren zijn, rijden ze elke trainingsdag ieder hetzelfde, grotere aantal trainingsritten. Sabrina heeft uitgerekend dat ze nu aan een jaar niet eens genoeg hebben om alle mogelijke volgordes uit te proberen.

4p **7** Onderzoek hoeveel trainingsritten ze elk per trainingsdag minstens rijden.

Veel schaatsers vinden het een voordeel om op de 500 meter tijdens de laatste bocht in de buitenbaan te rijden. De snelheid is dan ruim 50 km/uur en in de binnenbaan blijf je moeilijker overeind. Bij een toernooi worden dan ook altijd twee 500 meters verreden: elke schaatser rijdt de laatste bocht een keer in de binnenbaan en een keer in de buitenbaan.

Een toeschouwer denkt dat het rijden van de laatste bocht in de buitenbaan een grotere kans biedt op winst in de rit dan het rijden van de laatste bocht in de binnenbaan. Tijdens een wereldkampioenschap eindigden 26 van de 40 schaatsers in een snellere tijd op de 500 meter wanneer zij de laatste bocht in de buitenbaan reden dan wanneer zij die in de binnenbaan reden.

6p **8** Bereken of dit resultaat aanleiding geeft om te veronderstellen dat de toeschouwer gelijk heeft. Hanteer een significantieniveau van 5%.

Morfine

In het ziekenhuis krijgen patiënten vaak een pijnstiller toegediend. Als pijnstiller gebruikt men meestal een oplossing van morfine en een oplosmiddel zoals gedestilleerd water.
De concentratie van morfine in opgeloste vorm geeft men aan met een percentage. Zo bedoelt men met **morfine-2%** dat er in elke 100 milliliter van de oplossing 2 gram (2000 milligram) morfine aanwezig is.

In de praktijk beschikt men in een ziekenhuis vaak over kant-en-klare oplossingen, die verdund worden met het oplosmiddel om een oplossing met een lagere concentratie te verkrijgen.

Veronderstel dat men beschikt over morfine-3% en men wil daarmee morfine-1% maken.

3p **9** Bereken hoeveel milliliter oplosmiddel er per 100 milliliter morfine-3% moet worden toegevoegd.

Morfine kan ook in combinatie met een andere pijnstiller, bupivacaïne, gebruikt worden. Een mogelijke situatie is de volgende:

– Neem 2 ampullen van elk 10 milliliter met een oplossing van bupivacaïne-0,5%.
– Neem 3 ampullen van elk 10 milliliter met een morfine-oplossing.
– Meng de inhoud van deze vijf ampullen.
– Dien van deze oplossing 3,5 milliliter per uur toe.

4p **10** Bereken hoeveel milligram bupivacaïne de patiënt per uur krijgt.

Een andere manier om morfine toe te dienen is door middel van injecties.
De hoeveelheid morfine in het lichaam neemt na de injectie exponentieel af.
De injectie wordt na 6 uren herhaald, want na die tijd is de hoeveelheid morfine in het lichaam te gering om nog werkzaam te zijn.
De halfwaardetijd van morfine is ongeveer 2,5 uur. Dat betekent dat na 2,5 uur de hoeveelheid morfine in het lichaam is gehalveerd.

Uit deze gegevens volgt dat 6 uur na de injectie de hoeveelheid morfine in het lichaam 19% is van de oorspronkelijke hoeveelheid vlak na de injectie.

4p **11** Toon dit met een berekening aan.

RSI

Beursanalisten geven op verschillende manieren aan hoe de waarde van een aandeel zich ontwikkelt. Daarvoor gebruiken ze zogenoemde indicatoren.
De Amerikaan J. Welles Wilder introduceerde in 1978 een indicator die bekend staat onder de naam RSI, de relatieve sterkte-index.

Om de RSI van een aandeel te berekenen, gaat men als volgt te werk:
- neem de slotkoersen van het aandeel gedurende 14 dagen;
- bereken voor elke dag de winst of het verlies ten opzichte van de vorige dag;
- tel alle winsten bij elkaar op en tel alle verliezen bij elkaar op;
- bereken de relatieve sterkte: $r = \dfrac{\text{totale winst}}{\text{totale verlies}}$;
- bereken daarna RSI met de formule $RSI = 100 - \dfrac{100}{1+r}$.

De waarden van r en RSI worden afgerond op twee decimalen.
Bij deze formule ging Wilder ervan uit dat een aandeel gedurende 14 dagen niet alleen maar winst zal maken. In dat geval is namelijk het totale verlies gelijk aan 0 en dan bestaat r niet.
In onderstaande tabel zie je een voorbeeld. Van 15 juni 2007 tot en met 4 juli 2007 is van een aandeel de winst of het verlies ten opzichte van de dag ervoor berekend. Om de winst op 15 juni te berekenen is de slotkoers van 14 juni nodig. Daarom staan in de tabel de slotkoersen van 15 dagen.

tabel

datum	slotkoers (in €)	winst (in €)	verlies (in €)
14-06-2007	21,75	–	–
15-06-2007	22,66	0,91	
18-06-2007	22,71	0,05	
19-06-2007	22,57		0,14
20-06-2007	22,66	0,09	
21-06-2007	22,33		0,33
22-06-2007	22,13		0,20
25-06-2007	21,92		0,21
26-06-2007	22,32	0,40	
27-06-2007	22,10		0,22
28-06-2007	22,13	0,03	
29-06-2007	22,21	0,08	
02-07-2007	22,27	0,06	
03-07-2007	22,72	0,45	
04-07-2007	22,45		0,27
totaal		2,07	1,37

Op 4 juli 2007 was $r = \dfrac{2,07}{1,37} = 1,51$ en dus $RSI = 60,16$.

De slotkoers van het aandeel was op de twee volgende dagen (5 en 6 juli 2007) 22,68 respectievelijk 22,55.

4p **12** Bereken de waarde van RSI op 6 juli 2007.

Aan de manier waarop r wordt berekend, kun je zien dat r toeneemt naarmate het aandeel 'beter presteert'.
Voor RSI kunnen we ook zo'n conclusie trekken: RSI neemt toe naarmate het aandeel beter presteert, dus wanneer r toeneemt.

4p **13** Bereken de afgeleide van RSI en toon daarmee aan dat de conclusie die hier boven staat, correct is.

Je kunt ook, zonder gebruik te maken van de afgeleide, aan de hand van de formule laten zien dat de conclusie die hierboven staat, correct is.

3p **14** Toon dit aan.

Aan de waarde van RSI kun je snel zien of het aandeel in een periode van 14 dagen meer verloren heeft dan gewonnen.

4p **15** Leg uit hoe je dat kunt zien.

Een belegger hanteert de regel dat je het aandeel moet verkopen wanneer $RSI > 70$.

4p **16** Bereken bij welke waarden van r je volgens deze regel het aandeel moet verkopen.

Edward vindt de formule $RSI = 100 - \dfrac{100}{1+r}$ onhandig. Volgens hem is het helemaal niet nodig om eerst r uit te rekenen. Je kunt de formule van RSI zo herleiden dat deze direct afhangt van de totale winst TW en het totale verlies TV van het aandeel, als je gebruik maakt van $r = \dfrac{TW}{TV}$.

Als je dat doet, ziet de formule er als volgt uit: $RSI = 100 - \dfrac{100}{1+\dfrac{TW}{TV}}$

4p **17** Herleid deze formule tot $RSI = \dfrac{\dots}{TV + TW}$.

Schroeven

Een fabriek produceert grote hoeveelheden schroeven. Bij het produceren van schroeven is het onvermijdelijk dat een (klein) percentage van de geproduceerde schroeven ondeugdelijk is.
Er wordt elk uur een steekproef genomen. De schroeven die in een uur geproduceerd zijn, worden een **partij** genoemd. Op grond van de uitkomst van de steekproef wordt een partij schroeven goedgekeurd of afgekeurd.

Er wordt elk uur een steekproef van 10 schroeven genomen. De partij wordt afgekeurd als er 1 of meer ondeugdelijke schroeven in de steekproef gevonden worden. Bij steekproefgrootte 10 kan een formule gemaakt worden waarbij de kans dat de partij wordt afgekeurd (K) wordt uitgedrukt in het percentage ondeugdelijke schroeven in de partij (p):

$$K = 1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{10}$$

3p **18** Toon dit aan.

Het is redelijk dat een klant verlangt dat een **slechte** partij **bijna zeker** wordt afgekeurd. We definiëren deze twee vetgedrukte begrippen als volgt:
Een partij is **slecht** als het percentage ondeugdelijke schroeven $p = 5$ of groter is;
Bijna zeker afkeuren betekent afkeuren met een kans van ten minste 0,80.

Bij steekproefgrootte n is een formule waarbij K wordt uitgedrukt in p als volgt:

$$K = 1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{n}$$

Om te berekenen hoe groot de steekproefgrootte n minstens moet zijn zodat een slechte partij bijna zeker wordt afgekeurd, hoeven we in de formule $K = 1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{n}$ slechts te kijken naar het geval $p = 5$.

4p **19** Bereken hoe groot de steekproefgrootte n in dit geval minstens moet zijn.

Het vergroten van de steekproef terwijl de partij nog steeds afgekeurd wordt als er 1 of meer ondeugdelijke schroeven in de steekproef zitten, heeft ook een nadeel. Een **goede** partij heeft dan een tamelijk grote kans om afgekeurd te worden. We definiëren een partij als **goed** als het percentage ondeugdelijke schroeven $p = 1$ of kleiner is.

Daarom zal een fabrikant verlangen dat voor een goede partij de kans om afgekeurd te worden kleiner is dan 0,10.
Als een partij pas wordt afgekeurd bij 3 of meer ondeugdelijke schroeven in de steekproef en er wordt een steekproef van 100 schroeven genomen, dan kan onderzocht worden of aan het verlangen van zowel de klant als de fabrikant wordt voldaan.

6p **20** Voer dit onderzoek uit.