

Wiskunde B 456 VWO

EXAMENTRAINING





© 2021

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaarden ze geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Examentraining

- 1 Standaardfuncties 3
- 2 Vergelijkingen en ongelijkheden 15
- 3 Formules opstellen 27
- 4 Differentiaal- en integraalrekening 37
- 5 Vlakke meetkunde 51
- 6 Parameterkrommen 67
- 7 Naar het examen 79

Antwoorden 88

Register 135

1 Standaardfuncties

Inleiding



Figuur 1

Radioactieve stoffen kunnen gevaarlijk zijn, omdat er veel energie vrijkomt bij hun verval. Kernwapens maken gebruik van deze destructieve kracht, maar de energie kan ook gebruikt worden voor nuttige doeleinden. Zo wordt in kerncentrales de energie die vrijkomt bij radioactieve processen omgezet in energie die jij uit het stopcontact kunt halen. Omdat hierbij gebruik wordt gemaakt van gevaarlijke stoffen zijn kerncentrales goed beveiligd en staan onder strikte controle. Er is slechts een paar keer in de historie iets misgegaan.

In 1986 vond een kernramp in Tsjernobyl (Oekraïne) plaats. Bij een ontploffing kwamen enorme hoeveelheden radioactief materiaal in de atmosfeer terecht, wat zich voornamelijk uitspreidde over Europa. De Russische autoriteit wilde niet dat het ongeluk naar buiten kwam, maar drie dagen na de ramp werd dit toch ontdekt door een onderzoeker in Zweden. Deze moest door een stralingsdetector om in zijn lab te komen, maar hij kwam er met de schoenen die hij buiten had gedragen niet doorheen. Zijn schoenen waren namelijk blootgesteld aan de radiatie, die was vrijgekomen bij de ramp.

Verkennen

Opgave V1

Het duurt lang voordat radioactieve stoffen verdwijnen. Een van de belangrijkste radioactieve stoffen die vrijkwam bij het ongeluk in Tsjernobyl was Cesium-134.

De afname van het percentage Cesium-134 in de atmosfeer is een exponentiële functie van de tijd in jaren. Na 2,0625 jaar is de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid Cesium verdwenen. Stel op basis van deze gegevens een functie op voor het verval van Cesium, en bereken na hoeveel jaar slechts 10% van de oorspronkelijke hoeveelheid Cesium over is.

Theorie

Om te onthouden

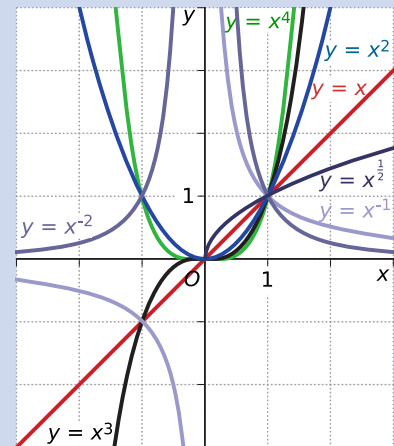
Machtsfuncties

Een functie van de vorm $y = x^p$ waarbij p een reëel getal is, heet een **machtsfunctie**. Functies van de vorm $y = a \cdot (b(x - c))^p + d$ ontstaan uit de standaard machtsfunctie door **transformaties**:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{b}$;
- translatie ten opzichte van de y -as met c ;
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met a ;
- translatie ten opzichte van de x -as met d .

Afhankelijk van de exponent p hebben deze machtsfuncties verschillende namen:

- Als $p = 1$ heb je een **lineaire functie** die je altijd kunt schrijven in de vorm $y = ax + b$. De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt a en snijpunt met de y -as $(0, b)$.
- Als $p = 2$ heb je een **kwadratische functie** die je altijd kunt schrijven in de vorm $y = a(x - b)^2 + c$. De grafiek is een parabool met top (b, c) . Soms moet je door kwadraat afsplitsen een voorschrift van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ in de juiste vorm brengen.
- Als $p = \frac{1}{n}$ (n geheel en positief) heb je een **(hogere machts) wortelfunctie** die je altijd kunt schrijven in de vorm $y = a(x - b)^{\frac{1}{n}} + c = a\sqrt[n]{x - b} + c$. Is n even dan heeft de grafiek een beginpunt of eindpunt (b, c) , is n oneven dan is (b, c) het symmetriepunt.
- Als $p = n > 2$ (n geheel) heb je een **hogere machtsfunctie** van de vorm $y = a(x - b)^n + c$. Is n even dan heeft de grafiek een top (b, c) , is n oneven dan is (b, c) het symmetriepunt.
- Als $p = n \leq -1$ (n geheel) heb je een **gebroken functie** van de vorm $y = a(x - b)^{-n} + c = \frac{a}{(x - b)^n} + c$. Is n even ligt de grafiek geheel onder of geheel boven de horizontale asymptoot $y = c$, is n oneven dan ligt de grafiek aan de éne kant van de verticale asymptoot $x = b$ onder en aan de andere kant boven de horizontale asymptoot.



Figuur 2

Evenredigheid

Bij een functie van de vorm $y = a \cdot x^p$ is y **recht evenredig** met de macht x^p .

Bij een functie van de vorm $y = \frac{a}{x^p}$ is y **omgekeerd evenredig** met de macht x^p .

Karakteristieken

De **karakteristieken van een functie** zijn:

- de toegestane x -waarden vormen het **domein** D_f van functie f ;
- de mogelijke y -waarden vormen het **bereik** B_f van functie f ;
- de **nulpunten** van een functie zijn de x -waarden waarvoor geldt: $f(x) = 0$;
- de **extremen** van een functie zijn de y -waarden die de functie maximaal of minimaal heeft binnen een bepaald gebied;
- de **asymptoten** van een functie zijn de lijnen die de grafiek steeds dichterbij nadert naarmate je verder van de oorsprong beweegt; je berekent ze met behulp van **limieten**.

Opgave 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = 6 - \left(\frac{1}{3}x + 5\right)^4$.

- a Beschrijf hoe de grafiek van f uit de bijbehorende standaardfunctie kan ontstaan.
- b Geef de karakteristieke eigenschappen van functie f en plot de grafiek.

Opgave 2

Gegeven is de functie f door $f(x) = -5 + 2\sqrt{3-x}$.

- a Beschrijf hoe de grafiek van f uit de bijbehorende standaardfunctie kan ontstaan.
- b Geef de karakteristieke eigenschappen van functie f en plot de grafiek.

Opgave 3

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} - 4$.

- a Beschrijf hoe de grafiek van f uit de bijbehorende standaardfunctie kan ontstaan.
- b Geef de karakteristieke eigenschappen van functie f en plot de grafiek.

Opgave 4

Gegeven zijn de omschrijvingen van de functies. Geef telkens het functievoorschrift.

- a f is recht evenredig met x en de grafiek gaat door $(15,34)$.
- b g is evenredig met x^4 en de grafiek gaat door $(4,640)$.
- c h is omgekeerd evenredig met $\sqrt{x}$ en de grafiek gaat door $(25,3)$.

Opgave 5

Gegeven is de kwadratische functie f door $f(x) = -0,1x^2 + 10x - 230$.

- a Beschrijf hoe de grafiek van f uit de bijbehorende standaardfunctie kan ontstaan.
- b Geef de karakteristieke eigenschappen van functie f en plot de grafiek.

Opgave 6

- a Elke functie die door transformaties uit een standaard machtsfunctie is ontstaan kan geschreven worden als: $y = k(x - c)^p + d$
Toon dit aan.

- b Elke lineair gebroken machtsfunctie kan door transformaties uit de standaardfunctie $y = \frac{1}{x}$ ontstaan.

Toon aan dat zo'n functie kan worden geschreven in de vorm: $y = \frac{px+q}{rx+s}$.

Theorie

Om te onthouden

Exponentiële en logaritmische functies

Een functie van de vorm $y = a \cdot g^{b(x-c)} + d$ heet een **exponentiële functie** en kan door transformatie ontstaan uit de standaardfunctie $y = g^x$. Altijd is $g > 0$.

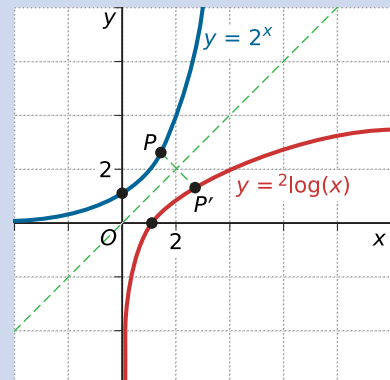
- Als $g > 1$ is de grafiek van $y = g^x$ stijgend en heeft hij een horizontale asymptoot $y = 0$.

Er geldt dan $\lim_{x \rightarrow -\infty} g^x = 0$.

- Als $0 < g < 1$ is de grafiek van $y = g^x$ dalend en heeft hij een horizontale asymptoot $y = 0$.

Er geldt dan $\lim_{x \rightarrow \infty} g^x = 0$.

- Een veel voorkomende exponentiële functie is die met grondtal $e = 2,718281\dots$



Figuur 3

Een functie van de vorm $y = a \cdot g \log(b(x-c)) + d$ heet een **logaritmische functie** en kan door transformatie ontstaan uit de standaardfunctie $y = g \log(x)$. Altijd is $g > 0$.

- Als $g > 1$ is de grafiek van $y = g \log(x)$ stijgend en heeft hij een verticale asymptoot $x = 0$.

Er geldt dan $\lim_{x \downarrow 0} g \log(x) = -\infty$.

- Als $0 < g < 1$ is de grafiek van $y = g \log(x)$ dalend en heeft hij een verticale asymptoot $x = 0$.

Er geldt dan $\lim_{x \downarrow 0} g \log(x) = \infty$.

- Een veel voorkomende logaritmische functie is die met grondtal $e = 2,718281\dots$

Je schrijft de bijbehorende standaardfunctie als $y = \ln(x)$ en hij heet de **natuurlijke logaritme**.

Karakteristieken

Er geldt: $g^x = c$ geeft $x = g \log(c)$ en $g \log(x) = c$ geeft $x = g^c$.

De exponentiële standaardfunctie en de logaritmische standaardfunctie met hetzelfde grondtal zijn elkaar **inverse functie**. Altijd is $g > 0$ en voor de logaritme is ook $g \neq 1$.

De karakteristieken van de exponentiële standaardfunctie f zijn:

- het domein is $D_f = \mathbb{R}$ en het bereik is $B_f = \langle 0, \infty \rangle$;
- de functie heeft geen extremen of nulpunten;
- de x -as is de horizontale asymptoot.

De karakteristieken van de logaritmische standaardfunctie f zijn:

- het domein is $D_f = \langle 0, \infty \rangle$ en het bereik is $B_f = \mathbb{R}$;
- de functie heeft geen extremen of nulpunten;
- de y -as is de verticale asymptoot.

Opgave 7

Gegeven is de functie f met $f(x) = 3 - \frac{1}{4} \cdot 2^{-3x}$.

- a** Beschrijf hoe de grafiek van f uit de bijbehorende standaardfunctie kan ontstaan.
- b** Geef de karakteristieke eigenschappen van functie f en plot de grafiek.

Opgave 8

Gegeven is de functie f met $f(x) = {}^4\log\left(\frac{1}{3}x - 5\right) + 12$.

- a** Beschrijf hoe de grafiek van f uit de bijbehorende standaardfunctie kan ontstaan.
- b** Geef de karakteristieke eigenschappen van functie f en plot de grafiek.

Opgave 9

Geef het voorschrift van de omschreven functies.

- a** De exponentiële functie f die ontstaat door de standaardfunctie met grondtal 2 te vermenigvuldigen met factor 3 ten opzichte van de x -as en te verschuiven met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as.
- b** De exponentiële functie g die ontstaat door de standaardfunctie met grondtal 0,8 te vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as en te verschuiven met 4 ten opzichte van de y -as.
- c** De logaritmische functie h die ontstaat door de natuurlijke logaritme te vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as en te transleren met 2 ten opzichte van de y -as en vervolgens met 4 ten opzichte van de x -as.

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0,5 e^{x-3} - 10$.

- a** Beschrijf hoe de grafiek van f uit de bijbehorende standaardfunctie kan ontstaan.
- b** Geef de karakteristieke eigenschappen van functie f en plot de grafiek.

Opgave 11

Geef van de volgende functies het domein, het bereik en de asymptoten.

- a** $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} - 3$
- b** $g(x) = -e^{x-4} + 4$
- c** $h(x) = \ln(x + 3) + 2$

Theorie

Om te onthouden

Goniometrische functies

De standaard **goniometrische functies** zijn de functies $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ en $y = \tan(x)$, met x in radialen. Dit zijn **periodieke functies**.

Door transformatie kunnen hieruit andere goniometrische functies ontstaan. De bekendste daarvan zijn de **sinusoïden** die de vorm $y = A \sin\left(\frac{2\pi}{p}(x - c)\right) + d$ of $y = A \cos\left(\frac{2\pi}{p}(x - c)\right) + d$ hebben. Hierin is:

- A de **amplitude**, de maximale uitwijking uit de evenwichtsstand;
- p de **periode**;
- c de horizontale verschuiving;
- $y = d$ de **evenwichtsstand**.

De standaardfunctie $y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ heeft:

- een periode van π ;
- verticale asymptoten als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$;

Bekende exacte waarden van sin, cos en tan zijn:

hoek in radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	bestaat niet

Tabel 1

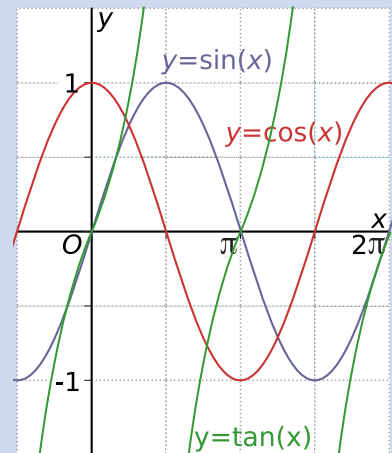
Absolute waarde

Een bijzondere standaardfunctie is de **absolute waarde functie** of **modulusfunctie**:

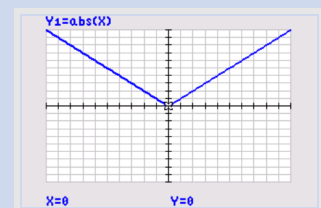
$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Voor deze functie geldt:

- het domein is $D_f = \mathbb{R}$ en het bereik is $B_f = [0, \rightarrow)$;
- de functie heeft een knikpunt $(0,0)$.



Figuur 4



Figuur 5

Opgave 12

Gegeven is de functie: $f(x) = 5 - \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi\right)$.

- a** Beschrijf hoe de grafiek van f uit de bijbehorende standaardgrafiek is ontstaan.
- b** Bereken het exacte snijpunt met de y -as.
- c** Bepaal de evenwichtsstand, de periode, de amplitude en de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van f en plot de grafiek.

Opgave 13

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{3} \cos(4x - \pi) + 3\frac{1}{6}$.

- a** Beschrijf hoe de grafiek van f uit de standaardgrafiek is ontstaan.
- b** Bereken het exacte snijpunt met de y -as.
- c** Bepaal de evenwichtsstand, de periode, de amplitude en de coördinaten van een beginpunt van de van de grafiek van f en plot de grafiek.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = -2 \tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi\right) + 1$.

- a** Beschrijf hoe de grafiek van f uit de standaardgrafiek is ontstaan.
- b** Bereken het exacte snijpunt met de y -as.
- c** Geef de periode, de asymptoten en het punt van symmetrie van de grafiek van f en plot deze grafiek.

Opgave 15

Geef het voorschrift van de omschreven functies.

- a** De sinusöide f die ontstaat door de standaardsinus te vermenigvuldigen met factor 3 ten opzichte van de y -as en te verschuiven met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as.
- b** De sinusöide g die ontstaat door de standaardcosinus te vermenigvuldigen met factor 5 ten opzichte van de x -as, vervolgens te vermenigvuldigen met factor 2 ten opzichte van de y -as en te verschuiven met 4 ten opzichte van de y -as.
- c** De functie h die ontstaat door de standaardtangens te vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as en te transleren met 2 ten opzichte van de y -as en vervolgens met 4 ten opzichte van de x -as.

Opgave 16

Gegeven de functie f door $f(x) = |2x - 4| - 1$.

- a** Hoe kan de grafiek van f ontstaan door transformatie van de bijbehorende standaardfunctie?
- b** Bereken de karakteristieken van f en plot de grafiek.

Theorie

Om te onthouden

Limieten, asymptoten en perforaties

Allerlei functies hebben **asymptoten**. Er geldt:

- Een functie f heeft een **horizontale asymptoot** $y = c$ als er een constante waarde c bestaat waarvoor

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \text{ en/of } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c.$$

- Een functie f heeft een **verticale asymptoot** $x = a$ als er een constante waarde a bestaat waarvoor

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \pm\infty \text{ en/of } \lim_{x \downarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

- Een functie f heeft een **scheve asymptoot** $y = ax + b$ als er een constante waarden a en b bestaan waarvoor

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ax + b \text{ en/of } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ax + b.$$

Bij gebroken functies kun je de scheve asymptoot vinden door de functies te herleiden met behulp van breuksplitsing.

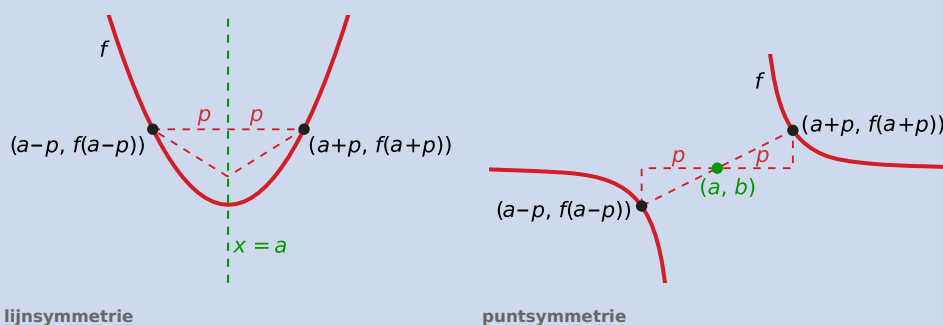
Soms hebben samengestelde functies een **perforatie**.

Een functie f heeft een perforatie met coördinaten (a, c) als $f(a)$ niet gedefinieerd is en er een constante waarde c bestaat waarvoor $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = c$.

Symmetrie van grafieken

Sommige grafieken van functies vertonen een vorm van **symmetrie**:

- Als de grafiek van een functie f **lijnsymmetrisch** is ten opzichte van de lijn $x = a$ dan geldt voor iedere willekeurige p : $f(a - p) = f(a + p)$.
- Als de grafiek van een functie f **puntsymmetrisch** is ten opzichte van punt (a, b) dan geldt voor iedere willekeurige p : $\frac{f(a-p) + f(a+p)}{2} = b$.



Figuur 6

Families van functies

Functievoorschriften waarin een extra variabele voorkomt worden **families van functies** genoemd. Een manier van noteren is $f_p(x)$. Hierbij is p de extra variabele, genaamd de parameter. Afhankelijk van de waarde van p veranderen de karakteristieke eigenschappen van f_p .

Opgave 17

Onderzoek de functies met behulp van limieten op asymptoten en perforaties.

a $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

b $h(x) = \frac{x^2-10x+16}{x-8}$

c $f(x) = \frac{1}{4 \sin^2(x)-3}$

d $h(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

Opgave 18

De functie $f(x) = \frac{2x^2-4x-16}{2x^2+4x}$ heeft twee x -waarden waar geen functiewaarde bij hoort.

Welke limieten horen bij deze functie en wat betekent dit voor de grafiek van f ?

Opgave 19

Bepaal de vergelijking van de scheve asymptoot van de grafiek van: $f(x) = \frac{2x^2+6x-7}{x-3}$

Opgave 20

Toon aan dat de grafiek van de functie f met $f(x) = e^{1-\frac{1}{2}x^2}$ lijnsymmetrisch is in de y -as.

Opgave 21

Toon aan dat de grafiek van de functie $f(x) = 2 \cos(2x) + 1$ puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.

Opgave 22

Gegeven is de familie van functies: $f_p(x) = \frac{1}{x^2-2x+p}$.

Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f twee verticale asymptoten?

Verwerken

Opgave 23: De kromme van Agnesi

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

De grafiek van deze functie is onder andere bestudeerd door de Italiaanse wiskundige Maria Agnesi (1718-1799).

De grafiek van f_a ontstaat uit de grafiek van f door twee transformaties: een vermenigvuldiging van de grafiek van f ten opzichte van de x -as met een positieve factor a en vervolgens een vermenigvuldiging van de zo verkregen grafiek ten opzichte van de y -as met dezelfde factor a .

Stel een functievoorschrift op voor f_a . Schrijf je antwoord als één breuk.

bron: examen vwo wiskunde B in 2016, eerste tijdvak

Opgave 24: Touchscreens

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. De tijd die je nodig hebt om in een menu het juiste icoon te vinden, hangt mede af van het aantal iconen in het menu. Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule: $T(n) = b \cdot 2 \log(n+1)$

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal iconen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.

Leg aan de hand van de formule uit wat er met de tijd T gebeurt wanneer het aantal iconen n steeds groter wordt.

naar: examen vwo wiskunde A in 2014, tweede tijdvak

Opgave 25: Tan delen door sin

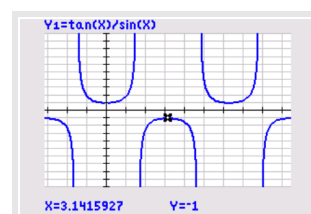
Je ziet hier de grafiek van de functie f gegeven door:

$$f(x) = (\tan(x))/(\sin(x))$$

op het domein $[-\pi, 3\pi]$ getekend door een grafische rekenmachine.

Ogenschojnlijk is er een punt op de grafiek aangegeven.

- Leg uit dat het hier niet om een exact punt van de grafiek kan gaan.
- Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = \pi$.



Figuur 7

Opgave 26: De vergelijking van Antoine

Als een vloeistof een gesloten ruimte niet geheel opvult, dan verdampt een deel van de vloeistof. De damp oefent druk uit op de wanden van de gesloten ruimte: de dampdruk. De grootte van de dampdruk hangt af van de soort vloeistof en van de temperatuur in de gesloten ruimte. Voor het verband tussen de dampdruk en de temperatuur geldt de volgende formule:

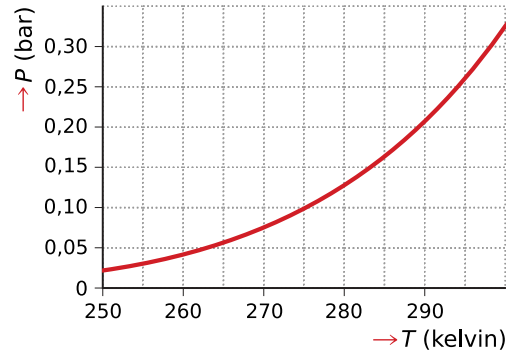
$$\log(P) = k - \frac{m}{T-n} \quad (\text{met } T > n)$$

Hierin is P de dampdruk in bar en T de temperatuur in kelvin en zijn k , m en n constanten die afhangen van de soort vloeistof.

Voor aceton, een zeer vluchtige vloeistof, geldt (bij benadering) $k = 4,146$, $m = 1144$ en $n = 53,15$, dus

$$\log(P) = 4,146 - \frac{1144}{T-53,15} \quad (\text{met } T > 53,15).$$

In de figuur is voor aceton de grafiek getekend van de dampdruk P als functie van de temperatuur T voor temperaturen tussen 250 en 300 kelvin.



Figuur 8

Uit de figuur krijgen we de indruk dat de functie P stijgend is. Beredeneer aan de hand van de formule zonder te differentiëren dat de functie inderdaad stijgend is.

bron: examen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak

2 Vergelijkingen en ongelijkheden

Inleiding



Figuur 1

De trein is een veelgebruikt vervoermiddel in Nederland. In vergelijking met andere landen rijden er genoeg treinen en rijden ze vaak op tijd. Studenten reizen relatief vaak met de trein. Ze ontvangen gratis het zogenaamde studentenreisproduct van de overheid. Daarnaast kun je in de trein nog je lessen voorbereiden wat in de auto niet lukt, omdat je op de weg moet letten of wordt afgeleid door de bestuurder. De overheid wil het studentenreisproduct het liefst afschaffen om zo meer geld in het daadwerkelijke onderwijs te kunnen steken.

Verkennen

Opgave V1

Een studente uit Delft wil weten wat het voor haar betekent als het studentenreisproduct wordt afgeschaft. Mocht dat zo zijn, dan heeft zij na het betalen van een abonnement een reisbudget van € 3861,00 te besteden. Ze heeft voor een abonnement gekozen waarmee tijdens de spits met 20% korting mag worden gereisd en daarbuiten met 40%. Ze reist elke dag heen en weer tussen Delft en Bergen op Zoom. Een enkele treinreis op dit traject kost € 14,30 vol tarief. Ze moet voor haar studie 190 keer in Delft zijn. Hoeveel enkele reizen met 20% korting moet ze maken om haar budget uit te geven?

Theorie

Om te onthouden

Vergelijkingen, basistechnieken

Bij het oplossen van een **vergelijking** gebruik je meestal benaderingstechnieken. Het **inklemmen** is een bekende methode, maar meestal gebruik je gewoon programmatuur, bijvoorbeeld in je grafische rekenmachine.

Bij het **algebraïsch** of **exact** oplossen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ pas je de basistechnieken toe, zoals:

- de **balansmethode** waarbij je aan beide zijden hetzelfde optelt of aftrekt, of met hetzelfde vermenigvuldigt (behalve met 0 of door hetzelfde deelt (behalve door 0);
- de **terugrekenmethode** om een vergelijking van de vorm $f(x) = c$ op te lossen en bij functie f een rekenschema kan worden gemaakt;
- **ontbinden in factoren**;
- **kwadraat afsplitsen** en de **abc-formule**) bij kwadratische vergelijkingen.

De abc-formule gebruik je bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen van de vorm: $ax^2 + bx + c = 0$ De oplossingen zijn: $x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ v $x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ Hier-voor geldt: $D = b^2 - 4ac$ Als $D < 0$ heeft de vergelijking geen oplossing, als $D = 0$ heeft de vergelijking één oplossing, als $D > 0$ heeft de vergelijking twee oplossingen.

Ga wel altijd na of de gevonden oplossingen binnen de domeinen van de functie f en g vallen!

Bij een **stelsel** van twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je de vergelijkingen combineren met behulp van **substitutie** of **eliminatie**. Daarbij valt één onbekende weg, waardoor de vergelijking oplosbaar wordt.

Vergelijkingen, machtsfuncties

Bij machtsfuncties $y = x^n$ gebruik je bij het oplossen van een vergelijking of ongelijkheid:

als $x^p = c$, dan is $x = c^{\frac{1}{p}}$ voor elke mogelijke waarde van p .

Enkele bijzondere situaties zijn:

- $p = n$ is geheel, positief en even: $x^n = c$ geeft $x = \pm c^{\frac{1}{n}} = \pm \sqrt[n]{c}$ als $c \geq 0$.
- $p = n$ is geheel, positief en oneven: $x^n = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$.
- $p = \frac{1}{n}$ en n is geheel en positief en even: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = c$ geeft $x = c^n$ als $c \geq 0$.
- $p = \frac{1}{n}$ en n is geheel en positief en oneven: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = c$ geeft $x = c^n$.
- Als $p = -n$ negatief is, kun je de vergelijking herleiden: $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = c$ geeft $x^n = \frac{1}{c}$.

Ongelijkheden

Een **ongelijkheid** los je op door eerst de bijbehorende vergelijking op te lossen. Daarna gebruik je de grafiek van de functie(s) om de oplossing van de ongelijkheid af te lezen.

Opgave 1

Los exact op.

- a** $x^5 = 3x^3$
- b** $x^6 - 3 = 2x^3$
- c** $(x + 2)^2 = |x + 2|$
- d** $(1 - x)^4 = (2x - 5)^2$

Opgave 2

Los exact op.

- a** $\left(\frac{1}{3}x + 5\right)^4 = 81$
- b** $x - 5 = \sqrt{x + 3}$
- c** $5 - \frac{135}{(2x-1)^3} = 0$
- d** $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x}{x-3}$

Opgave 3

Los exact op.

- a**
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$
- b**
$$\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 4x - 4y = 8 \end{cases}$$

Opgave 4

Los algebraïsch op.

- a** $5x^2 + 16 \leq x^2 + 16x$
- b** $x < 3\sqrt{x} + 4$
- c** $x \leq \frac{3}{x} + 4$

Opgave 5

Gegeven is de familie van functies: $f_p(x) = 3x^2 + px + 5$.

- a** Bereken exact voor welke waarden van p de grafiek van f twee nulpunten heeft.
- b** Bereken exact voor welke waarden van p de grafiek van f die van $y = 16x - 22$ raakt.

Theorie

Om te onthouden

Vergelijkingen met exponentiële en logaritmische functies

Belangrijk zijn de rekenregels:

De **rekenregels voor machten** ($g > 0$)

$$g^0 = 1 \qquad g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$g^{-a} = \frac{1}{g^a} \qquad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g} \qquad (g^a)^b = g^{ab}$$

De **rekenregels voor logaritmen** ($g > 0$ en $g \neq 1$)

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$${}^g\log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$$

Bij het algebraïsch oplossen van exponentiële vergelijkingen isoleer je het exponentiële deel van de vergelijking met behulp van de rekenregels voor machten totdat er $g^{f(x)} = c$ (met $c > 0$) of $g^{f(x)} = g^{h(x)}$ staat.

- $g^{f(x)} = c$ geeft $f(x) = {}^g\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$
- $g^{f(x)} = g^{h(x)}$ geeft $f(x) = h(x)$

Bij de exponentiële groeifunctie $N = b \cdot g^t$ met $g > 1$ kun je de **verdubbelingstijd** berekenen door $g^t = 2$ op te lossen.

Deze tijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid b .

Bij $0 < g < 1$ kun je de **halveringstijd** van een hoeveelheid berekenen door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Bij het algebraïsch oplossen van logaritmische vergelijkingen isoleer je het logaritmische deel van de vergelijking met behulp van de rekenregels voor logaritmen totdat er ${}^g\log(f(x)) = c$ of ${}^g\log(f(x)) = {}^g\log(h(x))$ staat.

- ${}^g\log(f(x)) = c$ geeft $f(x) = g^c$
- ${}^g\log(f(x)) = {}^g\log(h(x))$ geeft $f(x) = h(x)$

$y = {}^g\log(f(x))$ voor elke functie f bestaat alleen voor $f(x) > 0$. Controleer daarom altijd of de oplossingen voor x aan deze voorwaarde voldoen.

Ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies

Bereken bij een ongelijkheid eerst de gelijkheid en bepaal daarmee, met behulp van een grafiek, de oplossing van de ongelijkheid. Houd hierbij rekening met eventuele asymptoten.

Opgave 6

Los exact op.

- a $3^{2x-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$
- b $(\sqrt{3})^{x^2} = 27^{\frac{1}{2}x-1}$
- c $4^x - 4 \cdot 2^x = 45$
- d $e^x \cdot x^2 = \frac{e^x}{x}$

Opgave 7

Los exact op.

- a ${}^3\log(x^2 - 1) = -1$
- b $\ln(x^2 - 2x) = \ln(2x - 3)$
- c ${}^5\log(x^2 + x) = {}^5\log(-x)$
- d ${}^2\log(x^2) = \frac{1}{2}\log(x) + 1$

Opgave 8

In een natuurgebied verdrievoudigd het aantal konijnen zich per jaar. Aan de andere kant neemt het aantal vossen af met 65% per jaar.

- a Geef de verdubbelingstijd van de konijnenbevolking in maanden afgerond op één decimaal.
- b Geef de halveringstijd van de vossenbevolking in maanden afgerond op één decimaal.
- c Op een gegeven moment zijn er 1000 konijnen en 20 vossen in dit gebied. Na hoeveel maanden zullen er honderd keer zoveel konijnen dan vossen zijn? Rond het antwoord af op één decimaal.

Opgave 9

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a $16 \cdot 4^{x-1} > 1$
- b $\ln(x^2) < 1$
- c $4^{-2x} \geq 12$
- d ${}^2\log(x^2 + 4x + 4) \geq -3$

Opgave 10

In een gastank wordt geleidelijk aan de druk opgevoerd. De temperatuur T in K neemt toe volgens de formule $T(t) = 390 - 390 \cdot 0,95^t$

Hierbij is t in minuten. Bereken in seconden nauwkeurig wanneer het gas in de tank op 80% van de maximale temperatuur is.

Theorie

Om te onthouden

Vergelijkingen met goniometrische functies

Belangrijk zijn de rekenregels:

Symmetrieformules	Verbanden tussen sin en cos
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
Somformules	Verdubbelingsformules
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$	$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$ $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$
Formules van Simpson	
$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$ $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(p-q)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)$ $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$ $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$	

Tabel 1

Bij het algebraïsch oplossen van goniometrische vergelijkingen probeer je met behulp van basistechnieken (balansmethode, ontbinden in factoren e.d.) en goniometrische formules te herleiden tot $\sin(a) = c$, $\cos(a) = c$ of $\tan(a) = c$ of tot $\sin(a) = \sin(b)$, $\cos(a) = \cos(b)$ of $\tan(a) = \tan(b)$.

Dan gebruik je:

- uit $\sin(a) = c$ volgt: $a = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee a = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$;
uit $\sin(a) = \sin(b)$ volgt: $a = b + k \cdot 2\pi \vee a = \pi - b + k \cdot 2\pi$;
- uit $\cos(a) = c$ volgt: $a = \arccos(c) + k \cdot 2\pi \vee a = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi$;
uit $\cos(a) = \cos(b)$ volgt: $a = b + k \cdot 2\pi \vee a = -b + k \cdot 2\pi$;
- uit $\tan(a) = c$ volgt: $a = \arctan(c) + k \cdot \pi$;
uit $\tan(a) = \tan(b)$ volgt: $a = b + k \cdot \pi$.

Ongelijkheden met goniometrische functies

Bereken bij een ongelijkheid eerst de gelijkheid en bepaal daarmee, met behulp van een grafiek, de oplossing van de ongelijkheid. Houd hierbij rekening met eventuele asymptoten.

Opgave 11

Los zo mogelijk exact op. Rond anders af op twee decimalen.

- a $4 \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 3$
- b $\sin\left(3x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$
- c $6 \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = 3\sqrt{3}$
- d $\tan\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\pi\right) - 4 = 0$

Opgave 12

Los zo mogelijk exact op. Rond anders af op twee decimalen.

- a $1 + \cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$
- b $\sin(x) = 2 \sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$
- c $3 \sin^2(x) = \cos^2(x)$
- d $\sin^2(x) = -\cos^2(x) + \sin(x)$

Opgave 13

Los algebraïsch op in de gegeven domeinen. Geef exacte antwoorden.

- a $2 \cos\left(\frac{1}{3}(x + \pi)\right) + 1 \leq 0$ op $[-2\pi, 4\pi]$.
- b $\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) + 3 > 4$ op $[0, 2\pi]$.
- c $-\sqrt{3} \tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \geq 3$ op $[-\pi, \pi]$.

Opgave 14

Los algebraïsch op in de gegeven domeinen. Geef exacte antwoorden.

- a $1 + \sin(2x) \geq \cos(2x)$ op $[0, 2\pi]$.
- b $\sin(x) \cos(x) < \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ op $[0, 2\pi]$.
- c $\tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) > -\tan(x)$ op $[0, \pi]$.

Opgave 15

Toon aan dat $\frac{1}{\tan(x)} = -\tan\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

Verwerken

Opgave 16: Droogligtijd

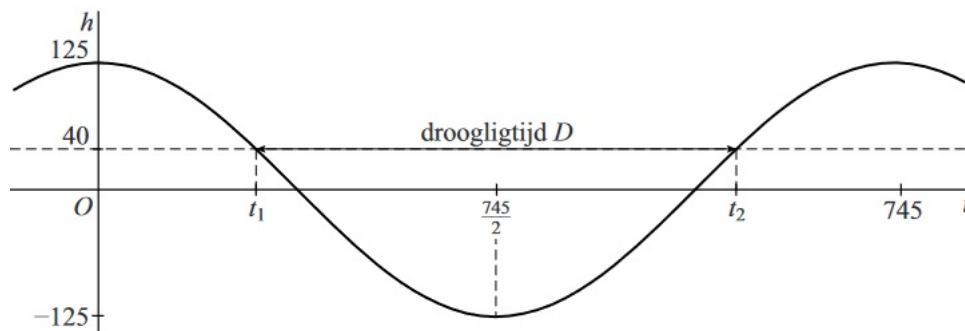
In de Waddenzee varieert de waterhoogte in de loop van de tijd. Eb en vloed wisselen elkaar voortdurend af in een getijdencyclus met een periode van ongeveer 745 minuten. De waterhoogte in het oostelijke deel van de Waddenzee kan worden benaderd met de formule:

$$h = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{745}t\right)$$

Hierbij is h de waterhoogte in cm ten opzichte van NAP (Normaal Amsterdams Peil) en is t de tijd in minuten. Tijdstip $t = 0$ komt overeen met een moment waarop $h = 125$.

In het oostelijk deel van de Waddenzee liggen verschillende zandbanken die gedurende een deel van een getijdencyclus droog komen te liggen. De droogligtijd D is het aantal minuten per getijdencyclus dat een zandbank niet geheel onder water ligt. De droogligtijd hangt af van de hoogte van de zandbank: de hoogte van het hoogste punt van de zandbank ten opzichte van NAP.

In het oostelijk deel van de Waddenzee bevindt zich een zandbank met een hoogte van 40 cm boven NAP. In de figuur is de grafiek van de waterhoogte h getekend. Tevens is de hoogte van deze zandbank weergegeven. Gedurende één periode zijn er twee tijdstippen waarop de waterhoogte h gelijk is aan de hoogte van de zandbank. We noemen deze tijdstippen t_1 en t_2 . Het verschil tussen t_2 en t_1 is de droogligtijd D .



Figuur 2

Bereken de droogligtijd D van deze zandbank. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.

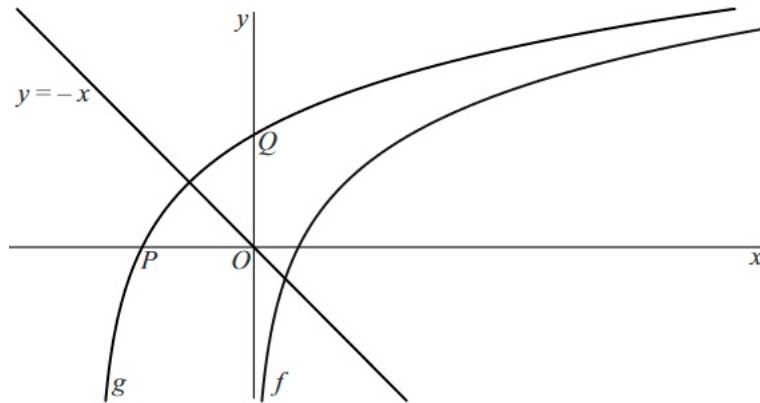
bron: examen vwo wiskunde B in 2016, tweede tijdvak

Opgave 17: Gespiegelde punten

Voor $x > 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 \cdot \ln(x)$.

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, waarbij $a > 1$. De grafiek van g snijdt de x -as in punt P en de y -as in punt Q .

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q . Zie de figuur.



Figuur 3

Bereken deze waarde van a . Rond je antwoord af op twee decimalen.

bron: examen vwo wiskunde B in 2014, tweede tijdvak

Opgave 18: De leeftijd van ons zonnestelsel

Volgens sterrenkundigen zijn de meteorieten die op aarde terechtkomen tegelijk met ons zonnestelsel ontstaan.

Meteorieten bestaan onder andere uit de stoffen rubidium-87 (Rb-87), strontium-87 (Sr-87) en strontium-86 (Sr-86). Het radioactieve Rb-87 vervalst tot Sr-87. De hoeveelheid Sr-86 verandert niet.

Om de leeftijd t (in jaren) van een meteoriet te bepalen gebruikt men onder andere de verhouding:

$$a(t) = \frac{\text{hoeveelheid Rb-87}}{\text{hoeveelheid Sr-86}} \text{ op tijdstip } t$$

Deze verhouding verandert voortdurend vanaf het ontstaan van een meteoriet. Er geldt:

$$a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

Hierin is λ de vervalconstante van Rb-87. Die is $1,42 \cdot 10^{-11}$ per jaar. De constante $a(0)$ is de verhouding tussen de hoeveelheden Rb-87 en Sr-86 op $t = 0$.

Bereken op algebraïsche wijze in hoeveel tijd de waarde van a gehalveerd wordt. Geef je antwoord in miljarden jaren nauwkeurig.

bron: examen vwo wiskunde B in 2013, tweede tijdvak

Opgave 19: Lijnstuk en parabool

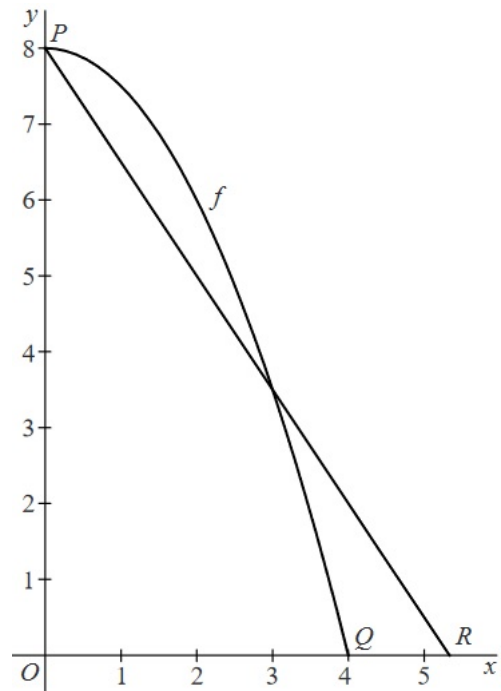
Op het domein $[0,4]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$. De randpunten van de grafiek van f zijn

$P(0,8)$ en $Q(4,0)$. Zie de figuur.

Verder is gegeven een lijnstuk PR met eindpunten $P(0,8)$ en $R(a,0)$, waarbij $a > 4$. In de figuur is voor een waarde van a ook het lijnstuk PQ getekend.

Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f en het lijnstuk PR elkaar snijden in het midden van PR . Bereken exact deze waarde van a .

bron: examen vwo wiskunde B in 2013, tweede tijdvak

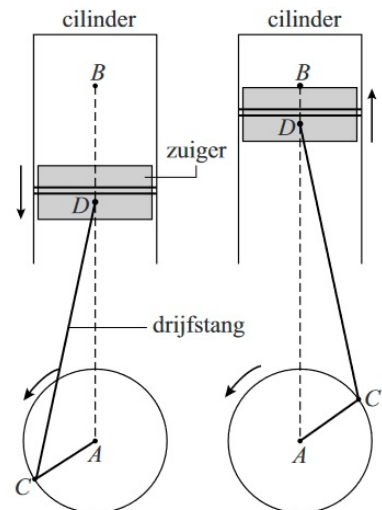


Figuur 4

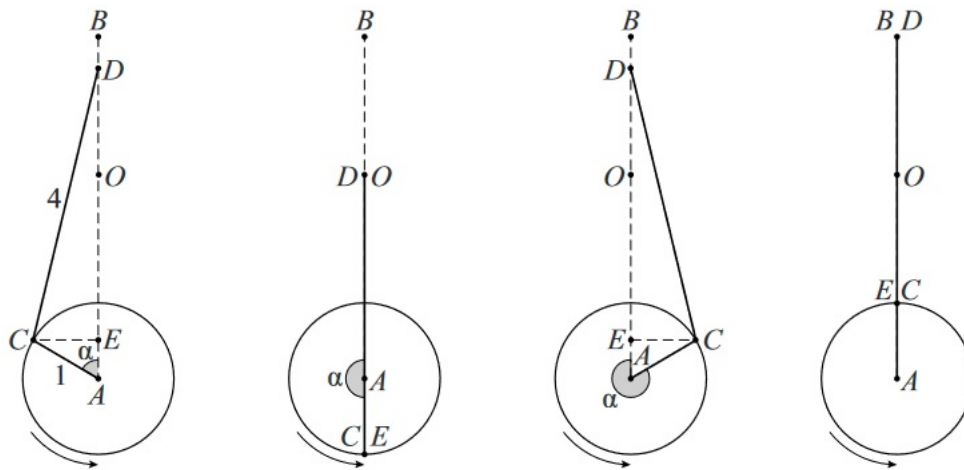
Opgave 20: Automotor

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In **figuur 5** zijn twee standen getekend. In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.

In **figuur 6** zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 heeft. De grootte van hoek CAD (in radialen) noemen we α . Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD .



Figuur 5



Figuur 6

Punt D beweegt op en neer tussen zijn hoogste punt B ($\alpha = 0$ en $\alpha = 2\pi$) en zijn laagste punt ($\alpha = \pi$). De afstand van D tot B noemen we s . s hangt af van α .

Er geldt $s = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$, met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

- a** Bewijs dit voor de meest linkse van de in figuur 2 getekende standen (dus voor $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$).

In de techniek wordt s soms benaderd met behulp van de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$.

Om te onderzoeken of de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$ een goede benadering voor s geeft, wordt het maximale verschil tussen s en z berekend.

- b** Bereken in drie decimalen nauwkeurig dit maximale verschil.

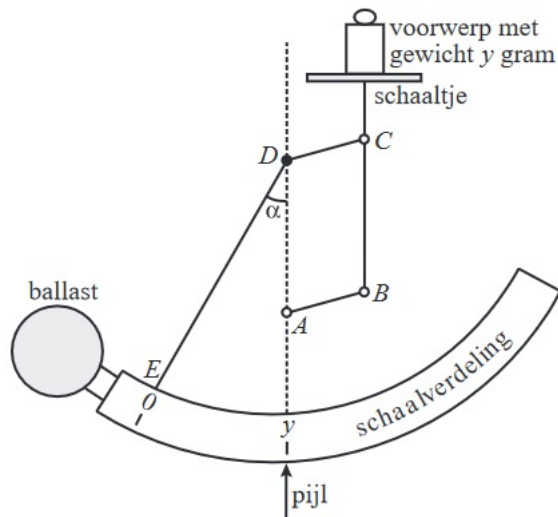
bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2016, eerste tijdvak

Opgave 21: Brievenweger

Hier zie je een foto van een brievenweger. Op het schaaltje staat een voorwerp met een gewicht van 64 gram.

In de figuur is schematisch een soortgelijke brievenweger weergegeven met een voorwerp dat y gram weegt.

De pijl waarbij je het gewicht afleest, ligt loodrecht onder het draaipunt D . De ballast zorgt ervoor dat het verbindingsstuk DE verticaal staat als er niets op het schaaltje ligt. De verbinding tussen de stukken ED en DC is vast.



Figuur 8

Als een voorwerp van y gram op het schaaltje geplaatst wordt, draait het verbindingsstuk CDE om punt D over een hoek van α radialen. De cirkelvormige schaalverdeling en de ballast draaien ook en de pijl wijst op de schaalverdeling het getal y aan. Het schaaltje blijft horizontaal door de scharnieren in de punten A , B en C . Zie figuur.

Bij deze brievenweger kan met behulp van statica de formule $y = 70 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$ afgeleid worden (α in radialen).

Bereken exact de waarde van α waarvoor geldt $y = 70$.

bron: examen vwo wiskunde B1 in 2007, eerste tijdvak



Figuur 7

3 Formules opstellen

Inleiding



Figuur 1

De aarde heeft te maken met getijden van de zee: eb en vloed. Deze getijden worden veroorzaakt door de aantrekkingskracht van de maan. De maan draait om de aarde, omdat de laatste ongeveer 81 keer zo zwaar is. Maar de maan oefent ook een aantrekkingskracht uit op de aarde, waardoor watermoleculen in de richting van de maan worden getrokken. Hierdoor ontstaan 'vloedbergen' op aarde, hetgeen eb en vloed tot gevolg heeft.

Doordat de maan rond de aarde draait, is te voorspellen hoe het water op aarde op een bepaald moment wordt aangetrokken door de maan en wat grofweg het bijbehorende getij is. Een nauwkeurige voorspelling is echter lastig. Hiervoor zou je namelijk rekening moeten houden met het feit dat de maan niet een perfect rondje om de aarde draait en dat de stand van de aardas ook nog eens verandert. Bovendien moet je rekening houden met allerlei stromingen als gevolg van de wind.

In de figuur is de waterstand van Harlingen opgenomen en je ziet hoe de (versimpelde) verwachting afwijkt van de daadwerkelijk gemeten waarden.

Verkennen

Opgave V1

Als je op de Waddenzee aan het zeilen bent, ben je erg afhankelijk van eb en vloed. Bij eb komt het wad namelijk snel droog te liggen.

In jouw buurt schommelt de waterstand op zeker moment tussen -0,31 en 0,07 m ten opzichte van NAP. De tijd tussen twee tijdstippen van hoogwater is ongeveer 12:49 uur. Met deze gegevens kun je de waterhoogte h in m boven NAP benaderen door de functie:

$$h(t) = -0,12 + 0,19 \cdot \sin(23,827 - 0,490 \cdot t)$$

met t de tijd in uur. Laat zien dat deze formule overeen komt met de gegevens en bereken hoelang je de tijd hebt om te varen (per vloedmoment) als je boot een diepgang van 0,5 m heeft en de bodem op -0,45 m NAP ligt.

Theorie

Om te onthouden

Formules opstellen, lineaire en kwadratische functies

Een **lineaire functie** waarvan de grafiek in een x, y -assenstelsel door de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ gaat, heeft een formule van de vorm $y = ax + b$ waarin:

- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ de **richtingscoëfficiënt** is;
- de waarde van b bepaald kan worden door a en A of B in $y = ax + b$ in te vullen.

Een **kwadratische functie** waarvan de grafiek in een x, y -assenstelsel is gegeven door:

- de top $P(p, q)$ en een punt $A(x_A, y_A)$ heeft een formule van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$, waarbij je a bepaalt door het punt A in te vullen;
- de snijpunten met de x -as $M(m, 0)$ en $N(n, 0)$ en een punt $A(x_A, y_A)$ heeft een formule van de vorm $y = a(x - m)(x - n)$, waarbij je a bepaalt door het punt A in te vullen;
- drie punten $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ en $C(x_C, y_C)$ heeft een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$, waarbij je a , b en c bepaalt door de drie punten in te vullen en het stelsel vergelijkingen op te lossen.

Formules opstellen, machtsfuncties

Een **machtsfunctie** heeft in een x, y -assenstelsel de vorm $y = a(x - p)^r + q$.

- als $r = n \geq 2$ een bekend geheel getal is en behalve de top (bij even n) of het symmetriepunt (bij oneven n) $P(p, q)$ is nog een punt $A(x_A, y_A)$ bekend, dan bepaal je a nog door het punt A in te vullen;
- als $p = 0$ en $q = 0$ en er zijn twee punten van de grafiek bekend, dat bereken je a en r door beide punten in te vullen en het stelsel vergelijkingen op te lossen (door ze op elkaar te delen).

Formules opstellen, inverse functies

De **inverse** functie van een functie f is de terugrekenfunctie van f . Het functievoorschrift van f^{inv} vind je door het functievoorschrift van f te herleiden tot x wordt uitgedrukt in y : $x = f^{\text{inv}}(y)$ en vervolgens de x -coördinaat y te noemen en de y -coördinaat x : $y = f^{\text{inv}}(x)$.

Er geldt: $f(f^{\text{inv}}(x)) = x$ en door de verwisseling van x en y is de grafiek van f^{inv} het spiegelbeeld van die van f bij spiegeling in $y = x$.

Een functie f heeft alleen een inverse als op het gegeven domein van f voor elke y -waarde hooguit één x -waarde bestaat.

Formules opstellen door combineren en/of schakelen

Nieuwe functievoorschriften kunnen ontstaan door functievoorschriften door middel van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen met elkaar te combineren.

Bijvoorbeeld kunnen $f(x) = 5x^2$ en $g(x) = 2\sqrt{x+3}$ worden opgeteld tot $h(x) = 5x^2 + 2\sqrt{5x^2+3}$ of vermenigvuldigt tot $h(x) = 5x^2 \cdot 2\sqrt{5x^2+3}$.

Nieuwe functievoorschriften kunnen ontstaan door functievoorschriften als een ketting te schakelen.

Bijvoorbeeld kunnen $f(x) = 5x^2$ en $g(x) = 2\sqrt{x+3}$ worden geschakeld tot $h(x) = g(f(x)) = 2\sqrt{5x^2+3}$.

Opgave 1

Gegeven een lineaire functie f waarvan de grafiek door $A(2,1)$ en $B(4,-3)$.

Gegeven een kwadratische functie g waarvan de grafiek een parabool is met $T(3,5)$ en die door $C(5,3)$ gaat.

- a Stel een voorschrift op van functie f .
- b Stel een voorschrift op van functie g .
- c Bereken de lengte van het lijnstuk dat de parabool afsnijdt van de grafiek van f .

Opgave 2

De functies f en g zijn kwadratische functies. Geef hun functievoorschrift in de vorm: $y = ax^2 + bx + c$

- a De grafiek van f heeft nulpunten op $x = -3$ en $x = 5$ en gaat door het punt $(7,4)$.
- b De grafiek van g gaat door $(1;5,5)$, $(5;1,5)$ en $(6,3)$.

Opgave 3

Geef het functievoorschrift van de functies in de vorm: $y = a(x - p)^n + q$.

- a Functie g is derdegraads en de grafiek gaat door $(4,1)$ en heeft symmetriepunt $(2,6)$.
- b Functie h is vierdegraads en snijdt de lijn $y = 12$ in $x = -3$ en $x = 7$. Voor de top geldt $y = 24$.

Opgave 4

Een machtsfunctie heeft de vorm: $N(t) = at^r$. De grafiek gaat door $(4; 3,2)$ en $(9; 10,8)$.

- a Stel het bijbehorende functievoorschrift op.
- b Bereken algebraïsch voor welke waarden van t geldt $N(t) < 100$. Geef je antwoord in gehele waarden van t nauwkeurig.

Opgave 5

Stel van de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^3 - \frac{1}{2}$ de inverse functie op en teken beide grafieken in één figuur.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \sqrt{x} - 4$ en $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

- a Stel het functievoorschrift op voor $h(x) = f(g(x))$.
- b Stel het functievoorschrift op voor $h^{\text{inv}}(x)$

Theorie

Om te onthouden

Formules opstellen, exponentiële en logaritmische functies

De standaardvorm van een exponentiële functie is $N = b \cdot g^t$. Deze functie beschrijft de groei van een hoeveelheid N over de loop van de tijd t . N heeft een asymptoot voor $N = 0$. Het getal b is de **beginwaarde**. Dit is de waarde van N op $t = 0$. Het grondtal g is de **groefactor** per tijdseenheid. Bij $g > 1$ is er sprake van een procentuele toename.

Bij $0 < g < 1$ is er sprake van een procentuele afname.

Bij een **procentuele toename** van $n\%$ hoort een groefactor: $g = 1 + \frac{n}{100}$

Bij een **procentuele afname** van $n\%$ hoort een groefactor: $g = 1 - \frac{n}{100}$

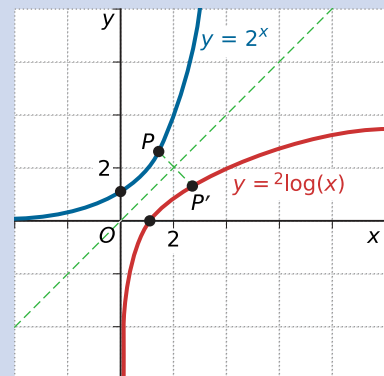
Als twee punten $A(t_A, N_A)$ en $B(t_B, N_B)$ met $t_A > t_B$ van een exponentiële groefunctie gegeven zijn dan kan de formule ervan worden opgesteld. Er geldt:

$$g^{t_B - t_A} = \frac{N_B}{N_A} \text{ ofwel } g = \left(\frac{N_B}{N_A} \right)^{\frac{1}{t_B - t_A}}.$$

De waarde van b kan vervolgens bepaald worden door g en de coördinaten van A of B in de vergelijking $N(t) = b \cdot g^t$ in te vullen en deze vergelijking op te lossen.

$y = g^x$ is gelijkwaardig met $x = {}^g \log(y)$, de exponentiële functies $y = g^x$ en de logaritmische functies $y = {}^g \log(x)$ zijn daarom elkaars inverse functie.

Elke getransformeerde exponentiële functie $f(x) = a \cdot g^{\frac{1}{b}(x-c)} + d$ kan met behulp van de rekenregels voor machten herleid worden tot de vorm $y = p \cdot r^x + q$. De grafiek van die functie gaat door het punt $(0, p + q)$ en $y = q$ is de horizontale asymptoot.



Figuur 2

Opgave 7

De functies beschrijven een exponentieel verband van de vorm: $y = a \cdot g^x$.

Stel het functievoorschrift op.

- a De grafiek van f gaat door het punt $(0,5)$ en heeft groeifactor $\frac{3}{4}$.
- b De grafiek van g gaat door $(1; 1,5)$ en $(2; 0,75)$.
- c De grafiek van h gaat door $(3; 144,7)$ en $(8; 184,68)$. Rond de groeifactor af op twee decimalen en het begingetal op gehele.

Opgave 8

Inflatie heeft als effect dat de waarde van een geldeenheid afneemt. In de tabel staat een (hypothetisch) overzicht van de waarde van één euro in IJslandse kronen (ISK) over de loop van de tijd.

tijd	januari 2020	juli 2020	januari 2021	juli 2021	augustus 2021	oktober 2021
aantal ISK per € 1,00	211	360	639	1153	1255	1497

Tabel 1

Toon aan dat de wisselkoers van de IJslandse kroon ten opzichte van de euro hier bij benadering exponentieel toeneemt en stel een bijpassende formule op.

Opgave 9

Schrijf de exponentiële functies in de vorm: $y = a \cdot g^x + b$.

- a $f(x) = 2^{3x+2}$
- b $g(x) = e^{1\frac{1}{2}x-1} + \ln(4)$
- c $h(x) = \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}x} + 3^{x-1}$

Opgave 10

Bepaal van de volgende functies de inverse.

- a $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} + 5$
- b $g(x) = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}x - 3\right) + 1$

Opgave 11

Bepaal de inverse van de functie: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x + 1}$.

Theorie

Om te onthouden

Formules opstellen, sinusoiden

Een **sinusoïde** is een functie van de vorm $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ of functie $g(x) = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$. Indien evenwichtsstand, amplitude, periode en beginpunt van de sinusoïde gegeven zijn kan de formule worden opgesteld. Vanwege de periodiciteit van sinusoiden zijn er oneindig veel mogelijkheden om het functievoorschrift te noteren. Als je je beperkt tot notaties waarbij $a > 0$, $b > 0$ en $0 \leq c \leq 2\pi \cdot b$ dan geldt:

- de evenwichtsstand is $y = d$;
- de amplitude is a ;
- de periode p is $\frac{2\pi}{b}$, dus $b = \frac{2\pi}{p}$;
- een mogelijk beginpunt voor de sinus is (c, d) en voor de cosinus is $(c, d + a)$.

Een **harmonische trilling** is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde.

Bij een harmonische trilling wordt er in plaats van over de periode van de functie gesproken over de trillingstijd van de beweging. Er geldt:

De trillingstijd is $T = p = \frac{2\pi}{b}$.

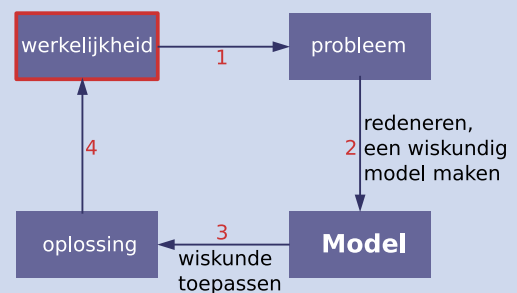
De frequentie f is het aantal trillingen per seconde. De frequentie is $f = \frac{1}{T}$.

Modelleren

Wiskunde wordt veel toegepast in allerlei takken van wetenschap. Wanneer een probleem ontstaat wordt dit vertaald naar wiskundige termen. Je spreekt dan van een **wiskundig model**. Zo'n model bestaat doorgaans uit een aantal formules, vergelijkingen die de situatie beschrijven. Denk bijvoorbeeld aan verhoudingen tussen afmetingen, bevolkingsgroei bij een bepaalde beginhoeveelheid, of de draagcapaciteit van een vrachtwagen.

Bij het opstellen van een wiskundig model moet je rekening houden met:

- Welke aannames moet je doen of zijn er gedaan?
- Welke grootheden en eenheden gebruik je of zijn er gebruikt?
- Welke formules beschrijven het model?
- Welke wiskundige technieken kun je gebruiken?
- Hoe controleer je de uitkomsten van je berekeningen?



Figuur 3

Opgave 12

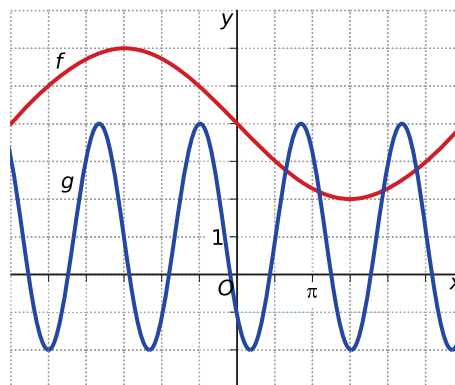
Stel het functievoorschrift op van de volgende sinusoides.

- De grafiek van functie f heeft evenwichtsstand 25, amplitude 25, periode 3 en beginpunt $(0,25)$.
- De grafiek van functie g heeft evenwichtsstand -3 , de maxima zijn 5 en liggen met afstand 4π uit elkaar. Een beginpunt van een sinusfunctie ligt bij $x = 2$.

Opgave 13

In de figuur staan de grafieken van twee sinusoiden f en g .

- f is een cosinusfunctie. Stel een mogelijk voorschrift van f op.
- g is een sinusfunctie. Stel een mogelijk voorschrift van g op.



Figuur 4

Opgave 14

Een slinger wordt op tijdstip $t = 0$ in een uiterste stand losgelaten. De uitwijking a ten opzichte van de evenwichtsstand na t seconden wordt gegeven door de formule $a(t) = 5 \sin\left(\frac{2}{3}\pi(t + 4)\right)$ met a in centimeter en t in seconden.

- Bereken de trillingstijd en frequentie van deze slingerbeweging.
- Een andere slinger heeft een frequentie van 5 hertz en een maximale uitwijking van 4,5 centimeter. De uitwijking is maximaal bij $t = 0$. Geef een formule voor de uitwijking b van deze slinger.

Opgave 15

Gegeven is functie $f(x) = \sqrt{4-x}$

Van rechthoek $PQRS$ ligt P op de positieve x -as, Q op de grafiek van f en heeft punt S de coördinaten $(-1,0)$. De oppervlakte A van rechthoek $PQRS$ is gelijk aan 4.

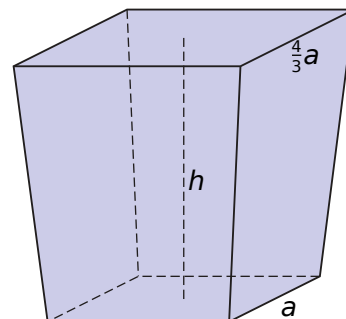
Bereken exact de x -coördinaat van punt Q .

Opgave 16

Een fabrikant maakt blikken prullenbakken met een inhoud van 30 L. De bakken hebben de vorm van een afgeknotte vierkante piramide. Voor de fabrikant is het belangrijk dat er zo weinig mogelijk blik wordt gebruikt in het maken van deze prullenbakken.

Stel dat het grondvlak van de prullenbak een vierkant is met ribbe r cm en de bovenrand van de prullenbak een vierkant met waarvan de ribben $\frac{4}{3}$ keer zo groot zijn als die van het grondvlak. De bovenkant is open en de hoogte is h cm.

Bij welke waarde voor a is de hoeveelheid gebruikt materiaal het laagst? Rond af op millimeters.



Figuur 5

Verwerken

Opgave 17: Kettinglijn

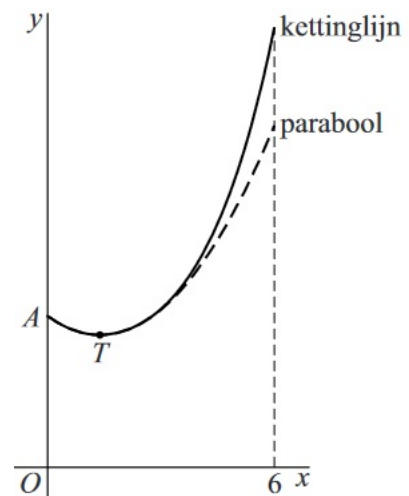
De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2}$

In de figuur is de grafiek van f , een zogenaamde kettinglijn, op het domein $[0,6]$ getekend. Punt T is het laagste punt van de grafiek en punt A is het gemeenschappelijke punt van de grafiek met de y -as. De x -coördinaat van T is $\ln(4)$.

In de figuur zie je ook de parabool door A met top T getekend. In deze figuur is te zien dat de parabool de kettinglijn aanvankelijk goed benadert, maar dat voor grotere waarden van x de benadering minder goed wordt.

Van de parabool door A met top T kan een vergelijking van de vorm $y = a(x - b)^2 + c$ worden opgesteld.

Bereken de waarde van x waarvoor het (verticale) hoogteverschil tussen de kettinglijn en deze parabool gelijk is aan 1. Rond je antwoord af op één decimaal.



Figuur 6

bron: examen vwo wiskunde B in 2016, eerste tijdvak

Opgave 18: Limietpunt

Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door:

$$f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$$

Bewijs dat voor elke waarde van c de functie f_c de inverse is van zichzelf.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2016, eerste tijdvak

Opgave 19: Helderheid van sterren

Aan de sterrenhemel bevinden zich heldere en minder heldere sterren. De helderheid van een ster werd in de oudheid reeds aangegeven met een getal, de magnitude van de ster. Zeer heldere sterren kregen magnitude 1. Nauwelijks zichtbare sterren kregen magnitude 6. Een kleine waarde betekent dus een grote helderheid. In deze opgave is m de magnitude.

Tegenwoordig meet men de hoeveelheid licht die van een ster wordt ontvangen. De helderheid van een ster wordt dan vaak uitgedrukt in lux (een eenheid voor verlichtingssterkte). In deze opgave is L de helderheid in lux.

In de tabel staan voor een aantal helderheden de waarden van m en L .

m	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
L	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$

Tabel 2

Tussen L en m bestaat een exponentieel verband van de vorm $L = 10^{p+qm}$.

Leid uit de tabelgegevens bij $m = 1,0$ en $m = 6,0$ af dat $p = -5,6$ en $q = -0,4$.

bron: examen vwo wiskunde B in 2015, eerste tijdvak

Opgave 20: Door de asymptoot

Voor $x > \frac{1}{2}$ is de functie f gegeven door $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$.

De functie g is de inverse van f . Er geldt: $g(x) = \frac{1+2e^x}{2-e^x}$.

Bewijs dit.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2015, tweede tijdvak

Opgave 21: Hoogwaterstanden

Onder invloed van de maan ontstaan eb en vloed. Een periode van eb en vloed duurt 12 uur en 25 minuten en de hoogste waterstand gedurende zo'n periode heet een hoogwaterstand. Elke periode levert dus één hoogwaterstand op.

Om in te schatten hoe groot de risico's bij hoogwaterstanden zijn, stelt men op grond van een groot aantal metingen een formule op. Deze formule is van de vorm

$$f(h) = 10^{a-b \cdot h}, \text{ met } a \text{ en } b \text{ constanten.}$$

Hierin is h de hoogte in meters boven NAP en $f(h)$ het gemiddeld aantal keren per jaar dat een hoogwaterstand de waarde van h overschrijdt.

In Hoek van Holland geldt voor hoogwaterstanden tussen 0,9 m en 2,5 m boven NAP: $a = 4,3$ en $b = 1,9$.

- a** Bereken welke waarde van h volgens de formule gemiddeld één keer per jaar wordt overschreden. Rond je antwoord af op één decimaal.

Als de zeespiegel, en daarmee ook de hoogwaterstanden, 0,1 m zou stijgen, zou dit leiden tot een groter gemiddeld aantal keren per jaar dat de waarde $h = 2,5$ in Hoek van Holland wordt overschreden.

- b** Bereken hoeveel keer zo groot dit gemiddeld aantal keren zou zijn.

Metingen tonen aan dat de waarden $a = 4,3$ en $b = 1,9$ voor $h = 2,5$ tot te kleine waarden van $f(h)$ leiden. Men vermoedt dat een hoogwaterstand van 3,9 meter boven NAP, zoals bij de watersnoodramp in Zuidwest-Nederland in 1953, gemiddeld ongeveer eens per 100 jaar voorkomt. Volgens de formule zou dat maar eens per 1288 jaar zijn. We zoeken daarom nieuwe waarden voor a en b , die aan de volgende voorwaarden voldoen:

- $h = 2,5$ levert dezelfde waarde van $f(h)$ op als met de oude waarden voor a en b het geval was;
- $h = 3,9$ levert voor $f(h)$ de waarde 0,01 op.

- c** Bereken de nieuwe waarden van a en b . Rond deze waarden af op één decimaal.

bron: examen vwo wiskunde B in 2014, eerste tijdvak

Opgave 22: De leeftijd van ons zonnestelsel

Volgens sterrenkundigen zijn de meteorieten die op aarde terechtkomen tegelijk met ons zonnestelsel ontstaan.

Meteorieten bestaan onder andere uit de stoffen rubidium-87 (Rb-87), strontium-87 (Sr-87) en strontium-86 (Sr-86). Het radioactieve Rb-87 vervalt tot Sr-87. De hoeveelheid Sr-86 verandert niet.

Om de leeftijd t (in jaren) van een meteoriet te bepalen gebruikt men onder andere de verhouding:

$$a(t) = \frac{\text{hoeveelheid Rb-87}}{\text{hoeveelheid Sr-86}} \text{ op tijdstip } t$$

Deze verhouding verandert voortdurend vanaf het ontstaan van een meteoriet. Er geldt:

$$a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

Hierin is λ de vervalconstante van Rb-87. Die is $1,42 \cdot 10^{-11}$ per jaar. De constante $a(0)$ is de verhouding tussen de hoeveelheden Rb-87 en Sr-86 op $t = 0$.

De waarde $a(0)$ is onbekend en verschilt per meteoriet. Daarom kunnen we de leeftijd van een meteoriet niet bepalen op grond van de gemeten waarde $a(t)$ alleen. Leeftijdsbepaling is wel mogelijk door naast $a(t)$ ook gebruik te maken van een tweede verhouding:

$$b(t) = \frac{\text{hoeveelheid Sr-87}}{\text{hoeveelheid Sr-86}} \text{ op tijdstip } t$$

Omdat Rb-87 vervalt tot Sr-87 en Sr-87 zelf niet vervalt, verandert de waarde van de som van $a(t)$ en $b(t)$ voor een bepaalde meteoriet niet in de loop der tijd. Dit betekent dat $a(t) + b(t) = a(0) + b(0)$ voor elke $t \geq 0$.

- a** Uit $a(t) + b(t) = a(0) + b(0)$ en $a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}$ volgt:

$$b(t) + (1 - e^{-\lambda t})a(t) = b(0)$$

Toon dit aan.

Van twee even oude meteorieten, M_1 en M_2 , zijn de waarden $a(t)$ en $b(t)$ bepaald, waarbij t de leeftijd van deze meteorieten is. Zie de tabel.

meteoriet	$a(t)$	$b(t)$
M_1	0,60	0,739
M_2	0,20	0,713

Tabel 3

Door gebruik te maken van:

- $b(t) + (1 - e^{-\lambda t})a(t) = b(0)$, met $\lambda = 1,42 \cdot 10^{-11}$ per jaar,
- de aanname dat $b(0)$ voor elke meteoriet hetzelfde is en
- de gegevens uit de tabel

kan de leeftijd van de meteorieten (en volgens sterrenkundigen dus ook die van ons zonnestelsel) worden berekend.

- b** Bereken deze leeftijd. Rond je antwoord af op miljarden jaren.

bron: examen vwo wiskunde B in 2013, tweede tijdvak

4 Differentiaal- en integraalrekening

Inleiding



Figuur 1

In Nederland zijn veel sluisen te vinden. Sluisen zorgen ervoor dat schepen probleemloos van A naar B kunnen varen. Kenmerkend voor een sluis is dat deze tussen twee vaarwegen ligt die niet hetzelfde waterpeil hebben. Door het zogenaamde schutten kan het waterpeil in de sluis worden verhoogd of juist verlaagd. Op deze manier komt een schip op dezelfde hoogte te liggen als de andere vaarweg. Het mechanisme waarmee het waterpeil geregeld wordt, verschilt per sluis. Zo kan dit geregeld worden door de ene sluisdeur een klein beetje open te zetten, zodat het water kan gaan stromen. Een andere manier is door middel van het wegpompen van het water naar een bassin of een andere sluis.

Verkennen

Opgave V1

Een schutsluis is aangelegd om het hoogteverschil tussen een kanaal en meer te overbruggen. Het waterpeil aan de kant van het kanaal is gelijk aan 3,6 m ten opzichte van de sluisbodem en aan de kant van het meer is het waterpeil 3 m. Van de schutsluis is bekend dat het waterpeil in de sluis zakt volgens de volgende formule, waarbij t de tijd in seconde en h de hoogte in meter ten opzichte van de sluisbodem is.

$$h(t) = (1,449 - 0,00166t)^2 + 1,5$$

Deze formule is geldig op het gebied vanaf $t = 0$ tot het moment dat voor het eerst $h(t) = 1,5$ geldt. Bereken hoe snel het waterniveau daalt op het moment dat de sluis het niveau van het meer bereikt.

Theorie

Om te onthouden

De afgeleide van een functie

Het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a, b]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dit is ook de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.

Het **differentiaalquotiënt** is het differentiequotiënt op het interval $[a, a + h]$ waarbij $h \rightarrow 0$: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Dit differentiaalquotiënt is gelijk aan de afgeleide functie $f'(a)$.

De **afgeleide functie** $f'(x)$ geeft de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de functie f in het punt met x -coördinaat x .

Afgeleiden van standaardfuncties, differentieerregels

Het bepalen van de afgeleide functie noem je **differentiëren**. Daarvoor gelden de volgende regels:

- De **somregel**:
Als $h(x) = f(x) + g(x)$, dan is $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- De **productregel**:
Als $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, dan is $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- De **quotiëntregel**:
Als $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dan is $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.
- De **kettingregel**:
Als $h(x) = f(g(x))$, dan is $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Verder ken je de afgeleiden van de volgende standaardfuncties:

functie	afgeleide	functie	afgeleide
$f(x) = ax^r$	$f'(x) = arx^{r-1}$	$f(x) = g^x$	$f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$f(x) = g \log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

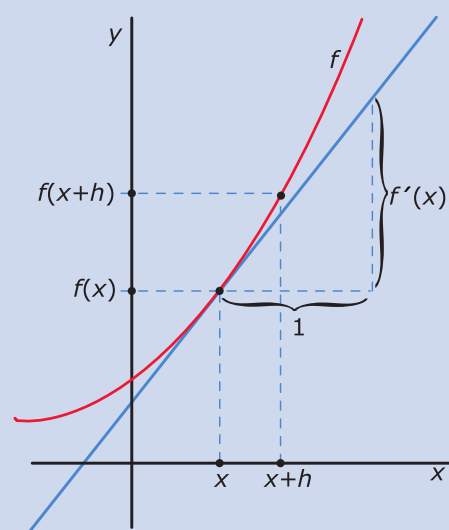
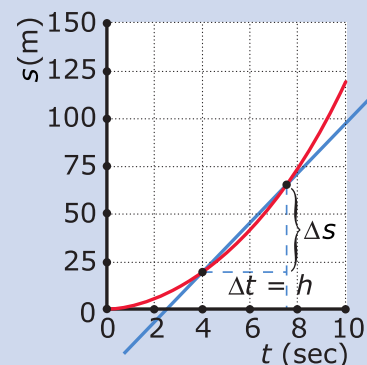
Tabel 1

Raaklijnen, extremen en buigpunten

De **raaklijn** aan een functie f in een punt p heeft richtingscoëfficiënt $f'(p)$ en met behulp van het gegeven punt kun je de vergelijking van die raaklijn opstellen.

De **extremen** van een functie f zitten vaak in punten waarin de raaklijn een helling van 0 heeft. Daarom bereken je extremen door $f'(x) = 0$ op te lossen en vervolgens met behulp van de grafiek (of een **tekenschema**) deze extremen vast te stellen.

De **buigpunten** van de grafiek van een functie f zijn punten waarin de helling van de raaklijn een extreme waarde heeft. Daarom bereken je buigpunten door $f''(x) = 0$ op te lossen en vervolgens met behulp van de grafiek (of een tekenschema van f') vast te stellen of er inderdaad van een buigpunt sprake is.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 6 - 0,5x^2$.

- a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1,2]$ en beschrijf de betekenis van dit getal.
- b Geef met behulp van het differentiequotiënt op $[x, x + h]$ het functievoorschrift van de afgeleide van $f(x)$.

Opgave 2

Differentieer de volgende functies.

- a $f(x) = 3 \ln(x) + 5x - 2^{0,5x}$
- b $g(x) = \tan(2x)$
- c $h(x) = x \cdot e^{2x}$
- d $k(x) = \sin^2(3x)$

Opgave 3

Stel de vergelijking van de raaklijn l op aan de grafiek van de functie $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ voor $x = 4$.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $f(x) = e^x + e^{-2x}$.

Bereken exact de extreme waarde van f .

Opgave 5

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 e^x + \frac{1}{x}$.

Onderzoek algebraïsch of de grafiek van f bij het punt A met $x_A = 1$ toe- of afnemend stijgt of daalt.

Opgave 6

Op het domein $[0, 2\pi]$ is gegeven $f_p(x) = \sin^3(x) + p \cdot \sin(x)$.

- a Bereken het aantal buigpunten van $f_{-1}(x)$
- b Bereken exact voor welke waarde van p geldt: $f_p(x) = \frac{1}{4}$ is een maximum.

Theorie

Om te onthouden

De raaklijn aan de grafiek van een functie door een punt buiten die grafiek

Gegeven is functie f en punt $A(x_A, y_A)$ buiten de grafiek van f .

Om de **vergelijking van een raaklijn** aan de grafiek van f door punt A op te kunnen stellen, noem je het **raakpunt** op de grafiek van f punt $P(p, f(p))$.

Er geldt dan voor de richtingscoëfficiënt van een raaklijn $l: y = ax + b$, dat

$$a = f'(p) \wedge a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p) - y_A}{p - x_A}.$$

Dit levert waarden voor p op, waarmee de coördinaten van de raakpunten P berekend kunnen worden en de vergelijkingen van de raaklijnen kunnen worden opgesteld.

Functies waarvan de grafieken elkaar raken of loodrecht snijden

- De grafieken van de functies f en g **raken elkaar in een punt** $A(x_A, y_A)$ als $f(x_A) = g(x_A) \wedge f'(x_A) = g'(x_A)$ (linker figuur).

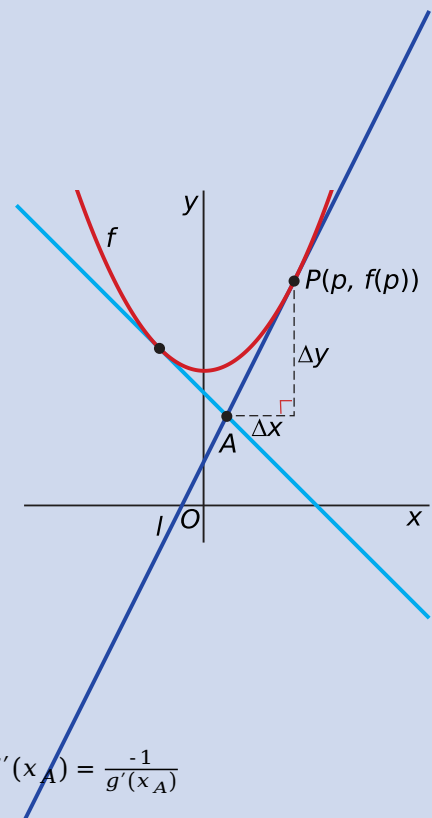
Oplossen van dit stelsel vergelijkingen levert x_A en dus de coördinaten van A op.

- De grafieken van de functies f en g **snijden el-**

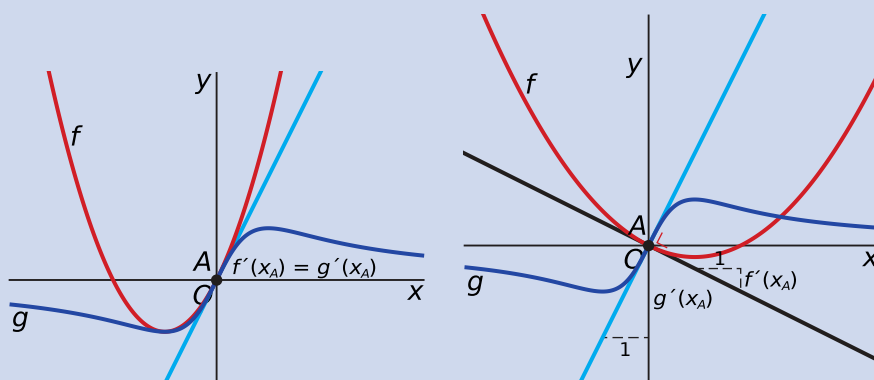
kaar loodrecht in een punt $A(x_A, y_A)$ als $f(x_A) = g(x_A) \wedge f'(x_A) = \frac{-1}{g'(x_A)}$

(rechter figuur).

Oplossen van dit stelsel vergelijkingen x_A en dus de coördinaten van A op.



Figuur 3



Figuur 4

Opgave 7

Gegeven zijn de functies: $f_p(x) = px - \ln(x)$.

Stel een formule op van de kromme waarop de toppen van de grafieken van f_p liggen.

Opgave 8

Gegeven is functie: $f(x) = x\sqrt{3+x}$.

- a Bereken exact voor welke waarde van p de vergelijking $f(x) = p$ twee oplossingen heeft.
- b Geef de waarden van a waarvoor de vergelijking $f(x) = ax$ één oplossing heeft.

Opgave 9

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

De lijn l gaat door $A(0, -2)$ en raakt de grafiek van f . Stel de vergelijking op van l .

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{x^2-6x+9} - 1$.

- a Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f .
- b Bewijs dat de raaklijnen aan de grafiek van f door de nulpunten elkaar loodrecht snijden.

Opgave 11

Gegeven zijn de functievoorschriften: $f(x) = x^2 - x$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$.

Bereken algebraïsch voor welke waarde(n) van p de grafieken van f en g_p elkaar loodrecht snijden.

Opgave 12

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \frac{2+4\sin(x)}{3+2\sin(x)}$ en $g_p(x) = p - 1 + p \cdot \sin(x)$.

Bereken voor welke waarde(n) van p de extremen van de grafieken van f en g_p elkaar raken.

Theorie

Om te onthouden

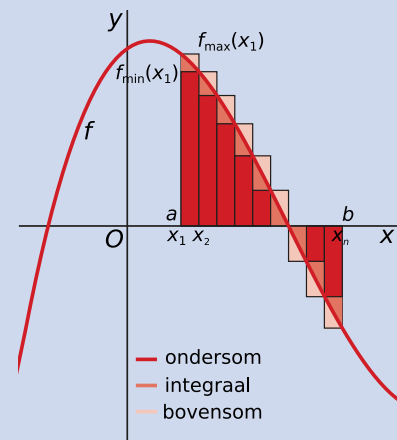
De integraal van een functie

Om de **integraal** van een functie f op het interval $[a, b]$ te kunnen berekenen wordt dit interval in n deelintervallen verdeeld met breedte Δx .

Als $\Delta x \rightarrow 0$ dan is de som van alle waarden van $f(x_k) \cdot \Delta x$ met $1 \leq k \leq n$ gelijk aan de integraal $\int_a^b f(x) dx$.

Als a en b bekend zijn, heet $\int_a^b f(x) dx$ een **bepaalde integraal**.

Met de ondersom $S_n = \sum_{k=1}^n f_{\min}(x_k) \cdot \Delta x$ en met de bovensom $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^n f_{\max}(x_k) \cdot \Delta x$ kan de integraal benaderd worden.



Als $f(x) > 0$ voor elke x op het interval $[a, b]$ dan is $\int_a^b f(x) dx > 0$. **Figuur 5**

Als $f(x) < 0$ voor elke x op het interval $[a, b]$ dan is $\int_a^b f(x) dx < 0$.

De functies F heten **primitieve** functies van de **integrand** f als geldt:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Hierbij is a een vaste grenswaarde.

Volgens de **hoofdstelling van de integraalrekening** geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Primitiveren

De volgende primitieven van standaardfuncties moet je kennen:

functie	primitieve	functie	primitieve
$f(x) = ax^n$ met $n \neq -1$	$F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$f(x) = g^x$	$F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$

Tabel 2

Voor het primitiveren van samengestelde functies gelden twee regels:

- de **somregel voor primitiveren**:
Als $h(x) = f(x) + g(x)$, dan is $H(x) = F(x) + G(x) + c$.
- de **kettingregel voor primitiveren**:
Als $h(x) = f(ax + b)$, dan is $H(x) = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + c$.

De mogelijkheden om met behulp van deze regels een primitieve te vinden zijn beperkt. Soms is het noodzakelijk om een functie eerst te herleiden voordat je hem kunt primitiveren. In andere gevallen kun je de integraal alleen met de grafische rekenmachine benaderen.

Opgave 13

Geef de primitieve van de volgende functies:

- a $f(x) = 1\frac{2}{3}x^4$
- b $g(x) = 5x\sqrt{x}$
- c $h(x) = \frac{e}{x}$
- d $j(x) = \frac{7}{x^2\sqrt[4]{x^3}}$
- e $k(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$
- f $l(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Opgave 14

Stel het functievoorschrift van de primitieve F van $f(x) = \frac{2x-3}{x^3}$ waarvoor geldt $F(1) = 2$.

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = 3x^2 - 6$.

- a De grafiek van de primitieve raakt de x-as.
Stel de formules van deze primitieven op.
- b De integraal van f op het interval $[-2, p]$ is gelijk aan -4 .
Bereken met behulp van de primitieve van f alle mogelijke waarden van p .

Opgave 16

Bereken indien mogelijk de integralen exact. Benader anders met de grafische rekenmachine en rond het antwoord af op drie decimalen.

- a $\int_{-4}^0 (5 \cdot 2^x + 3) dx$
- b $\int_1^2 (3x^2 + \sin(x)) dx$
- c $\int_{\frac{1}{3}}^3 \left(\frac{1}{3x+1}\right) dx$
- d $\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right) dx$
- e $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} (\cos(2x) - \cos^2(x)) dx$

Opgave 17

Bewijs dat $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$ de primitieve is van $f(x) = \tan(x)$ is.

Theorie

Om te onthouden

Oppervlakte berekenen met behulp van integralen

Geldt op $[a, b]$ dat $f(x) \geq g(x)$, waarbij moet gelden dat de functies f en g op het hele interval $[a, b]$ bestaan en differentieerbaar zijn, dan is de **oppervlakte** van het vlakdeel V dat door beide grafieken wordt ingesloten op dat interval gelijk aan:

$$\text{opp}(V) = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

Inhoud berekenen van omwentelingslichamen

Een figuur die ontstaat door het wentelen van een vlak om een as heet een **omwentelingslichaam**.

De inhoud I van het lichaam dat je krijgt als je het vlak ingesloten door de grafiek van de functie $y = f(x)$ en de x -as op het interval $[a, b]$ wentelt om de x -as is:

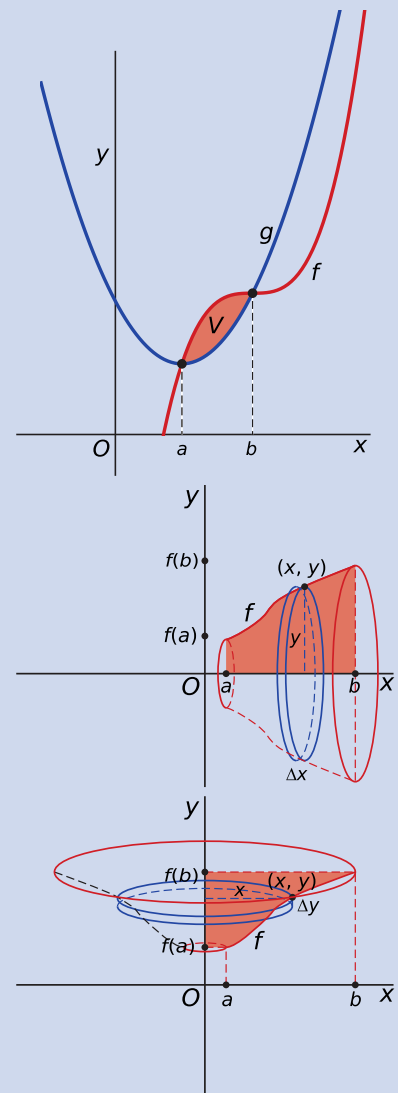
$$I = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

Als het vlak V ingesloten wordt door de grafiek van de functies $y = f(x)$ en $y = g(x)$ op het interval $[a, b]$ waarbij $f(x) \geq g(x) \geq 0$ of waarbij $f(x) \leq g(x) \leq 0$ dan is de inhoud I van het lichaam dat je krijgt bij omwenteling van het vlak V om de x -as:

$$I = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx - \int_a^b \pi (g(x))^2 \, dx$$

De inhoud I van het lichaam dat je krijgt als je het vlak ingesloten door de grafiek van de functie $y = f(x)$ en de y -as op het interval $[a, b]$ wentelt om de y -as is:

$$I = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi x^2 \, dy = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi (f^{\text{inv}}(y))^2 \, dy$$



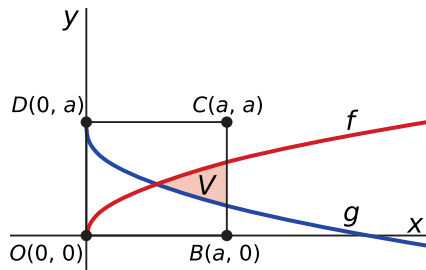
Figuur 6

Opgave 18

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{4-x}$ en de x -as. Bereken de oppervlakte van V exact.

Opgave 19

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g_a(x) = a - \sqrt{x}$, met $0 < a < 4$. Vlakdeel V is ingesloten door de grafieken van f en g_a , en de lijn $x = a$.



Figuur 7

Bekijk ook vierkant $OBCD$ met hoekpunten $O(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$ en $D(0,a)$.

- Druk de oppervlakte van V uit in a .
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke a de oppervlakte van V de helft van die van vierkant $ABCD$ is.

Opgave 20

De grafiek van $f_r(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ beschrijft een halve cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal r . Bewijs dat de inhoud van een bol met straal r gelijk is aan $I = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Opgave 21

Gegeven zijn de functies $f(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 9$ en $g(x) = -x + 9$. Samen sluiten ze twee vlakdelen in: V en W .

- Bewijs dat de verhouding tussen de oppervlaktes van de vlakdelen $\text{opp}(V) : \text{opp}(W)$ gelijk is aan $32 : 5$.
- Vlakdeel W wordt gewenteld rondom de x -as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam.

Opgave 22

Het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x) = \ln(x-1)$, de lijn $x = 4$ en de x -as, wordt gewenteld om de y -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam I dat daardoor ontstaat.

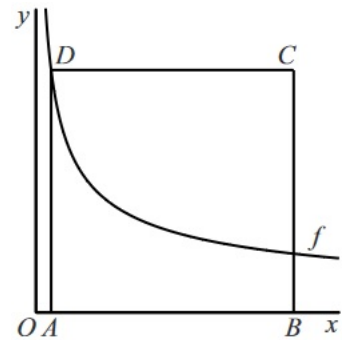
Verwerken

Opgave 23: Vierkant bij een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$

Van vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x -as en het hoekpunt D op de grafiek van f . Zie figuur 1. De x -coördinaten van A en B noemen we respectievelijk a en b , met $0 < a < b$. De coördinaten van D zijn dan $(a, \frac{16}{\sqrt{a}})$. In figuur II zijn enkele mogelijke situaties voor vierkant $ABCD$ getekend.

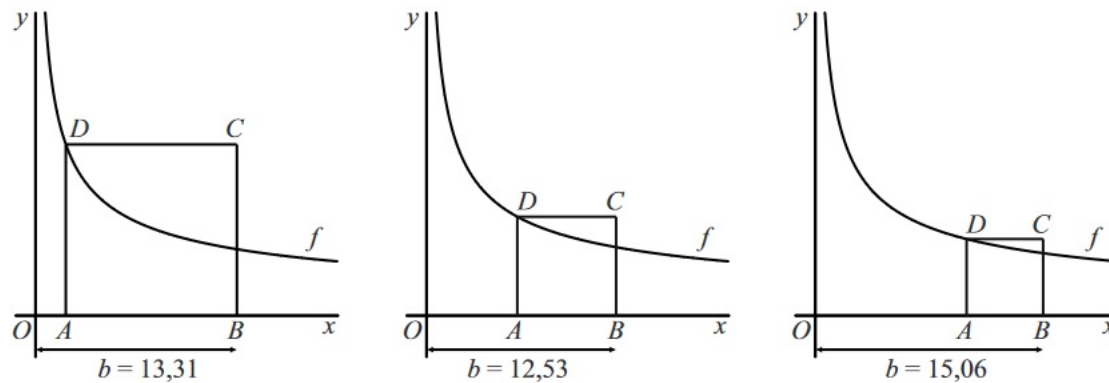
Voor $a = 1$ ontstaat het vierkant met zijde 16. V is het deel van dit vierkant dat zich boven de grafiek bevindt. Vlakdeel V wordt gewenteld om de x -as.



Figuur 8

- a Bereken exact de inhoud van het bijbehorende omwentelingslichaam.

In figuur 2 zijn enkele mogelijke situaties voor vierkant $ABCD$ getekend.



Figuur 9

Bij de getekende situaties is de afstand van punt B tot de oorsprong aangegeven. Deze afstand b hangt af van a , de x -coördinaat van A . Als a vanaf 0 toeneemt, neemt b eerst af en vervolgens weer toe. Er is dus een waarde van a waarvoor b minimaal is.

- b Druk b uit in a en bereken vervolgens exact deze minimale waarde van b .

bron: examen vwo wiskunde B in 2016, eerste tijdvak

Opgave 24: Eerste- en derdegraadsfunctie

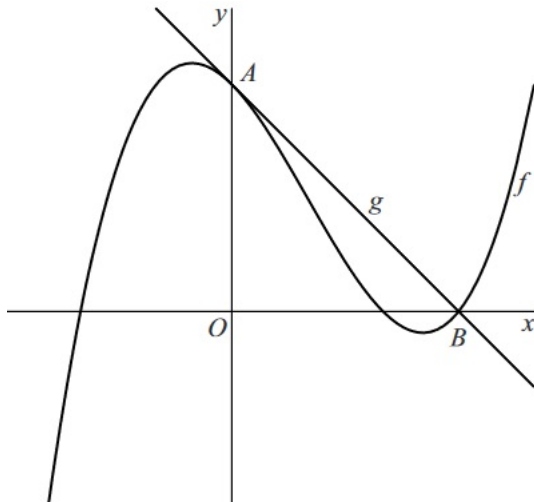
De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2})$ en $g(x) = -x + 1\frac{1}{2}$.

De grafieken van f en g snijden beide de y -as in het punt $A(0, 1\frac{1}{2})$ en de x -as in het punt $B(1\frac{1}{2}, 0)$.

De grafiek van g raakt in punt A aan de grafiek van f .

- a Toon dit aan met behulp van differentiëren.

In de figuur zijn de grafieken van f en g getekend.



Figuur 10

De grafiek van f verdeelt driehoek OAB in twee delen.

- b** Toon met een exacte berekening aan dat de oppervlakte van het linkerdeel twee keer zo groot is als de oppervlakte van het rechterdeel.

De functie h is gegeven door $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

- c** Bereken exact de coördinaten van de perforatie en stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van h .

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2013, tweede tijdvak

Opgave 25: Verzadigingsgraad van hemoglobine

Zuurstof wordt in het menselijk lichaam getransporteerd door de hemoglobine in het bloed. De zuurstof wordt in de longen aan de hemoglobine gebonden en in de weefsels weer afgegeven. Het percentage van de hemoglobine dat zuurstof aan zich bindt, wordt de **verzadigingsgraad van hemoglobine** genoemd. Deze verzadigingsgraad hangt af van de **partiële zuurstofdruk**; dit is het deel van de totale luchtdruk in de longen dat veroorzaakt wordt door de zuurstof.

In 1910 heeft de fysioloog Hill gevonden dat onder bepaalde omstandigheden het verband tussen de partiële zuurstofdruk p en de verzadigingsgraad v van hemoglobine kan worden benaderd met de

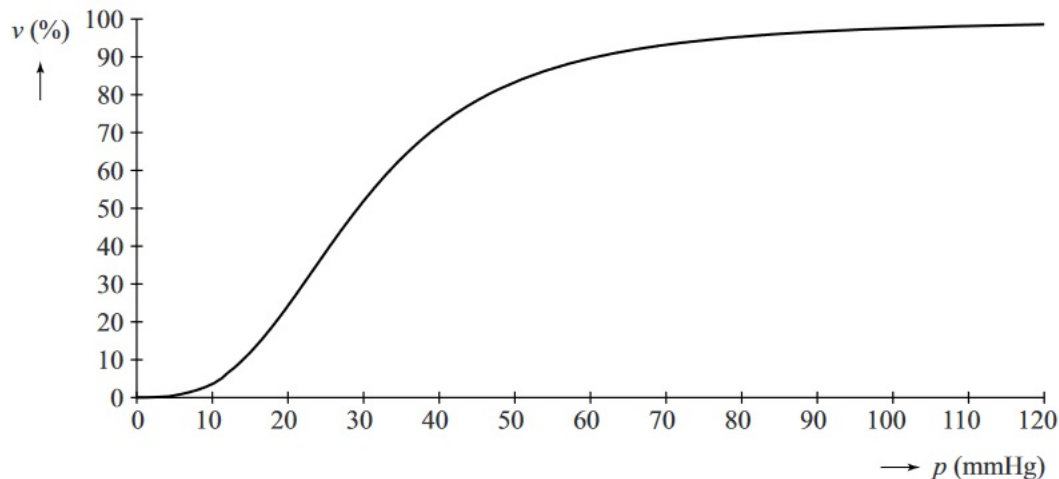
$$\text{formule: } v = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}.$$

Hierin is:

- v de verzadigingsgraad van hemoglobine in procenten en
- p de partiële zuurstofdruk in mmHg (millimeter kwik, de toen gebruikte eenheid voor druk).

- a** Bereken de partiële zuurstofdruk als de verzadigingsgraad van hemoglobine 75% is. Rond je antwoord af op een geheel aantal mmHg.

In de figuur is de grafiek getekend van v als functie van p volgens de benaderingsformule van Hill.



Figuur 11

- b** Bereken met behulp van de afgeleide functie van v voor welke waarde van p de grafiek het steilst is. Rond je antwoord af op een gehele waarde.

Hill vond zijn formule doordat hij ontdekte dat $\frac{v}{100-v}$ evenredig is met p^3 . De evenredigheidsconstante is $4 \cdot 10^{-5}$. Dat wil zeggen:

$$\frac{v}{100-v} = 0,00004p^3$$

- c** Herleid de formule $\frac{v}{100-v} = 0,00004p^3$ tot de formule $v = \frac{100p^3}{p^3+25000}$.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2013, tweede tijdvak

Opgave 26: Parabolen met gemeenschappelijke raaklijn

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = (x - p)^2 + 2p$$

De grafieken van deze functies zijn parabolen. Twee van deze parabolen gaan door de oorsprong.

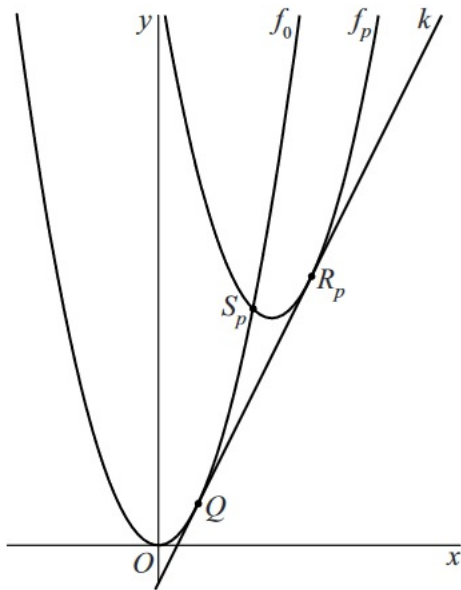
- a** Bereken exact de coördinaten van de toppen van deze twee parabolen.

Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = 2x - 1$.

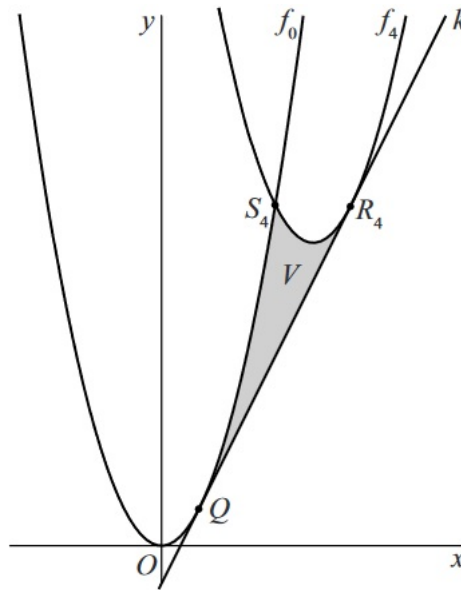
Voor elke waarde van p raakt de lijn k de grafiek van f_p in het punt met coördinaten $(p + 1, 2p + 1)$.

- b** Bewijs dat het punt $(p + 1, 2p + 1)$ inderdaad raakpunt is.

We bekijken de functies f_0 en f_p (met $p \neq 0$). De lijn k raakt de grafiek van f_0 in Q en de grafiek van f_p in R_p , zie **figuur 12**. Er geldt: de x -coördinaat van S_p is het gemiddelde van de x -coördinaten van Q en R_p .



Figuur 12



Figuur 13

c Bewijs dit.

De grafieken van f_0 en f_4 en de gemeenschappelijke raaklijn k sluiten een gebied V in. Zie **figuur 13**, waarin gebied V met grijs is aangegeven.

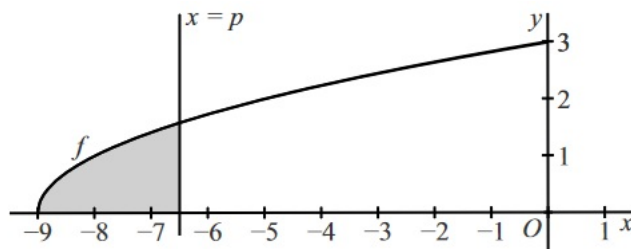
d Bewijs dit.

bron: examen vwo wiskunde B in 2016, tweede tijdvak

Opgave 27: Het achtste deel

Op het domein $[-9, 0]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sqrt{x+9}$.

In **figuur 14** is de grafiek van f getekend en een lijn met vergelijking $x = p$ met $-9 < p \leq 0$. Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en deze lijn is met grijs aangegeven.



Figuur 14

De oppervlakte van het grijze gebied noemen we A . De waarde van A hangt af van de waarde van p . Er geldt:

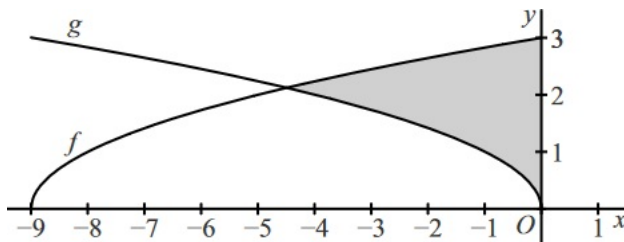
$$A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$$

- a** Bewijs dat $A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$.

Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ het achtste deel is van de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.

- b** Bereken exact deze waarde van p .

De grafiek van f wordt gespiegeld in de y -as. Het spiegelbeeld van de grafiek van f wordt vervolgens 9 naar links verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . Zie **figuur 15**.



Figuur 15

In **figuur 2** is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de grafiek van g en de y -as grijs gemaakt. Dit vlakdeel wordt gewenteld om de x -as.

- c** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2015, tweede tijdvak

Opgave 28: Nulpunten, extremen en buigpunten

De functie is gegeven door $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$.

Voor de afgeleide geldt: $f'(x) = (x+1)^2 \cdot e^x$.

- a** Toon dit op algebraïsche wijze aan.
- b** De functie f heeft geen nulpunten en ook geen extremen. Toon dit op algebraïsche wijze aan.
- c** De grafiek van f heeft wel twee buigpunten. Bereken exact de x -coördinaten van deze buigpunten.

bron: examen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak

Inleiding



Figuur 1

Elke zomervakantie vertrekken veel Nederlanders naar Italië. Vroeger moest je hiervoor over de bergen rijden, maar sinds enkele tientallen jaren worden er tunnels door de bergen aangelegd. De reistijd is daardoor aanzienlijk verkort. Veel van deze tunnels zijn gemaakt met een tunnelboormachine. Deze boormachine boort aan de voorkant het gesteente of de grond weg en voert dit materiaal af. Er wordt direct een tunnelwand in gezet. Deze tunnelwand bestaat voornamelijk uit geprefabriceerde betonnen blokken. De blokken voorkomen instortingen. De beperkte grootte van de boor bepaalt de doorsnede van de tunnel.

Verkennen

Opgave V1

Er loopt een tunnel door een berg tussen punt A en punt B . Punt A en punt B liggen horizontaal 2000 meter van elkaar en punt A ligt 50 meter hoger dan punt B . Punt C ligt in de tunnel tussen A en B . Traject AC heeft een hoogteverschil van 5 cm per (horizontaal) strekkende meter. Traject CB heeft een hoogteverschil van 1,25 cm per meter. Bereken de afstand tussen de punten B en C .

Theorie

Om te onthouden

Rechthoekige driehoeken

In rechthoekige driehoeken gebruik je bij berekeningen:

- **de stelling van Pythagoras:**

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

- **goniometrie:**

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

- **de tekendriehoeken:**

De gelijkbenige rechthoekige driehoek: zijden a , a en $a\sqrt{2}$ en hoeken 45° , 45° en 90° .

De halve gelijkzijdige driehoek: zijden a , $a\sqrt{3}$ en $2a$ en hoeken 60° , 30° en 90° .

Algemene driehoeken

In driehoeken in het algemeen gebruik je bij berekeningen:

- **de hoekensom:**

De hoeken van een driehoek zijn samen 180° .

- **de sinusregel:**

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

- **de cosinusregel:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \text{ of}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta) \text{ of}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

Gelijkvormigheid en congruentie

Twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ zijn **gelijkvormig** wanneer overeenkomstige hoeken even groot zijn. Je schrijft: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

En dan is $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ en $\angle C = \angle R$ (overeenkomstige hoeken).

Er bestaat bij **gelijkvormige figuren** een vaste verhouding tussen overeenkomstige zijden. Er geldt voor de zijden:

$$\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|PR|} = \frac{|BC|}{|QR|}$$

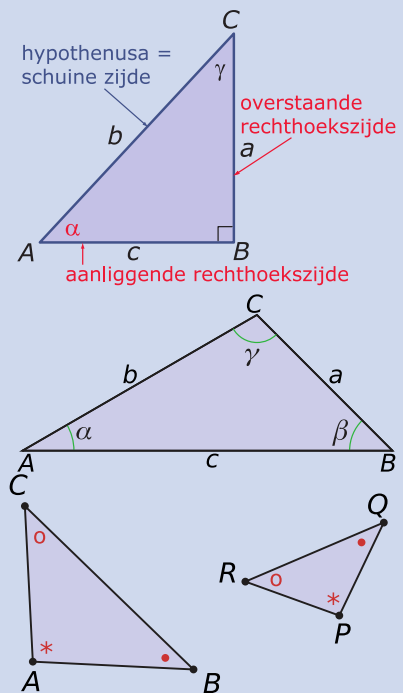
Daarvan maak je gebruik bij berekeningen, gebruik eventueel een verhoudingstabel.

Om in te zien dat twee driehoeken gelijkvormig zijn gebruik je vaak:

- overstaande hoeken zijn even groot;
- bij evenwijdige lijnen zijn F-hoeken even groot en zijn Z-hoeken even groot.

Twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ zijn **congruent** wanneer overeenkomstige hoeken en overeenkomstige zijden even groot zijn. Je schrijft: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

Dan is $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ en $\angle C = \angle R$ (overeenkomstige hoeken).

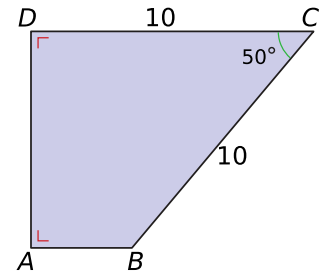


Figuur 2

Opgave 1

In vierhoek $ABCD$ geldt $\angle C = 50^\circ$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$ en $|BC| = |CD| = 10$.

- Bereken de lengte van zijde AD . Rond af op twee decimalen.
- Bereken de lengte van zijde AB . Rond af op twee decimalen.



Figuur 3

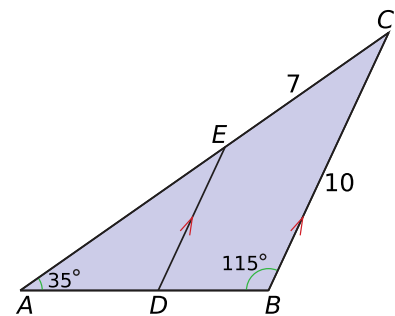
Opgave 2

Voor $\triangle DEF$ geldt dat $\angle D = 60^\circ$ en $\angle E = 30^\circ$.
Bereken exact de lengte van DE als $EF = 9\sqrt{2}$.

Opgave 3

Bekijk de figuur. Er geldt: $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ABC = 115^\circ$, $|BC| = 10$, $|EC| = 7$ en DE is evenwijdig aan BC .

Bereken de lengte van zijde AD . Rond af op twee decimalen.



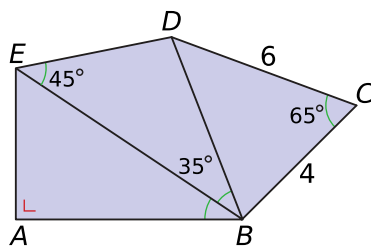
Figuur 4

Opgave 4

Van $\triangle ABC$ zijn de zijden gegeven: $|AB| = 6$, $|BC| = 4,5$ en $|AC| = 5$.
Bereken $\angle ABC$ in graden.

Opgave 5

Bekijk de figuur en bereken $\angle ABE$. Rond af op hele graden.



Figuur 5

Theorie

Om te onthouden

Punten

Een **cartesisch assenstelsel** is een Oxy -assenstelsel waarvan de x -as en de y -as loodrecht op elkaar staan en waarvan de assen dezelfde lineaire schaalverdeling hebben.

De coördinaten van twee willekeurige punten A en B worden gegeven door (x_A, y_A) en (x_B, y_B) .

Het midden M van lijnstuk AB is: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

De lengte van een lijnstuk AB schrijf je als $|AB|$ of als $d(A, B)$ (de afstand tussen A en B).

Met de stelling van Pythagoras geldt: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Lijnen

De **vergelijking van een rechte lijn** heeft de vorm $px + qy = r$.

Alleen als $q \neq 0$ kun je dit schrijven als $y = ax + b$, waarin a de richtingscoëfficiënt is. En als $q = 0$ krijgt de lijn de vorm $x = c$ en loopt hij verticaal.

Lijnen kunnen

- **elkaar snijden:**
Je lost voor het berekenen van het snijpunt het stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op.
- **evenwijdig lopen:**
Je gaat daarvoor na of beide lijnen dezelfde richtingscoëfficiënt hebben.
- **loodrecht op elkaar staan:**
Je gaat daarvoor na of voor de richtingscoëfficiënten a_1 en a_2 geldt $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Afstanden

De **afstand van een punt tot een lijn** $d(P, l)$ bereken je als volgt:

- stel een vergelijking op van lijn m door P loodrecht op l ;
- bereken de coördinaten van Q , het snijpunt van m en l ;
- bereken tenslotte de afstand tussen de punten P en Q en daarmee $d(P, l)$.

De **afstand van twee evenwijdige lijnen** $d(l, m)$ bereken je door de afstand van een willekeurig punt P op één van beide lijnen tot de andere lijn te berekenen.

Bijzondere lijnen

- Een **bissectrice** (deellijn) deelt een hoek middendoor. De drie bissectrices van een driehoek snijden in het middelpunt van de ingeschreven cirkel.
- Een **middelloodlijn** staat loodrecht op een lijnstuk en deelt dit middendoor. De drie middelloodlijnen van een driehoek snijden in het middelpunt van de omschreven cirkel.
- Een **hoogtelijn** gaat door een hoekpunt van een driehoek en staat loodrecht op de overstaande zijde.
- Een **zwaartelijn** gaat door een hoekpunt van een driehoek en door het midden van de overstaande zijde. De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden in één punt: het zwaartepunt. De zwaartelijnen snijden elkaar in de verhouding $1 : 2$.

Opgave 6

Gegeven zijn de punten $A(14, -25)$ en $B(34, -4)$.

- a Bereken $|AB|$.
- b Bereken de coördinaten van het midden van lijnstuk AB .
- c B is het midden van lijnstuk AC . Bereken de coördinaten van C .
- d Stel een vergelijking op van lijn AB .
- e Stel een vergelijking op van de middelloodlijn m van AB .
- f Bereken de afstand van O tot lijn AB in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 7

Gegeven zijn de punten $A(-2, 3)$ en $B(2, -3)$ en lijn $l : x + 4y = 10$

- a Toon aan dat punt A op lijn l ligt.
- b Lijn m is evenwijdig met l en gaat door B .
Geef een vergelijking van lijn m .
- c Bereken de exacte afstand van punt B tot lijn m .

Opgave 8

Gegeven zijn de punten $A(0, 0)$, $B(9, 3)$, $C(9, 1)$ en $D(0, 6)$. De lijnen AB en CD snijden elkaar in het punt M .

Hoe groot is de lengte van lijnstuk AM ?

Opgave 9

Van $\triangle OAB$ zijn de hoekpunten $O(0, 0)$, $A(8, 0)$ en $C(6, 6)$. Je tekent er de drie zwaartelijnen in. De zwaartelijnen snijden elkaar in S . Door het punt S is de lijn DE getekend, evenwijdig aan BC .

Bereken $|AD|$.

Opgave 10

Van gelijkzijdige driehoek DEF hebben de zijden een lengte van $3\sqrt{5}$.

Bereken de oppervlakte A van de ingeschreven cirkel.

Opgave 11

Van $\triangle PQR$ heeft de omgeschreven cirkel een straal r . Hoeveel bedraagt de oppervlakte A van de grootste driehoek PQR , uitgedrukt in r als gegeven is dat $\triangle PQR$

- a een rechthoekige driehoek is?
- b een gelijkzijdige driehoek is?

Theorie

Om te onthouden

Cirkel

Een **cirkel** met **middelpunt** $M(a,b)$ en **straal** r heeft in een cartesisch Oxy -assenstelsel de vergelijking:

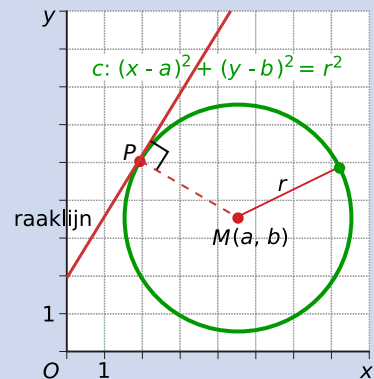
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Als in zo'n vergelijking de haakjes worden weggewerkt, dan krijgt hij de vorm:

$$x^2 + y^2 + cx + dy = e$$

Met behulp van **kwadraat afsplitsen** kun je deze tweede vergelijking schrijven in de eerste vorm waaruit je middelpunt en straal onmiddellijk kunt aflezen. Bij kwadraat afsplitsen gebruik je

$$x^2 + cx = \left(x + \frac{1}{2}c\right)^2 - \frac{1}{4}c^2 \text{ en iets vergelijkbaars voor } y^2 + dy.$$



Figuur 6

Cirkels en lijnen

Een lijn en een cirkel kunnen

- **elkaar snijden:**

Je lost voor het berekenen van de snijpunten het stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op. Daarbij vul je de vergelijking van de lijn in die van de cirkel in.

- **elkaar raken:**

De twee snijpunten vallen dan samen omdat in de vergelijking die ontstaat bij het berekenen van snijpunten de discriminant 0 is.

- **elkaar missen:**

De twee snijpunten bestaan dan niet omdat in de vergelijking die ontstaat bij het berekenen van snijpunten de discriminant negatief is.

Bij het opstellen van de **raaklijn** aan een cirkel in een punt P dat op die cirkel ligt, maak je gebruik van het feit dat die raaklijn loodrecht staat op de straal MP .

Ook cirkels kunnen elkaar snijden of raken. En ook daarbij gaat het om het oplossen van het bijbehorende stelsel vergelijkingen.

Hoeken en afstanden

De **hoek tussen een lijn en een cirkel** is de hoek die deze lijn maakt met een raaklijn aan die cirkel in één van beide snijpunten. Er zijn altijd twee gelijke hoeken in beide snijpunten.

De **hoek tussen twee cirkels** is de hoek tussen de twee raaklijnen aan die cirkels in één van de twee snijpunten.

De **afstand van een punt tot een cirkel** $d(P, c)$ is gelijk aan de afstand van P tot M minus de straal van de cirkel: $d(P, c) = |PM| - r$.

De **afstand van een lijn tot een cirkel** $d(l, c)$ is gelijk aan de afstand van M tot l minus de straal van de cirkel: $d(l, c) = d(M, l) - r$.

De **afstand tussen twee cirkels** $d(c_1, c_2)$ is gelijk aan de afstand van M_1 tot M_2 minus de straal van c_1 en de straal van c_2 : $d(c_1, c_2) = d(M_1, M_2) - r_1 - r_2$.

De stelling van Thales

Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omgeschreven cirkel is, is rechthoekig.

Opgave 12

Stel een vergelijking op van de cirkel in de vorm: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

- a Een cirkel met middelpunt $M(-1,4)$ en straal 1,5.
- b Een cirkel met middelpunt $M(4, -5)$ die door het punt $P(6,7)$ gaat.
- c $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 12$

Opgave 13

Gegeven is een cirkel c met middelpunt $M(-10,25)$ die door het punt $A(-4,21)$ gaat.

- a Stel een vergelijking op van deze cirkel.
- b Onderzoek of $B(-5,20)$ op de cirkel, binnen de cirkel of buiten de cirkel ligt.
- c Bereken de snijpunten van lijn MB met de cirkel.
- d Stel een vergelijking op van de raaklijn in A aan de cirkel.

Opgave 14

Ten opzichte van een cartesisch assenstelsel heeft cirkel c de vergelijking $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 13$. Het punt $A(4,1)$ ligt op deze cirkel.

- a Laat door berekening zien, dat A op de cirkel ligt.
- b Stel een vergelijking op van de raaklijn l in A aan cirkel c .
- c Door $B(0,2)$ gaan twee raaklijnen aan cirkel c . Bereken beide raakpunten.
- d Bereken de afstand van $B(0,2)$ tot cirkel c .

Opgave 15

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : (x + 1)^2 + y^2 = 4$ en $c_2 : x^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Lijn l gaat door de middelpunten van beide cirkels.

- a Stel een vergelijking op van lijn l .
- b Bereken de snijpunten van l met c_1 en c_2 exact.
- c Lijn l heeft in totaal vier snijpunten met beide cirkels. Wat is de grootste afstand tussen twee van die snijpunten, afgerond op één decimaal?

Opgave 16

Bewijs de stelling:

“Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.”

Maak gebruik van congruentie.

Theorie

Om te onthouden

Vector

Een vector is een grootte met een lengte r en een richtingshoek φ .

In een cartesisch assenstelsel is: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$.

Hierin zijn $a_x = r \cdot \cos(\varphi)$ en $a_y = r \cdot \sin(\varphi)$ de **kentallen**.

a_x geeft de grootte van de **x-component** van de vector a aan en a_y de grootte van de **y-component**.

De lengte van $\vec{a}$ is: $|\vec{a}| = r = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$.

De hoek φ die vector $\vec{a}$ met de positieve x-as maakt is:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

Vectoren zijn aan elkaar gelijk als ze dezelfde lengte en richting hebben.

Rekenen met vectoren

Als $\vec{a}$ k keer zo lang wordt, dan krijg je $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$.

Je zegt dat je de vector **scalair vermenigvuldigd** met factor k .

Je kunt **vectoren optellen en aftrekken**:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \text{ en } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

Het inproduct van twee vectoren

Het **inproduct** van twee vectoren is $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$.

Hierin is φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Omdat $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$ kun je met het inproduct de **hoek tussen twee vectoren** berekenen. Bij een hoek van 90° is het inproduct 0.

Zwaartepunten berekenen

Het **zwaartepunt** van een rechthoek is het snijpunt van zijn diagonalen en dat van een cirkel is zijn middelpunt.

Het zwaartepunt van $\triangle ABC$ met $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ en $C(x_C, y_C)$ is $Z = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$.

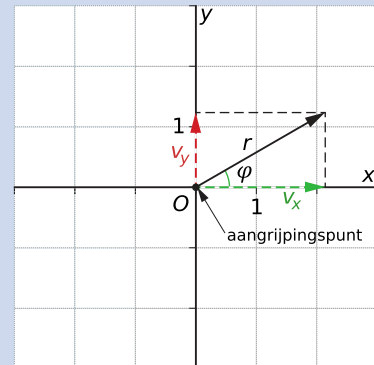
Een samengesteld figuur bestaat uit n figuren, met oppervlaktes A_n en zwaartepunten Z_n .

De vectoren vanuit O naar de zwaartepunten zijn $\vec{v}_n = \overrightarrow{OZ_n}$.

De vector naar het gezamenlijk zwaartepunt Z_p bereken je met:

$$\overrightarrow{OZ_p} = \frac{A_1}{A_t} \cdot \vec{v}_1 + \frac{A_2}{A_t} \cdot \vec{v}_2 + \dots + \frac{A_n}{A_t} \cdot \vec{v}_n$$

Hierin is A_t de oppervlakte van de samengestelde figuur.



Figuur 7

Opgave 17

Gegeven is vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- Bereken de lengte van vector $\vec{a}$.
- Bereken de hoek φ tussen vector $\vec{a}$ en de positieve x-as. Rond af op twee decimalen.
- Vector $\vec{b}$ heeft een lengte van 12 en een hoek ten opzichte van de positieve x-as van 215° . Geef de vector met behulp van kentallen. Rond af op twee decimalen.

Opgave 18

Gegeven de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Teken $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ door de vectoren kop aan staart te leggen.
- Controleer je tekening met behulp van een berekening.
- Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 19

$\triangle ABC$ bestaat uit de punten $A(0,0)$, $B(7,11)$ en $C(1,14)$.

- Geef de drie vectoren waaruit de driehoek bestaat.
- Bereken de hoek tussen $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{AC}$. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van $\triangle ABC$.

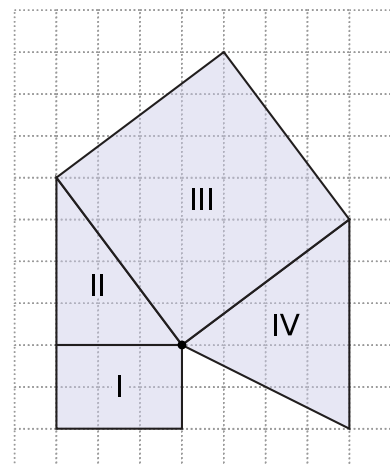
Opgave 20

Punt $A(-3,1)$ en punt $C(2,5)$ zijn twee hoekpunten van vierkant $ABCD$. AC is de diagonaal van vierkant $ABCD$.

- Bereken het middelpunt M van vierkant $ABCD$.
- Bereken hoekpunt B en hoekpunt D met behulp van vector $\overrightarrow{MA}$.
- Bereken met vectoren het zwaartepunt Z van driehoek OAC .

Opgave 21

Bereken het zwaartepunt van de samengestelde figuur. Rond af op twee decimalen.

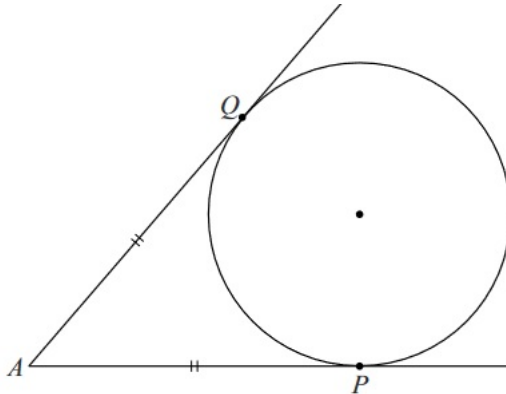


Figuur 8

Verwerken

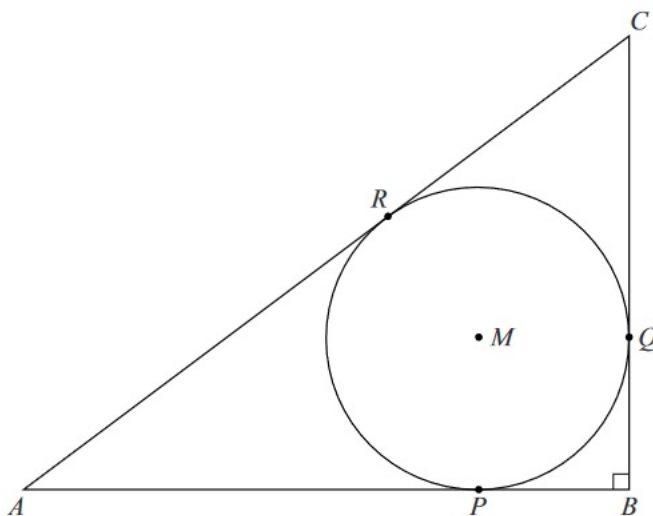
Opgave 22: Cirkels in een driehoek

Als vanuit een punt A buiten een cirkel de twee raaklijnen aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van A tot de twee raakpunten P en Q even groot. In **figuur 9** geldt dus $AP = AQ$. Deze eigenschap mag je in deze opgave gebruiken.



Figuur 9

Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden $AB = 4$ en $BC = 3$. De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt de zijden van de driehoek in P, Q en R . M is het middelpunt van deze cirkel. Zie **figuur 10**.



Figuur 10

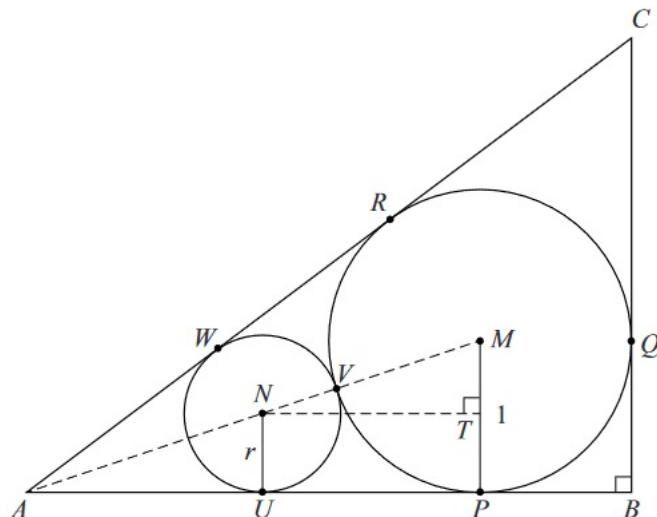
De straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC is 1.

- a** Bewijs dit.

Tussen de ingeschreven cirkel en de zijden AB en AC van de driehoek wordt een tweede cirkel met middelpunt N getekend. Deze tweede cirkel raakt de zijde AB in U , de ingeschreven cirkel in V en de zijde AC in W . De punten M , N en A liggen dus op één lijn. De straal NU van de tweede cirkel is r . De loodrechte projectie van N op MP is T . Zie **figuur 11**.

- b** Er geldt: $AU = 3r$. Bewijs dit.
c Bereken r . Rond je antwoord af op twee decimalen.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2014, eerste tijdvak

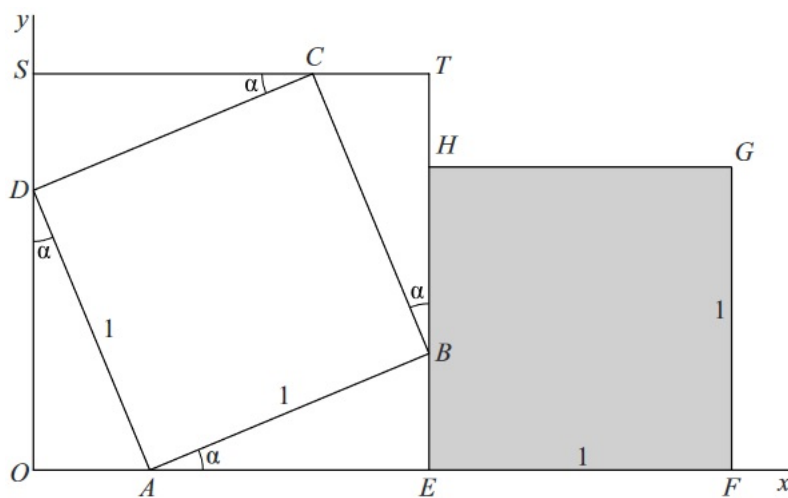


Figuur 11

Opgave 23: Vierkanten

In de figuur zie je een assenstelsel van vierkant $ABCD$ met zijde 1. Hoekpunt A ligt op de positieve x -as en hoekpunt D op de positieve y -as. Vierkant $EFGH$ heeft ook zijde 1. Dit vierkant ligt naast $ABCD$ zo dat zijde EF op de x -as ligt en hoekpunt B van vierkant $ABCD$ op zijde EH ligt. Om vierkant $ABCD$ is een derde vierkant $OETS$ getekend met horizontale en verticale zijden.

Voor de hoek α (in rad) die zijde AB met de x -as maakt, geldt: $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. In **figuur 12** is aangegeven welke hoeken gelijk zijn aan α .

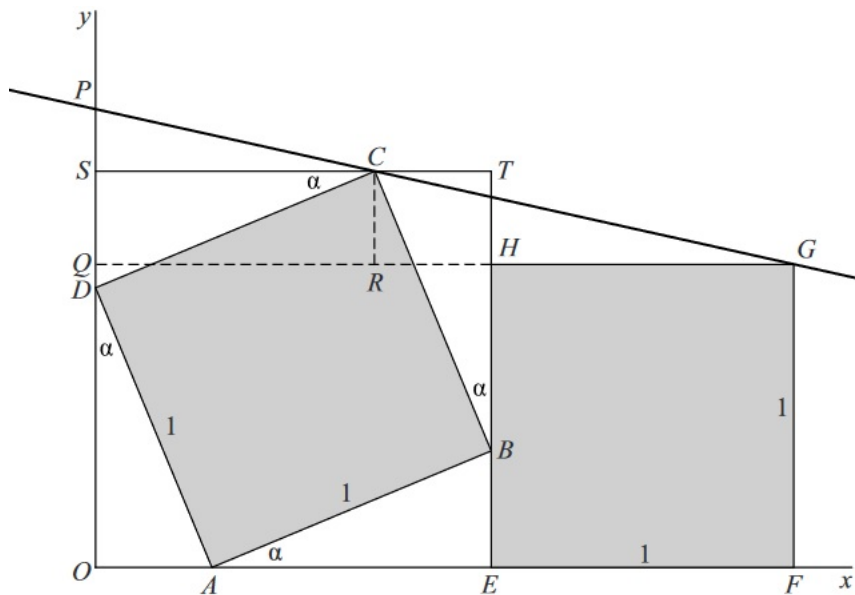


Figuur 12

De coördinaten van C en G hangen als volgt van α af:
 $C(\cos \alpha, \sin \alpha + \cos \alpha)$ en $G(\sin \alpha + \cos \alpha + 1, 1)$.

- a** Bereken exact de oppervlakte van vierkant $OETS$ voor $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. Schrijf je antwoord zonder haakjes.

De lijn door G en C snijdt de y -as in P . De loodrechte projectie van G op de y -as noemen we Q en de loodrechte projectie van C op de lijn GQ noemen we R . Zie **figuur 13**.



Figuur 13

Er geldt $OP = 1 + \frac{(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) - 1)(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1)}{\sin(\alpha) + 1}$.

- b** Toon aan dat deze formule juist is.

De lengte van OP kan ook geschreven worden als $OP = 1 + \frac{\sin(2(\alpha))}{\sin(\alpha) + 1}$.

- c** Toon aan dat deze formule juist is.

Toon dit op algebraïsche wijze aan.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak

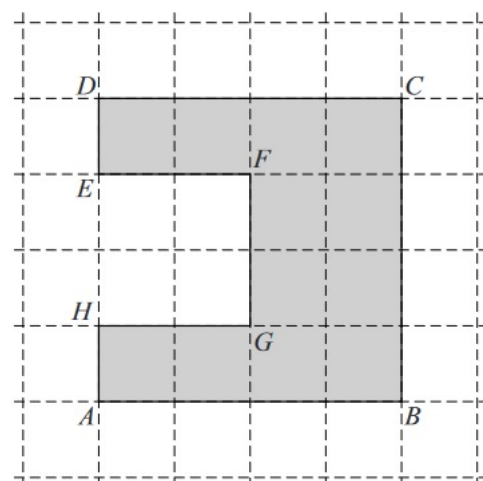
Opgave 24: Zwaartepunt

Gegeven is een veelhoek $ABCDEFGH$. Deze veelhoek is ontstaan door uit vierkant $ABCD$ met zijde 4, het vierkant $HGFE$ met zijde 2 weg te laten. Hierbij liggen E en H beide op AD met $AH = DE$. Zie de figuur.

Om het zwaartepunt van deze veelhoek te vinden, kan de veelhoek bijvoorbeeld worden verdeeld in drie rechthoeken die vervolgens worden opgevat als drie puntmassa's. Het zwaartepunt van de drie puntmassa's valt dan samen met het zwaartepunt van de veelhoek.

Teken de figuur na. Teken in die figuur met behulp van vectoren de plaats van het zwaartepunt van de veelhoek. Licht je werkwijze toe.

naar: pilotexamen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak



Figuur 14

Opgave 25: Metselboog

In sommige gebouwen zijn boven een raam of een deur bakstenen gemetseld in de vorm van een cirkelboog. Zie **figuur 15**.

Om de bakstenen tijdens de bouw in de juiste wijze te kunnen plaatsen, wordt gebruik gemaakt van een houten mal, een zogenoemde metselboog. Zie **figuur 16**.

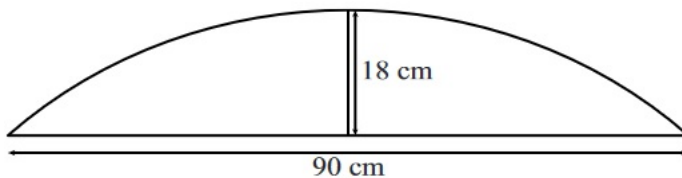


Figuur 15



Figuur 16

De metselaar vraagt aan de timmerman om een metselboog te maken. De breedte moet 90 cm worden en de hoogte 18 cm. In **figuur 17** is het vooraanzicht van de metselboog met de genoemde maten weergegeven.



Figuur 17

De bovenrand van de metselboog is een deel van een cirkel. Om de metselboog te kunnen maken, moet de timmerman de straal van deze cirkel berekenen.

Bereken algebraïsch deze straal. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2016, eerste tijdvak

Opgave 26: Twee snijdende cirkels

Gegeven is cirkel c_1 met straal 1 en middelpunt M . Op de cirkel ligt punt N . Punt N is het middelpunt van cirkel c_2 met straal r waarbij $1 < r < 2$. De twee cirkels snijden elkaar in de punten A en B . Zie **figuur 18**.

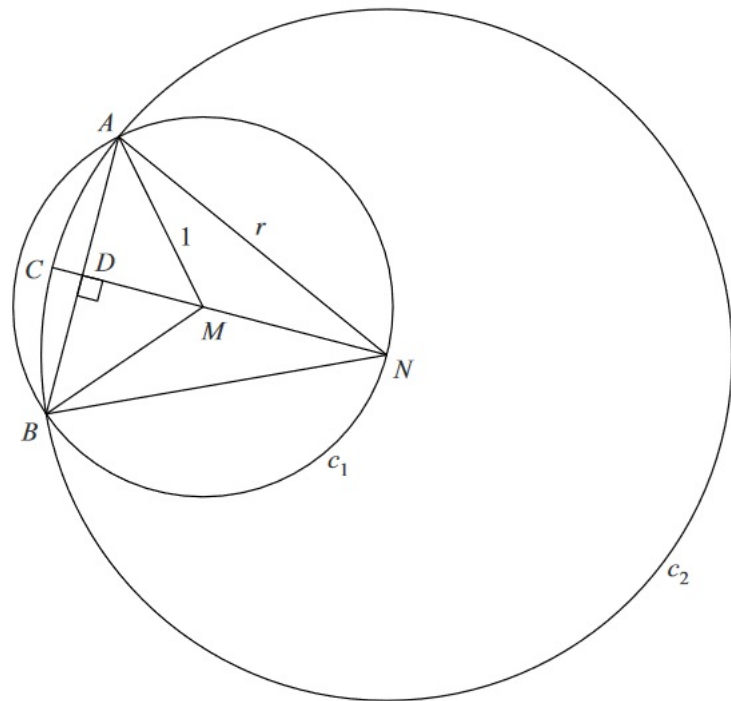
Lijn MN snijdt cirkel c_2 in punt C en lijnstuk AB in punt D . Lijnstuk AB staat loodrecht op lijn MN .

Er geldt $DN = \frac{1}{2}r^2$.

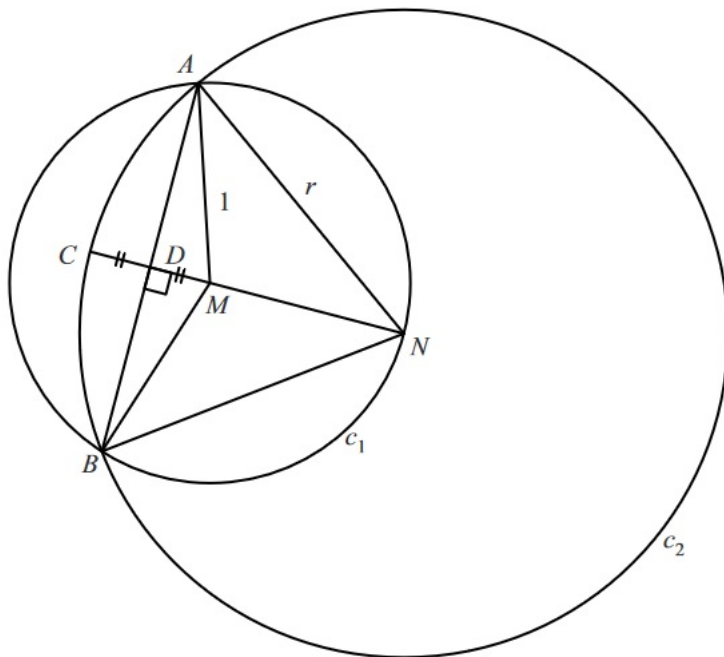
- a** Bewijs dat inderdaad geldt

$$DN = \frac{1}{2}r^2.$$

Je kunt de waarde van r zo kiezen dat CD en DM even lang zijn. Dan ontstaat de situatie van deze **figuur 19**.



Figuur 18



Figuur 19

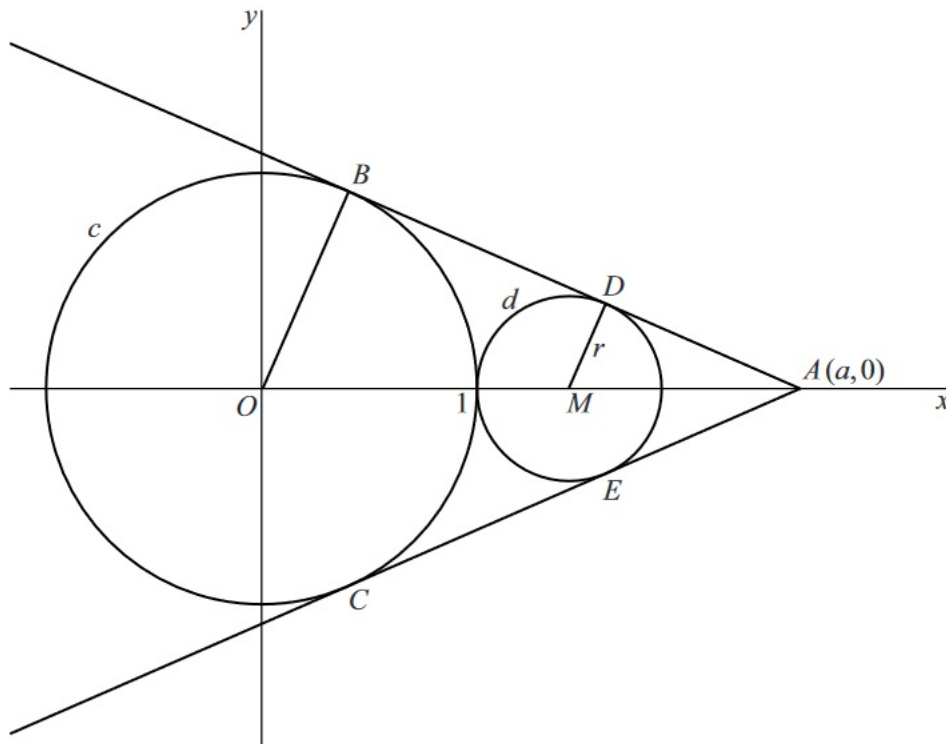
- b** Bereken exact deze waarde van r .

naar: pilotexamen vwo wiskunde B in 2016, tweede tijdvak

Opgave 27: Ingesloten cirkel

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $O(0,0)$ en straal 1. Verder is gegeven het punt $A(a,0)$ met $a > 1$.

Er zijn twee lijnen door A die aan c raken. De raakpunten zijn B en C . De twee raaklijnen en cirkel c sluiten een cirkel d in. Cirkel d raakt de twee lijnen in D en E en cirkel c in $(1,0)$. Cirkel d heeft middelpunt M . Zie **figuur 20**.



Figuur 20

Driehoek AMD en driehoek AOB zijn gelijkvormig.

Voor de straal r van cirkel d geldt: $r = \frac{a-1}{a+1}$.

- a** Bewijs dat $r = \frac{a-1}{a+1}$.

Er is een waarde van a waarvoor vierhoek $OCAB$ een vierkant is. In dat geval kan de straal van cirkel d geschreven worden als $r = p + q\sqrt{2}$ waarbij p en q gehele getallen zijn.

- b** Bereken exact de waarden van p en q .

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2014, tweede tijdvak

6 Parameterkrommen

Inleiding



Figuur 1

In veel steden is er één keer per jaar een kermis. Het plein in de stad wordt dan voor een korte tijd omgetoverd tot een plek waar je los kunt gaan in allerlei attracties. Veel mensen zullen de botsauto's, het reuzenrad en de schiettent kennen, omdat deze op bijna alle kermissen te vinden zijn. Een attractie die niet op elke kermis staat, is de Polyp. Dit is een attractie waarbij karretjes over een scheve helling worden rondgedraaid. Je wordt helemaal door elkaar geschud, omdat de karretjes niet alleen om het middelpunt ronddraaien, maar ook om het midden van iedere arm. Door het veranderen van de draaisnelheid en het eventueel stoppen en achteruitgaan, kan het voorkomen dat in één ritje geen enkel rondje in de Polyp hetzelfde is.

Verkennen

Opgave V1

Een Polyp-attractie draait zijn grote armen met een straal van vijf meter rond in 21 seconden en de daaraan gekoppelde kleine armen draaien rond in zeven seconden en hebben een straal van twee meter. Het draaipunt van de kleine armen is bevestigd aan de uiteindes van de grote armen. Stel een parametervoorstelling op voor de beweging van een karretje en visualiseer de afgelegde weg in een minuut.

Theorie

Om te onthouden

Vectorvoorstelling en parametervoorstelling van een lijn

Behalve door een vergelijking van de vorm: $y = mx + n$ of $px + qy = r$ kun je een rechte lijn beschrijven met behulp van vectoren.

Een **vectorvoorstelling** van een lijn is:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

met **plaatsvector** $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, **richtingsvector** $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ en t als (tijdsafhan-
kelijke) parameter.

Voor de steunvector kan elk willekeurig punt P op de lijn worden gekozen.

De richtingsvector beschrijft de helling van de lijn.

Er geldt voor de richtingscoëfficiënt $m = \frac{d}{c}$.

Een lijn met vergelijking $px + qy = r$ heeft een **normaalvector** $\vec{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (loodrecht op de lijn) en een richtingsvector $\vec{z} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

Een **parametervoorstelling** van deze lijn is: $\begin{cases} x(t) = a + c \cdot t \\ y(t) = b + d \cdot t \end{cases}$ of $(x(t), y(t)) = (a + c \cdot t, b + d \cdot t)$.

Hierin hebben a, b, c, d en t dezelfde betekenis als bij de vectorvoorstelling.

Berekeningen met lijnen

Een **snijpunt berekenen**:

Dit kun je doen door de x -waarden van beide parametervoorstellingen en de y -waarden van beide parametervoorstelling aan elkaar gelijk te stellen. Dit stelsel vergelijking los je dan op.

Een **loodlijn opstellen** door P :

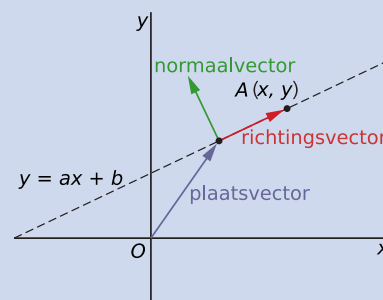
Een lijn l met richtingsvector $\vec{rc}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ heeft loodlijn k met als richtingsvector $\vec{rc}_k = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en vector $\overrightarrow{OP}$ kan gebruikt worden als steunvector.

De **afstand tussen een punt en een lijn bepalen**:

Om de afstand tussen een punt A en een lijn l te berekenen, bepaal je het snijpunt B van de loodlijn k door het punt A en lijn l . Daarna bereken je de afstand tussen punt A en dit snijpunt B met de stelling van Pythagoras.

De **hoek tussen twee lijnen berekenen**:

De hoek tussen twee lijnen k en l kun je met behulp van het inproduct van de richtingsvectoren $\vec{rc}_l$ en $\vec{rc}_k$ van de lijnen berekenen. De hoek φ tussen twee vectoren kan groter zijn dan 90° , terwijl de hoek tussen twee lijnen altijd kleiner of gelijk is aan 90° . In dat geval is de hoek tussen de lijnen gelijk aan $180^\circ - \varphi$.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven zijn de lijnen l door $A(21,0)$ en $B(0,18)$ en $m : x - y = 34$.

- Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.
- Bereken exact het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 2

Gegeven de lijnen $v : y = -\frac{2}{3}x + 1$ en $w : (x(t), y(t)) = (3 + 2 \cdot t, -2 + 3 \cdot t)$.

- Zijn de lijnen v en w evenwijdig of staan ze loodrecht op elkaar?

Gegeven is lijn $l : 3x + 5y = -1$

- Geef een vectorvoorstelling van de loodlijn k op l door punt $P(1,4)$.

Gegeven is lijn $m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Stel de vergelijking van de loodlijn p op m door punt $P(1,4)$.

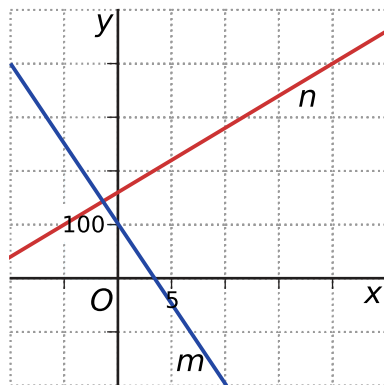
Opgave 3

Bereken de afstand van $P(2,2)$ tot $l : 3x + 4y = 8$.

Opgave 4

De afstand tussen een punt P op $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en lijn $k : x - 3y = 2$ is $2\sqrt{10}$. Geef de mogelijke coördinaten van punt P .

Opgave 5



Figuur 3

Bereken de hoek tussen de lijnen n en m .

Theorie

Om te onthouden

Parametervoorstelling van een cirkel

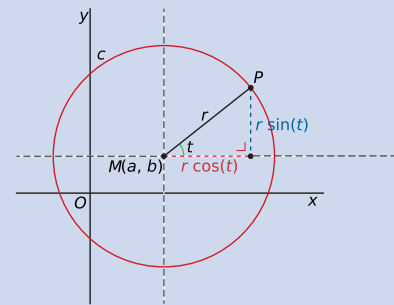
Behalve door een vergelijking van de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ kun je een cirkel c beschrijven met behulp van vectoren.

Een **parametervoorstelling** van deze cirkel is:

$$\begin{cases} x(t) = a + r \cos(t) \\ y(t) = b + r \sin(t) \end{cases}$$

of $(x(t), y(t)) = (a + r \cdot \cos(t), b + r \cdot \sin(t))$.

Hierin is t de hoek met de positieve x -as met t in $[0, 2\pi]$.



Figuur 4

Berekeningen met lijnen en cirkels

De **snijpunten van een rechte lijn met een cirkel** kun je berekenen door het stelsel bijbehorende vergelijking op te lossen, of de parametervoorstelling van de cirkel in de vergelijking van de lijn te substitueren en t te berekenen.

De **snijpunten van twee cirkels** bereken je door het stelsel bijbehorende vergelijkingen op te lossen.

Een **raaklijn aan een cirkel** c met middelpunt $M(a, b)$ in een punt $P(p, q)$ op de cirkel, staat loodrecht op de vector $\overrightarrow{MP}$.

De vector MP is een normaalvector van de raaklijn: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} p - a \\ q - b \end{pmatrix}$.

De vectorvoorstelling van de raaklijn is: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q - b \\ -(p - a) \end{pmatrix}$.

Door een punt $Q(m, n)$ buiten de cirkel kun je twee raaklijnen aan de cirkel trekken.

De parametervoorstelling van zo'n raaklijn is: $(x, y) = (m + t, n + ct)$.

Hierin is c de nog onbekende richtingscoëfficiënt.

Substitueer deze parametervoorstelling in de vergelijking van de cirkel. Bereken met $D = 0$ de waarden van c .

Hoeken en afstanden bij lijnen en cirkels

Onder de **hoek tussen een lijn en een cirkel** versta je de hoek tussen de richtingsvector van de lijn en de raaklijn in één van beide snijpunten.

Onder de **hoek tussen twee cirkels** versta je de hoek tussen de raaklijnen aan deze cirkels in één van beide snijpunten.

Voor het berekenen van afstanden bij lijnen en cirkels gelden dezelfde afspraken als in de **Theorie**.

Opgave 6

Cirkel c heeft middelpunt $M(25,15)$ en gaat door $A(5,15)$.

- a** Geef een vergelijking van cirkel c .
- b** Geef een parametervoorstelling van cirkel c .
- c** Bereken de exacte afstand tussen de snijpunten van c met de x -as.
- d** Bereken de afstand van punt $P(35,10)$ tot cirkel c in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 7

Stel een vergelijking van de cirkel door de punten $A(1,2)$, $B(5,6)$ en $C(7,4)$ op.

Opgave 8

Gegeven de cirkel: $\begin{cases} x(t) = 4 + 3 \cos(t) \\ y(t) = 6 + 3 \sin(t) \end{cases}$.

Geef de parametervoorstelling van de raaklijnen door de oorsprong. Rond zonodig af op één decimaal.

Opgave 9

Bereken de hoek tussen lijn $l : y = 3x + 7$ en cirkel $c : x^2 + y^2 + 12x + 2y - 63 = 0$ Rond af op hele graden.

Opgave 10

Bereken exact de coördinaten van de raakpunten van de raaklijn l met richtingscoëfficiënt 1 aan de cirkel met middelpunt $M(2,5)$ en straal 4.

Theorie

Om te onthouden

Bewegingsvergelijkingen

De beweging van een punt P (in de tijd t) kun je weergeven met parameter- of vectorvoorstellingen. Deze **bewegingsvergelijkingen** hebben de vorm

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases} \text{ of } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

De baan die het bewegende punt P (in de tijd) beschrijft heet de **(parameter)kromme**. Met die bewegingsvergelijkingen kun je berekenen waar een punt P zich op een bepaalde tijd t bevindt, maar ook wanneer het punt P zich op een bepaalde plaats bevindt.

Zo bevindt punt P zich op de x -as als $y(t) = 0$ en op de y -as als $x(t) = 0$.

Een bijzondere parameterkromme is een Lissajousfiguur, een kromme waarbij $x(t)$ en $y(t)$ beide **harmonische trillingen** zijn.

Baansnelheid en baanversnelling

De **snelheidsvector** is de afgeleide van de plaatsvector: $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

De **versnellingsvector** is de afgeleide van de snelheidsvector: $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

De **vectoriële snelheid** (of baansnelheid) v van punt P is de grootte van de snelheidsvector:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

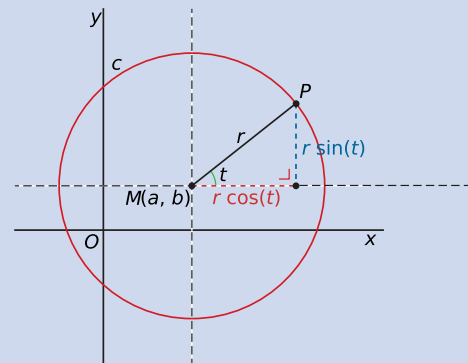
De **vectoriële versnelling** (of baanversnelling) a van punt P is de afgeleide van de vectoriële snelheid.

Raaklijn en hoeken

De raaklijn k aan de baan van punt P op tijdstip t heeft richting $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Een parametervoorstelling van de raaklijn is: $k : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

De hoek φ die de baan van een punt P met een lijn maakt, bereken je door hun snijpunt(en) te bepalen. In dat snijpunt gebruik je het inproduct van de richtingsvector van de lijn en de snelheidsvector van punt P .



Figuur 5

Opgave 11

Gegeven is de ellips: $\begin{cases} x(t) = 5 \sin(t+1) \\ y(t) = 2 \sin(t) \end{cases}$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de ellips met de x -as.
- b Bereken de coördinaten van de punten van de ellips met de grootste en de kleinste y -waarde.

Opgave 12

De beweging van een punt P wordt beschreven door de parametervoorstelling.

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

- a Plot deze baan en bereken de snijpunten met de assen.
- b Bereken de coördinaten van de punten van deze baan waarin de bewegingssnelheid minimaal is.

Opgave 13

Een cardioïde (een hartvormige kromme) wordt gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t)(1 - \cos(t)) \\ y(t) = 2 \sin(t)(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

De cardioïde raakt de lijn $x = \frac{1}{2}$ eerst in het punt A en daarna in het punt B . De benodigde tijd om van punt A naar punt B te bewegen is tweemaal zo groot als de benodigde tijd om van punt B naar punt A te bewegen. Toon dit aan.

Opgave 14

Gegeven is de parametervoorstelling van een bewegend punt P door:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) + 1 \end{cases}$$

- a Bereken de baansnelheid in het punt $C(-2,2)$.
- b Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ gaat het punt P twee keer door $D(1,2)$. Bereken of de baansnelheid beide keren gelijk is.

Opgave 15

De parameterkromme $(x(t), y(t)) = (\cos(2t), \cos(t))$ en de lijn $l : (x, y) = (3t, \frac{1}{2}\sqrt{2} + 4t)$ snijden elkaar in het punt $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Bereken de hoek φ tussen de kromme en de lijn in hele graden nauwkeurig.

Verwerken

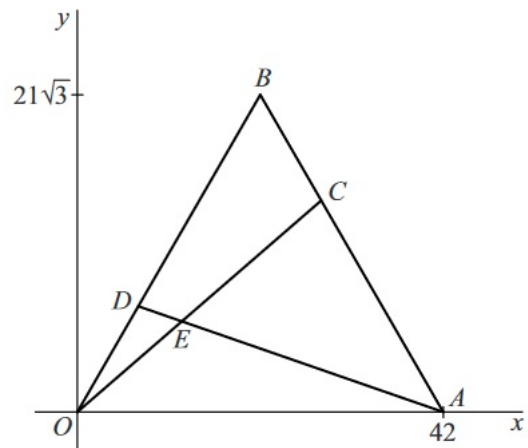
Opgave 16: Loodrecht

Gegeven zijn de punten O, A en B met coördinaten $O(0,0), A(42,0)$ en $B(21, 21\sqrt{3})$. Driehoek OAB is gelijkzijdig.

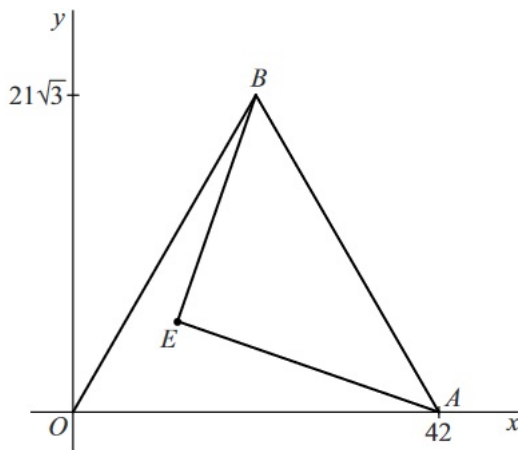
Op zijde AB ligt punt C zo, dat $AC = \frac{2}{3} \cdot AB$ en op zijde BO ligt punt D zo, dat $BD = \frac{2}{3} \cdot BO$. Punt E is het snijpunt van de lijnstukken OC en AD . Zie figuur.

Punt E heeft coördinaten $E(12, 6\sqrt{3})$.

- Laat met exacte berekeningen zien dat de x -coördinaat van E inderdaad gelijk is aan 12.
- In de figuur is opnieuw driehoek OAB getekend, nu met de lijnstukken AE en BE .



Figuur 6



Figuur 7

Bewijs dat $\angle AEB = 90^\circ$.

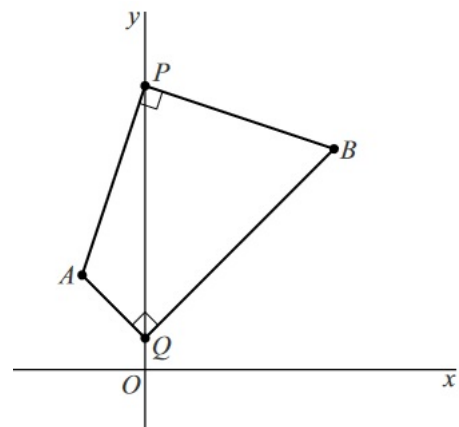
bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2015, eerste tijdvak

Opgave 17: Twee punten

Gegeven zijn de punten $A(-2,3)$ en $B(6,7)$.

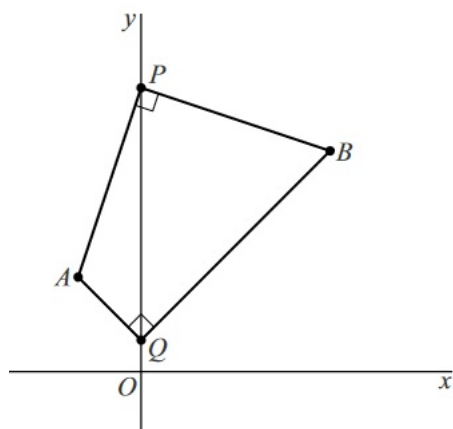
In de figuur zijn op de y -as de punten P en Q getekend waarvoor geldt dat $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$.

- Bereken exact de coördinaten van P en Q .



Figuur 8

- b In de figuur is de lijn door A en B getekend. Ook is een cirkel getekend met middelpunt $M(-3,0)$. Deze cirkel snijdt de lijn door A en B in de punten R en S met $RS = 6\sqrt{5}$.



Figuur 9

Bereken exact de straal van de cirkel.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2015, tweede tijdvak

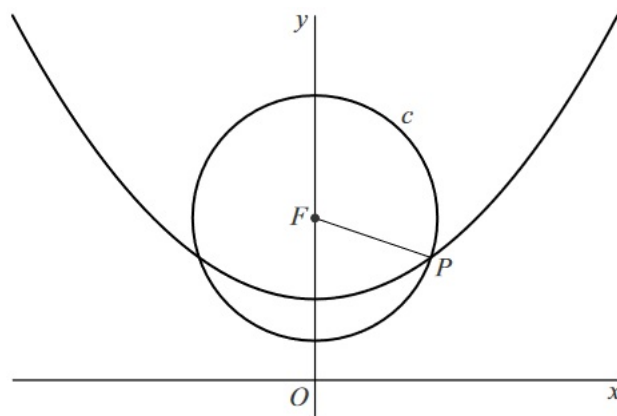
Opgave 18: Parabool en cirkel

Gegeven zijn het punt $F(0,4)$ en de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$. Punt P op de parabool ligt rechts van de y -as en heeft x -coördinaat p . De cirkel c met middelpunt F gaat door P .

In **figuur 10** is deze situatie voor een bepaalde waarde van p getekend.

Voor de lengte van straat FP van de cirkel geldt: $FP = \frac{1}{8}p^2 + 2$.

- a Bewijs dit.

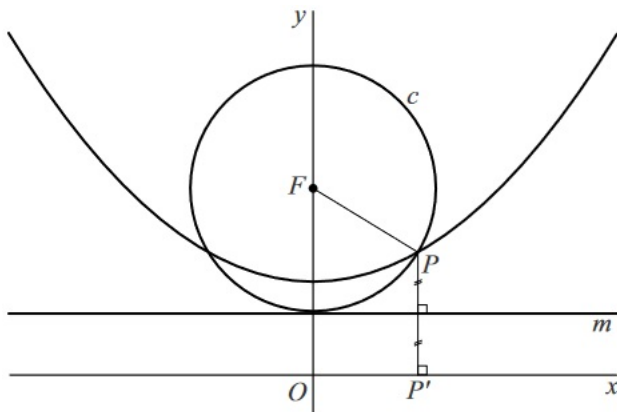


Figuur 10

Punt P' is de loodrechte projectie van P op de x -as en lijn m is de middelloodlijn van lijnstuk PP' .

Afhankelijk van de positie van punt P op de parabool hebben c en m nul, één of twee punten gemeenschappelijk. In figuur 2 is de situatie getekend waarin m en de cirkel elkaar op de y -as raken.

- b Bereken exact de waarde van p voor de in **figuur 11** getekende situatie.



Figuur 11

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2015, tweede tijdvak

Opgave 19: Twee lijnen en een cirkel

Gegeven zijn de lijn m met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

de lijn n met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

en de cirkel c met vergelijking $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

- a** Bereken de hoek tussen m en n . Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

Lijn m snijdt de x -as in A en lijn m snijdt cirkel c in $(0,2)$ en in B .

Lijn n snijdt de x -as in D en lijn n snijdt cirkel c in $(0,2)$ en in C .

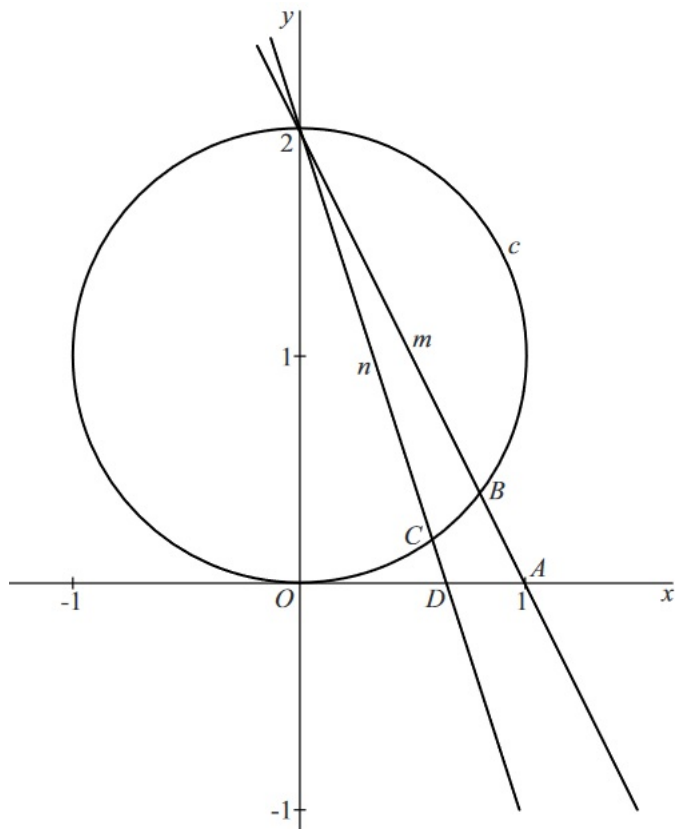
Zie de figuur.

Voor het punt B geldt: $B\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$

- b** Toon aan dat het punt B inderdaad de coördinaten $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ heeft.
- c** Voor de punten A , C en D geldt: $A(1,0)$, $C\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ en $D\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Toon aan dat de punten A, B, C en D op één cirkel liggen.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2012, tweede tijdvak



Figuur 12

Opgave 20: Een ellipsvormige baan

Punt P doorloopt in het Oxy -vlak een ellipsvormige baan volgens de bewegingsvergelijkingen

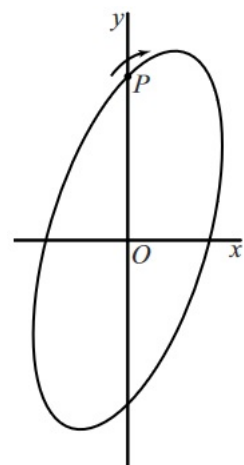
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \sin(t) \\ y(t) = \sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases}$$

Hierin is t de tijd.

De baan van P is weergegeven in **figuur 13**.

Gedurende de beweging verandert de afstand van P tot de oorsprong.

- a** Bereken de maximale afstand van P tot de oorsprong. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- b** Bereken exact de snelheid van P als $t = 0$.

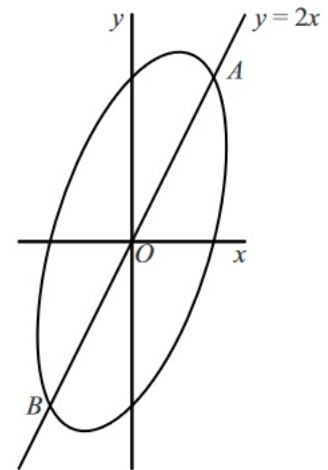


Figuur 13

De baan van P snijdt de lijn met vergelijking $y = 2x$ in de punten A en B . Zie **figuur 14**.

- c Bereken exact de coördinaten van A en B .

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2012, tweede tijdvak



Figuur 14

Opgave 21: Een hartvormige kromme

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ wordt de beweging van een punt P beschreven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

In de figuur is de baan van P getekend.

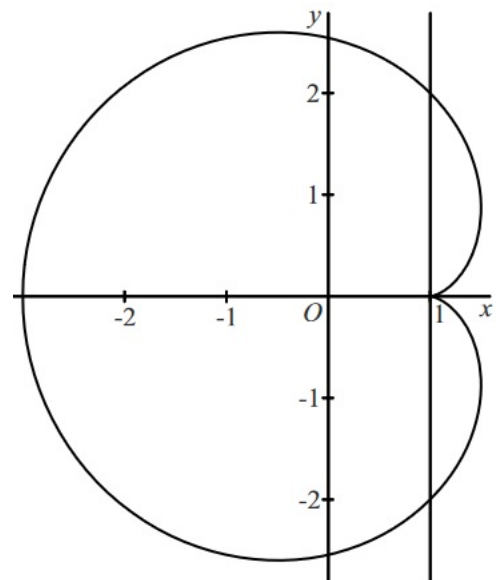
Voor $t = 0$ en $t = 2\pi$ bevindt P zich in $(1,0)$.

- a Bereken exact de maximale snelheid van P .

De lijn met vergelijking $x = 1$ snijdt de baan van P behalve in het punt $(1,0)$ ook in de punten $(1,a)$ en $(1,-a)$, met $a > 0$. Zie de figuur.

- b Bereken exact de waarde van a .

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2013, tweede tijdvak



Figuur 15

Opgave 22: Snelheid op een baan

Voor $0 \leq t \leq \pi$ is de baan van het punt P gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

In de figuur is de baan van P weergegeven.

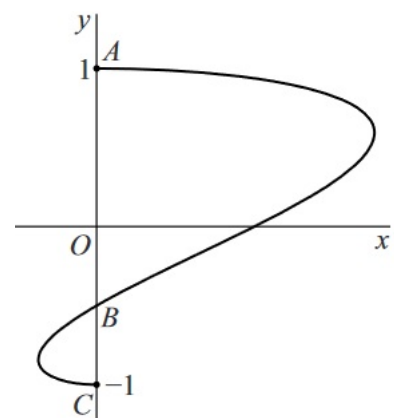
Op $t = 0$ bevindt P zich in het hoogste punt $A(0,1)$ van de baan.

Op $t = \pi$ bevindt P zich in het laagste punt $C(0,-1)$ van de baan.

Tussen $t = 0$ en $t = \pi$ snijdt de baan de y -as één keer in het punt B .

Bereken exact de snelheid van P in punt B .

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2016, eerste tijdvak



Figuur 16

7 Naar het examen

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie voor het **vwo-examen wiskunde B** herhaald. Het is tijd om een compleet beeld van een vwo B examen te krijgen door er één te maken.

1. Bij 'Standaardfuncties': hoort de theorie uit de domeinen 'Functies en grafieken' en 'Differentiaal- en integraalrekening'.
2. Bij 'Vergelijkingen en ongelijkheden': hoort de theorie uit de domeinen 'Functies en grafieken' en 'Differentiaal- en integraalrekening'.
3. Bij 'Formules opstellen, modelleren': hoort de theorie uit de domeinen 'Functies en grafieken' en 'Differentiaal- en integraalrekening'.
4. Bij 'Differentiaal- en integraalrekening': hoort de theorie uit de domeinen 'Functies en grafieken' en 'Differentiaal- en integraalrekening'.
5. Bij 'Vlakke meetkunde': hoort alle theorie uit **Analytische meetkunde** en **Vectoren en goniometrie**.
6. Bij 'Parameterkrommen': hoort alle theorie uit **Parametervoorstellingen** en **Parameterkrommen**.

Omdat het schriftelijk eindexamen de helft van je totale eindcijfer is, wil je een zo goed mogelijk examen doen. Enkele tips kunnen je daarbij helpen.

10 tips voor het eindexamen wiskunde

1. Vooraf

Je moet vooraf je kennis goed en in samenhang hebben opgebouwd, maar ook gericht examentraining hebben gedaan. Zorg dat je in de examenperiode goed bent uitgerust...

2. Spullen mee

Neem alle benodigde spullen mee: pen, potlood en gum, passer, geodriehoek en grafische rekenmachine. Zorg ervoor dat je grafische rekenmachine is opgeladen of neem extra batterijen mee. Je moet op het examen met pen schrijven, tekenen mag met potlood.

3. Goed beginnen

Begin niet overhaast meteen met de eerste opdracht, maar bekijk eerst het hele examen. Misschien zijn er opgaven waarvan het onderwerp je direct aanspreekt, of waarvan je de bijbehorende wiskunde goed beheerst. Dan begin je daar wellicht liever mee.

Bedenk wel dat vaak de eerste opgave een soort van 'binnenkomer' is. Maar hij kan over iets gaan waar jij nu net niet zoveel van weet.

4. Contexten

Het examen bestaat uit een aantal contexten die elk een eigen titel hebben. De verschillende opdrachten zijn doorgenummerd met 1, 2, 3, ... t/m het laatste nummer. Dus binnen een bepaalde context is de eerste opdracht niet altijd nummer 1. Bekijk zo'n context eerst als geheel, begin niet meteen aan de opdrachten. Markeer **trefwoorden** en **belangrijke formules**. Bijvoorbeeld de gebruikte eenheden kun je maar beter even markeren.

5. De opdrachten

Begin pas met de eerste opdracht binnen een context als je ook echt begrijpt wat er van je gevraagd wordt.

Bij iedere examenvraag staat aangegeven hoeveel punten je voor deze opdracht kunt krijgen. Het aantal punten geeft je een idee uit hoeveel stappen jouw uitwerking moet bestaan. Zorg dat de

uitwerking van een opdracht zoveel mogelijk op één pagina staat, dan krijg je geen overschrijffouten bij het doorwerken op de volgende bladzijde.

Bij opdrachten waarin wordt gevraagd “Bewijs...” of “Toon aan...” is het geven van voorbeelden niet genoeg. Er moet een sluitende, algemeen geldige redenering worden opgezet.

6. **Grafische rekenmachine gebruiken**

Bekijk goed of je gebruik kunt maken van de grafische rekenmachine (GR). Bij wiskunde B mag je soms met je GR een vergelijking oplossen. Schrijf dan duidelijk op hoe je de GR hebt ingezet. Bijvoorbeeld de ingevoerde formules en het ingestelde venster. Schrijf ook de functies die je gebruikt om snijpunten, maxima/minima te bepalen.

LET OP: Als er staat “Bereken exact...” of “Bereken algebraïsch...” mag je je GR alleen gebruiken voor eventuele afgeronde eindantwoorden, niet voor tussentijdse bewerkingen.

7. **Bijlagen gebruiken**

Veel wiskunde examens bevatten één of meer uitwerkbijlagen met een tabel, een grafiek of een andere (meetkundige) figuur. Als je daar iets uit moet aflezen, geef dit dan op de uitwerkbijlage aan. Bij aflezen uit een tabel kun je de afgelezen waarde markeren. Bij aflezen uit een grafiek teken je stippellijnen evenwijdig aan de assen. Bij meetkundige figuren is het belangrijk om duidelijk te laten zien hoe je iets hebt getekend. Zo verlies je geen punten bij het werken met een uitwerkbijlage.

8. **Opdracht klaar?**

Heb je een opdracht klaar, lees dan de vraag dan nog eens. Ga na of je wel antwoord hebt gegeven op de vraag, of je goed hebt afgerond en of je de juiste eenheid hebt vermeld.

9. **Even geen idee?**

Als je bij een opdracht niet weet wat je moet doen, blijf er dan niet te lang over nadenken. Geef jezelf even de tijd om iets te proberen en als dat niet helpt, ga dan door naar het vervolg. Anders kom je in tijdnood.

10. **Klaar?**

Als je door het examen heen heb gewerkt, ga dan niet meteen weg, maar neem even een paar minuten rust. Gebruik de resterende de tijd om te bekijken of je nog wat kunt aanvullen of verbeteren, loop alles nog een keer langs. Je zult zien dat je er nog fouten uithaalt. Maar bedenk wel: bij twijfel kun je meestal het best je eerste antwoord laten staan!

Examen

Opgave 1: Rakende grafieken?

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = \frac{1}{2e}x^2$.

Ga na met exacte berekening of de grafieken van f en g elkaar raken.

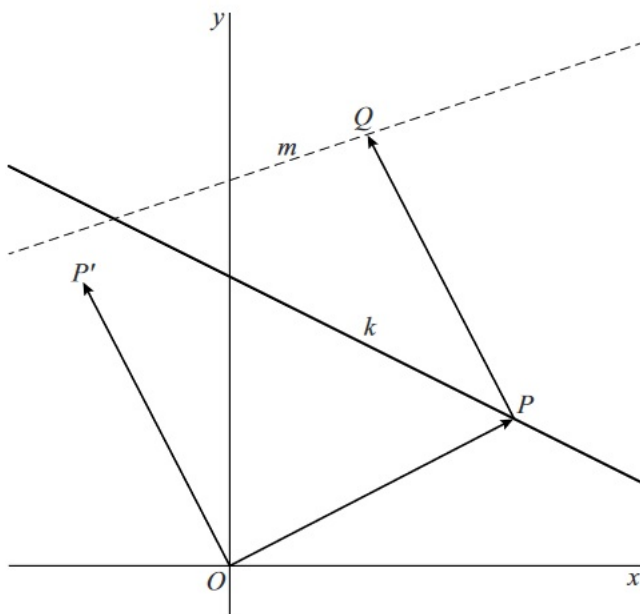
bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak, opgave 1

Opgave 2: Bewegen over een lijn

Gegeven is lijn k met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Op deze lijn ligt het punt P .

Vector $\overrightarrow{OP}$ wordt om de oorsprong over 90° linksom gedraaid. Zo ontstaat vector $\overrightarrow{OP'}$. Vector $\overrightarrow{OP}$ heeft dezelfde richting en dezelfde lengte als vector $\overrightarrow{OP'}$. Zie de figuur.

Wanneer het punt P over lijn k beweegt, zal het punt Q over een lijn m bewegen. In de figuur is m gestippeld weergegeven.



Stel een vergelijking van lijn m op.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak, opgave 2

Opgave 3: Een derde cirkel

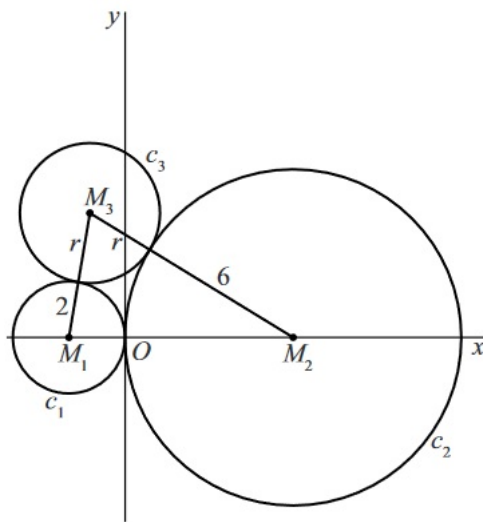
Gegeven zijn de cirkels c_1 en c_2 . Cirkel c_1 heeft middelpunt $M_1(-2,0)$ en straal 2. Cirkel c_2 heeft middelpunt $M_2(6,0)$ en straal 6.

Voor elke positieve waarde van r is er één cirkel c_3 met middelpunt M_3 en straal r zó dat geldt:

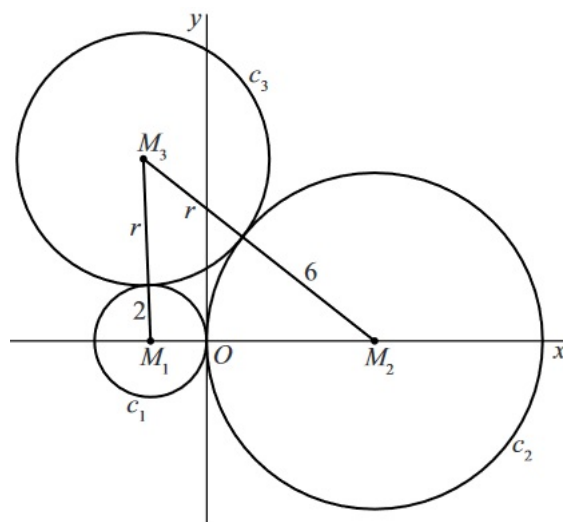
- M_3 ligt boven de x -as;
- c_3 raakt aan cirkel c_1 én aan cirkel c_2 .

In figuur 1 is de situatie getekend voor $r = 2\frac{1}{2}$ en in figuur 2 voor $r = 4\frac{1}{2}$.

Verder is in beide figuren driehoek $M_1M_2M_3$ getekend.



figuur 1: $r = 2\frac{1}{2}$



figuur 2: $r = 4\frac{1}{2}$

De grootte van $\angle M_1M_2M_3$ is afhankelijk van r . Voor elke waarde van r geldt:

$$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{r+12}{2r+12}$$

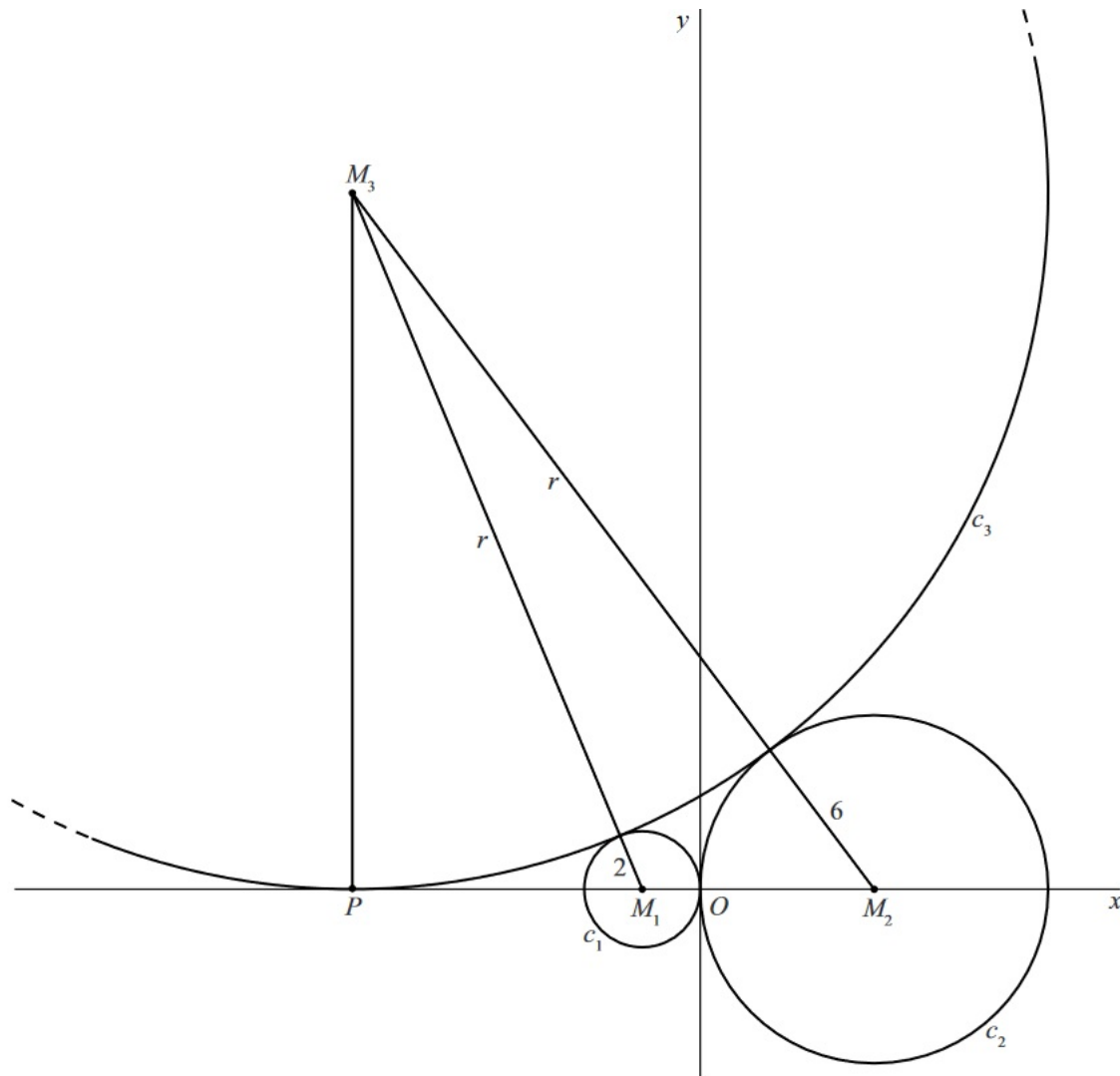
- a** Bewijs de juistheid van deze formule.

Als r onbegrensd toeneemt, nadert de grootte van $\angle M_1M_2M_3$ tot een limiet.

- b** Bereken exact deze limiet in graden.

Er is één waarde van r waarvoor c_3 niet alleen raakt aan c_1 en c_2 , maar ook aan de x -as. In figuur 3 is deze situatie weergegeven, waarbij cirkel c_3 voor een deel is getekend.

Cirkel c_3 raakt de x -as in punt P .



figuur 3

- c Bereken exact de waarde van r in deze situatie.

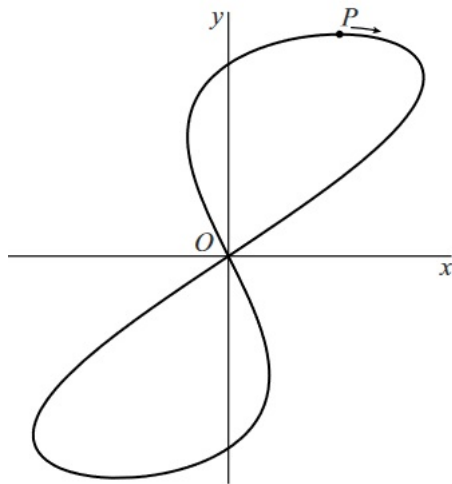
bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak, opgave 3

Opgave 4: Een achtbaan

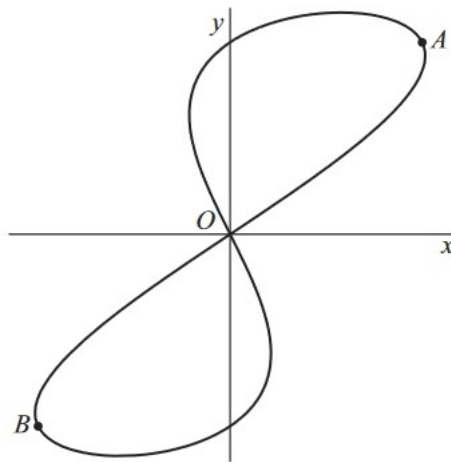
De baan van een punt P wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = 2 \cos(t) \end{cases} \quad \text{met } t \text{ in seconden en } x \text{ en } y \text{ in meter.}$$

Als t loopt van 0 tot 2π , doorloopt P de baan precies één keer. In figuur 1 is deze baan weergegeven. Ook is te zien waar P zich bevindt op $t = 0$ en in welke richting P zich dan beweegt.



figuur 1



figuur 2

- a** Bereken met behulp van differentiëren de maximale snelheid van het punt P in meter per seconde. Rond je antwoord af op één decimaal.

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ zijn er vier tijdstippen waarop de x -coördinaat en de y -coördinaat van P aan elkaar gelijk zijn. Op deze tijdstippen bevindt P zich achtereenvolgens in de punten A , O , B en O . Zie figuur 2.

- b** Bereken exact hoeveel seconden de beweging van A naar B duurt.

Een punt Q maakt dezelfde beweging als P , maar Q loopt π seconden vóór op P .

De bewegingsvergelijkingen van Q zijn dan:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) \\ y(t) = 2 \cos(t + \pi) \end{cases}$$

Als $t = \frac{1}{2}\pi$ en als $t = \frac{3}{2}\pi$, vallen P en Q samen. Op alle andere tijdstippen is er sprake van een lijnstuk PQ .

- c** Bewijs dat de helling van lijnstuk PQ onafhankelijk van t is.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak, opgave 4

Opgave 5: Een gebroken functie

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \frac{5}{4x-6}$$

De lijn k met vergelijking $y = x - 3\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in twee punten, A en B . Zie figuur 1.

De coördinaten van punt A zijn $(1, -2\frac{1}{2})$.

- a** Bereken exact de coördinaten van punt B .

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn k . In figuur 2 is dit vlakdeel grijs gemaakt.

V wordt gewenteld om de x -as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam.

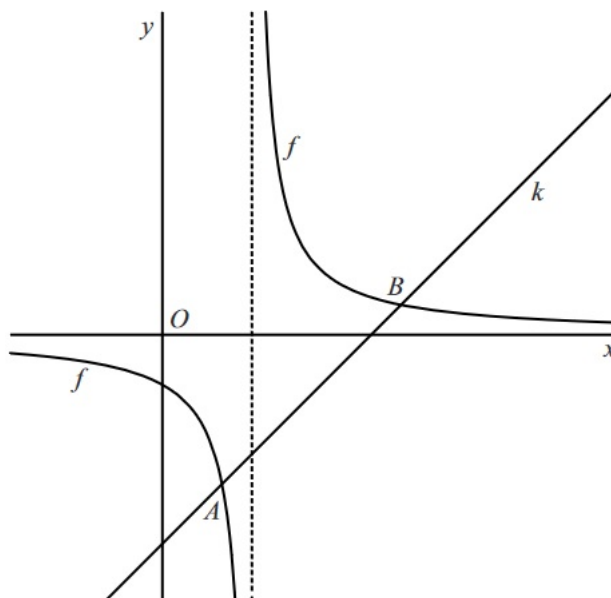
- b** Bereken exact de inhoud van dit omwentelingslichaam.

De grafiek van f wordt a eenheden naar boven verschoven. Zo ontstaat de grafiek van een functie g . De waarde van a kan zowel positief als negatief zijn.

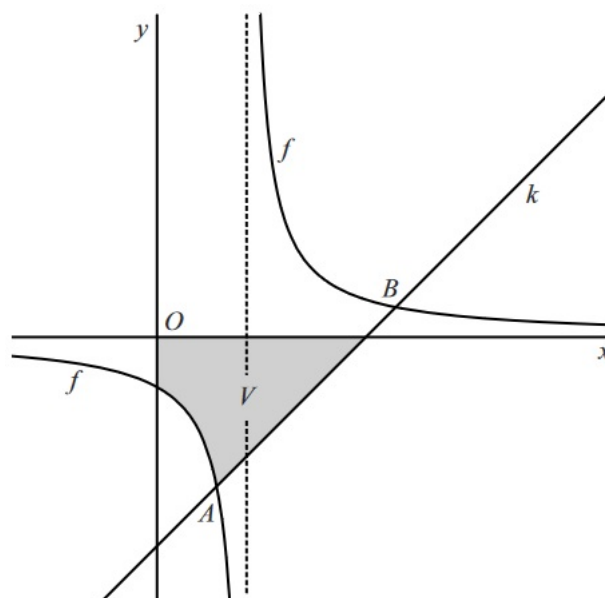
De functie g heeft een inverse functie. De grafiek van de inverse functie van g heeft één verticale asymptoot. Ook de grafiek van g heeft een verticale asymptoot. Gegeven is, dat de afstand tussen deze twee verticale asymptoten gelijk is aan 4.

- c** Bereken exact de mogelijke waarden van a .

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak, opgave 5



figuur 1



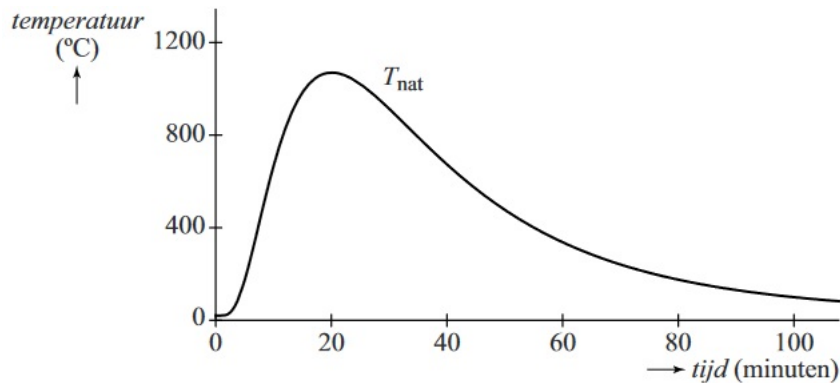
figuur 2

Opgave 6: Brandwerendheid van een deur

De (lucht)temperatuur tijdens een bepaald soort natuurlijke brand kan worden beschreven met het volgende model:

$$T_{\text{nat}}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9}$$

Hierin is T_{nat} de temperatuur in °C en t de tijd in minuten vanaf het begin van de brand. De bijbehorende grafiek is weergegeven in figuur 1.



figuur 1: natuurlijke brand

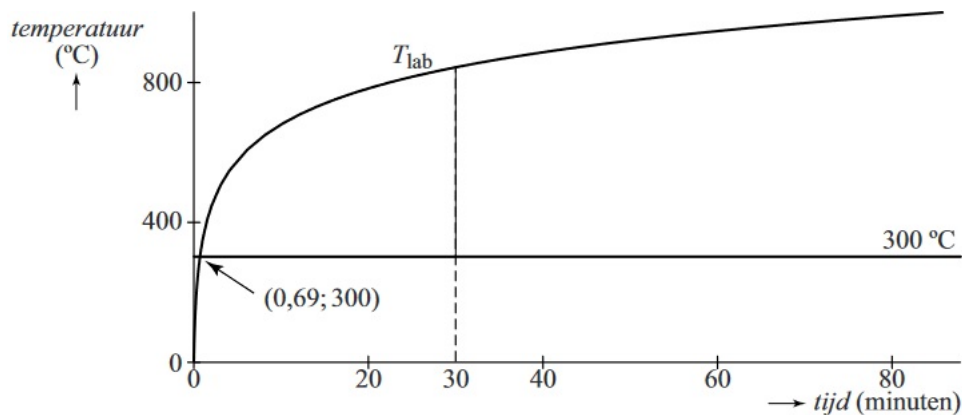
In de figuur is te zien dat de temperatuur bij deze natuurlijke brand een maximum bereikt.

- a Bereken exact deze maximale temperatuur.

Deuren worden getest op hun brandwerendheid door ze in een laboratorium aan een brand bloot te stellen. De temperatuur tijdens zo'n laboratoriumbrand verloopt anders dan bij de natuurlijke brand, namelijk volgens de formule:

$$T_{\text{lab}}(t) = 20 + 345 \cdot \log(8t + 1)$$

Hierin is T_{lab} de temperatuur in °C en t de tijd in minuten vanaf het begin van de brand. De bijbehorende grafiek is weergegeven in figuur 2.



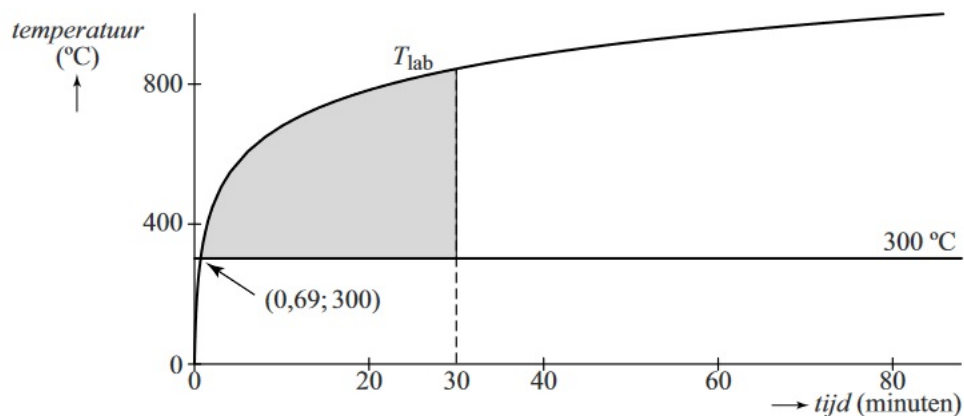
figuur 2: laboratoriumbrand

Temperaturen onder de 300 °C leveren geen blijvende schade aan de deur op. Pas vanaf een temperatuur van 300 °C heeft een deur onder de brand te lijden. Het tijdstip t waarop deze temperatuur bij de laboratoriumbrand wordt bereikt, is afgerond op twee decimalen 0,69. Zie figuur 2.

- b Bereken algebraïsch het tijdstip t waarop de temperatuur bij de laboratoriumbrand de waarde 300 °C bereikt. Rond je antwoord af op drie decimalen.

In de rest van deze opgave bekijken we een deur die wordt blootgesteld aan een laboratoriumbrand. Deze deur blijkt precies 30 minuten stand te houden. Men vraagt zich af hoe berekend kan worden of zo'n deur tijdens de natuurlijke brand óók 30 minuten standhoudt.

In figuur 3 is het vlakdeel grijs gemaakt dat wordt ingesloten door de grafiek van T_{lab} , de horizontale lijn met vergelijking $T = 300$ en de verticale lijn met vergelijking $t = 30$.



figuur 3: laboratoriumbrand

De Amerikaan Simon Ingber deed in 1928 de volgende veronderstelling:

“De deur bezwijkt tijdens de natuurlijke brand op dát tijdstip t_b , waarvoor geldt dat de oppervlakte tussen de grafiek van T_{nat} , de horizontale lijn met vergelijking $T = 300$ en de verticale lijn met vergelijking $t = t_b$ gelijk is aan de oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3.”

- c Onderzoek of volgens de veronderstelling van Ingber de deur tijdens de natuurlijke brand minstens 30 minuten standhoudt.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak, opgave 6

Opgave 7: Perforatie

Voor elke waarde van p , met $p \neq 0$, is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{px^2 + 4px + 6}{(x^2 + 1)(x - 2)}$$

Er is één waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.

Bereken exact de coördinaten van die perforatie.

bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak, opgave 7

1 Standaardfuncties

V1 Merk op dat het groeifactor bij halveren $\frac{1}{2}$ is.

Om de groeifactor per jaar te bepalen, gebruik je $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2,0625}} = 0,715$.

Door de beginhoeveelheid gelijk te stellen aan 100 (%) volgt de exponentiële functie: $f(t) = 100 \cdot 0,715^t$. Stel deze functie nu gelijk aan 10 (%), dan volgt:

$$10 = 100 \cdot 0,715^t \text{ (dus } 0,1 = 0,715^t \text{)}.$$

Met behulp van de intersectfunctie op de grafische rekenmachine volgt nu dat $t = 6,9$ jaar.

1 a $f(x) = -1\left(\frac{1}{3}(x + 15)\right)^4 + 6$

De functie f is ontstaan uit de standaardfunctie $y = x^4$, na een vermenigvuldiging met factor -1 ten opzichte van de x -as, een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de y -as, een translatie met 15 ten opzichte van de y -as en met 6 ten opzichte van de x -as.

b De grafiek heeft een maximum van $f(-15) = 6$.

$$D_f = \mathbb{R} \text{ en } B_f = \langle \leftarrow, 6 \rangle.$$

$$f(x) = 0 \text{ geeft } \left(\frac{1}{3}x + 5\right)^4 = 6 \text{ en dus } \frac{1}{3}x + 5 = \pm \sqrt[4]{6}, \text{ zodat } x = -15 \pm 3\sqrt[4]{6}.$$

$$\text{GR: } y_1 = -1\left(\frac{1}{3}(x + 15)\right)^4 + 6 \text{ met venster bijvoorbeeld } [-20, -10] \times [-5, 6].$$

2 a $f(x) = 2(- (x - 3))^{\frac{1}{2}} - 5$

De functie f is ontstaan uit de standaardfunctie $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, na een vermenigvuldiging met factor 2 ten opzichte van de x -as, een vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de y -as, een translatie met 3 ten opzichte van de y -as en met -5 ten opzichte van de x -as.

b De functie is toenemend dalend en loopt tot $(3, -5)$.

$$D_f = \langle \leftarrow, 3 \rangle \text{ en } B_f = [-5, \rightarrow).$$

$$f(x) = 0 \text{ geeft } (3 - x)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \text{ en dus } 3 - x = 2,5^2 = 6,25, \text{ zodat } x = -3,25.$$

$$\text{GR: } y_1 = -5 + 2\sqrt{3 - x} \text{ met venster bijvoorbeeld } [-5, 5] \times [-6, 3].$$

3 a $f(x) = 2 \cdot \left(2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^{-2} - 4$

De functie $f(x)$ is ontstaan uit de standaardfunctie $y = \frac{1}{x^2}$, na een vermenigvuldiging met factor 2 ten opzichte van de x -as, een vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as, een translatie met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as en met -4 ten opzichte van de x -as.

b Omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -4$ heeft f een horizontale asymptoot $y = -4$.

Omdat $\lim_{x \uparrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \downarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \infty$ heeft f een verticale asymptoot $x = -\frac{1}{2}$.

$$D_f = \left\langle \leftarrow, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \rightarrow \right) \text{ en } B_f = \langle -4, \rightarrow \rangle.$$

$f(x) = 0$ geeft $\frac{2}{(2x+1)^2} = 4$ en dus $(2x+1)^2 = \frac{1}{2}$, zodat $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

GR: $y_1 = \frac{2}{(2x+1)^2} - 4$ met venster bijvoorbeeld $[-5,5] \times [-6,6]$.

4 a $f(x) = ax$ met $f(15) = 34$.

Hieruit volgt $15a = 34$ en $a = \frac{34}{15} = 2\frac{4}{15}$ dus: $f(x) = 2\frac{4}{15}x$.

b $g(x) = ax^4$ met $g(4) = 640$.

Hieruit volgt: $256a = 640$ en $a = \frac{640}{256} = 2\frac{1}{2}$ dus: $g(x) = 2\frac{1}{2}x^4$.

c $h(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}$ met $h(25) = 3$.

Hieruit volgt $\frac{a}{\sqrt{25}} = 3$ en $a = 15$ dus: $h(x) = \frac{15}{\sqrt{x}}$.

5 a Kwadraat afsplitsen geeft $f(x) = -0,1(x^2 - 100x - 2300) = -0,1((x - 50)^2 - 200) = -0,1(x - 50)^2 + 20$.

De grafiek van f kan uit die van $y = x^2$ ontstaan door translatie ten opzichte van de y -as met 50, vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $-0,1$ en translatie ten opzichte van de x -as met 20.

b De grafiek van f is een bergparabool met top $(50, 20)$.

Dus f heeft een maximum $f(50) = 20$.

$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle \leftarrow, 20 \rangle$.

$f(x) = 0$ geeft $(x - 50)^2 = 200$ en dus $x = 50 \pm \sqrt{200}$.

GR: $y_1 = -0,1x^2 + 10x - 230$ met venster bijvoorbeeld $[0, 100] \times [-250, 50]$.

6 a Zo'n functie heeft de vorm $y = a(b(x - c))^p + d = a \cdot b^p \cdot (x - c)^p + d = k(x - c)^p + d$.

b Zo'n functie heeft de vorm $y = \frac{a}{b(x-c)} + d = \frac{a}{bx-bc} + \frac{d(bx-bc)}{bx-bc} = \frac{bdx+a-bcd}{bx-bc}$.

Neem: $p = bd$, $q = a - bcd$, $r = b$ en $s = -bc$ en je krijgt de gewenste vorm.

7 a $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{-3x} + 3$

De functie f is ontstaan uit de standaardfunctie $y = 2^x$, na een vermenigvuldiging met factor $-\frac{1}{4}$ ten opzichte van de x -as, een vermenigvuldiging met factor $-\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as, en een translatie met 3 ten opzichte van de x -as.

b De grafiek is afnemend stijgend en heeft een horizontale asymptoot $y = 3$.

$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle \leftarrow, 3 \rangle$.

$f(x) = 0$ geeft $2^{-3x} = 12$ en dus $x = -\frac{1}{3} \cdot 2 \log(12)$.

GR: $y_1 = 3 - \frac{1}{4} \cdot 2^{-3x}$ met venster bijvoorbeeld $[-4, 4] \times [-10, 5]$.

8 a $f(x) = 4 \log\left(\frac{1}{3}(x - 15)\right) + 12$

De functie $f(x)$ is ontstaan uit de standaardfunctie $y = 4 \log(x)$, na een vermenigvuldiging met factor 3 ten opzichte van de y -as, een translatie met 15 ten opzichte van de y -as, en een translatie met 12 ten opzichte van de x -as.

b De grafiek is afnemend stijgend. De grafiek heeft een verticale asymptoot op $x = 15$.

$D_f = \langle 15, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = 0$ geeft $4 \log\left(\frac{1}{3}x - 5\right) = -12$ en dus $x = 15 + 3 \cdot 4^{-12}$.

GR: $y_1 = {}^4\log\left(\frac{1}{3}x - 5\right) + 12$ met venster bijvoorbeeld $[14,20] \times [-2,15]$.

9 a $f(x) = 3 \cdot 2^x - \frac{1}{2}$

b $g(x) = (0,8)^{2(x-4)}$

c $h(x) = \ln(3(x-2)) + 4$

10 a De functie f is ontstaan uit de standaardfunctie $y = e^x$, na een translatie van 3 ten opzichte van de y -as, een vermenigvuldiging met factor 0,5 ten opzichte van de x -as en een translatie met -10 ten opzichte van de x -as.

b De grafiek is toenemend stijgend en heeft een horizontale asymptoot $y = -10$.

$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -10, \rightarrow \rangle$.

$f(x) = 0$ geeft $e^{x-3} = 20$ en dus $x = 3 + \ln(20)$.

GR: $y_1 = 0,5e^{x-3} - 10$ met venster bijvoorbeeld $[0,10] \times [-12,6]$.

11 a $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} - 3$

Er geldt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$, dus $y = -3$ is de horizontale asymptoot.

$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$.

b $g(x) = -e^{x-4} + 4$

Er geldt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 4$, dus $y = 4$ is de horizontale asymptoot.

$D_g = \mathbb{R}$ en $B_g = \langle \leftarrow, 4 \rangle$.

c $h(x) = \ln(x+3) + 2$

Er geldt: $\lim_{x \downarrow -3} h(x) = -\infty$, dus $x = -3$ is de verticale asymptoot.

$D_h = \langle -3, \rightarrow \rangle$ en $B_h = \mathbb{R}$.

12 a $f(x) = -1 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)\right) - 5$

De functie f is ontstaan uit de standaardfunctie $y = \sin(x)$, na een vermenigvuldiging met factor -1 ten opzichte van de x -as, een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de y -as, een translatie met $-\frac{1}{6}\pi$ ten opzichte van de y -as en met -5 ten opzichte van de x -as.

b $f(0) = 5 - \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 5 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $\left(0, 5 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

c Evenwichtsstand: $y = -5$.

Periode: $2\pi \cdot \frac{2}{1} = 4\pi$.

Amplitude: $|-1| = 1$.

Beginpunt: $\left(-\frac{1}{6}\pi, -5\right)$. De grafiek gaat daar door de evenwichtsstand omlaag.

GT: $y_1 = 5 - \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi\right)$ met venster $[-\pi, 5\pi] \times [-6, -4]$.

13 a $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \cos\left(4\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right) + 3\frac{1}{6}$

De functie $f(x)$ is ontstaan uit de standaardfunctie $y = \cos(x)$, na een vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de x -as, een vermenigvuldiging met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van de y -as, een translatie met $\frac{1}{4}\pi$ ten opzichte van de y -as en met $3\frac{1}{6}$ ten opzichte van de x -as.

b $f(0) = \frac{1}{3} \cos(-\pi) + 3\frac{1}{6} = 2\frac{5}{6}$, dus $\left(0, 2\frac{5}{6}\right)$.

c Evenwichtsstand: $y = 3\frac{1}{6}$.

Periode: $2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Amplitude: $\frac{1}{3}$.

Beginpunt: $(\frac{1}{4}\pi, 3\frac{1}{6} + \frac{1}{3}) = (\frac{1}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$. De grafiek gaat daar vanuit het maximum omlaag.

14 a $f(x) = -2 \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$.

De functie $f(x)$ is ontstaan uit de standaardfunctie $y = \tan(x)$, na een vermenigvuldiging met factor -2 ten opzichte van de x -as, een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de y -as, een translatie met $-\frac{1}{2}\pi$ ten opzichte van de y -as en met 1 ten opzichte van de x -as.

b $f(0) = -2 \cdot \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) + 1 = -1$, dus $(0, -1)$.

c Periode: $\pi \cdot \frac{2}{1} = 2\pi$.

Asymptoten voor: $x = 2\left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi\right) - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

of niet vanuit de transformatie berekend voor: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Hieruit volgt $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Punt van symmetrie: $(-\frac{1}{2}\pi, 1)$.

15 a $f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{2}$

b $g(x) = 5 \cos\left(\frac{1}{2}(x - 4)\right)$

c $h(x) = \tan(3(x - 2)) + 4$

16 a $f(x) = |2(x - 2)| - 1$

De functie f is ontstaan uit de standaardfunctie $y = |x|$, na een vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as, een translatie met 2 ten opzichte van de y -as en met -1 ten opzichte van de x -as.

b De grafiek heeft een minimum van $f(2) = -1$.

$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [-1, \rightarrow)$.

$f(x) = 0$ geeft $|2x - 4| = 1$ en dus $2x - 4 = \pm 1$, zodat $x = 2,5 \vee x = 1,5$.

GR: $y_1 = \text{abs}(2x - 4) - 1$ met bijvoorbeeld het standaardvenster.

17 a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Dus $y = 0$ is een horizontale asymptoot.

$x^2 - 1 = 0$ geeft $x = \pm 1$:

$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} f(x) = \infty$

$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} f(x) = -\infty$

Dus $x = -1$ en $x = 1$ zijn verticale asymptoten.

b $h(x) = \frac{x^2 - 10x + 16}{x - 8} = \frac{(x - 2)(x - 8)}{x - 8} = x - 2$ als $x \neq 8$.

Hierbij geldt: $\lim_{x \uparrow 8} h(x) = \lim_{x \downarrow 8} h(x) = 6$.

Dus $(8, 6)$ is een perforatie.

c $4 \sin^2(x) - 3 = 0$ geeft $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

En dus $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$.

Er geldt: $\lim_{x \uparrow \frac{1}{3}\pi + k\pi} f(x) = \lim_{x \downarrow \frac{1}{3}\pi + k\pi} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow -\frac{1}{3}\pi + k\pi} f(x) = \lim_{x \downarrow -\frac{1}{3}\pi + k\pi} f(x) = -\infty$.

f heeft verticale asymptoten $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$.

f heeft geen horizontale asymptoot.

- d** h is gedefinieerd voor alle x , dus heeft geen verticale asymptoten.

Er geldt: $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$.

Er is een horizontale asymptoot $y = 1$.

- 18** Aangezien je niet door 0 kunt delen, is dit het geval als $2x^2 + 4x = 0$ en dus als $x = -2 \vee x = 0$.

Voor $x = -2$ geldt $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} f(x) = 3$.

Voor $x = 0$ geldt $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty$.

Voor $x = 0$ geldt $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty$.

Bij $x = -2$ heeft de grafiek een perforatie. Bij $x = 0$ heeft de grafiek een verticale asymptoot.

- 19** Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 + 6x - 7}{x - 3} \\ &= \frac{2x(x-3) + 6x + 6x - 7}{x-3} \\ &= \frac{2x(x-3)}{x-3} + \frac{12x-7}{x-3} \\ &= 2x + \frac{12(x-3) + 36 - 7}{x-3} \\ &= 2x + \frac{12(x-3)}{x-3} + \frac{29}{x-3} \\ &= 2x + 12 + \frac{29}{x-3} \end{aligned}$$

Voor $x \rightarrow -\infty$ of $x \rightarrow \infty$ valt de term $\frac{29}{x-3}$ weg, dus de scheve asymptoot heeft de vergelijking: $y = 2x + 12$.

- 20** Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} f(-p) &= e^{1 - \frac{1}{2}(-p)^2} = e^{1 - \frac{1}{2}p^2} \\ f(p) &= e^{1 - \frac{1}{2}p^2} \end{aligned}$$

Er geldt $f(-p) = f(p)$ voor willekeurige p , dus de grafiek is lijnsymmetrisch in $x = 0$.

- 21** Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\pi - p\right) &= 2 \cos\left(2\left(\frac{1}{4}\pi - p\right)\right) + 1 = 2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi - 2p\right) + 1 \\ &= 2 \cos\left(-\left(\frac{1}{2}\pi + 2p\right)\right) + 1 = -2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2p\right) + 1 \\ f\left(\frac{1}{4}\pi + p\right) &= 2 \cos\left(2\left(\frac{1}{4}\pi + p\right)\right) + 1 = 2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2p\right) + 1 \\ \frac{f\left(\frac{1}{4}\pi - p\right) + f\left(\frac{1}{4}\pi + p\right)}{2} &= \frac{-2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2p\right) + 1 + 2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2p\right) + 1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Er geldt $\frac{f\left(\frac{1}{4}\pi - p\right) + f\left(\frac{1}{4}\pi + p\right)}{2} = 1$ voor willekeurige p , dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in $\left(\frac{1}{4}\pi, 1\right)$.

- 22** Er zijn twee verticale asymptoten wanneer de vergelijking $x^2 - 2x + p = 0$ twee oplossingen heeft, ofwel wanneer $D = 4 - 4p > 0$.

Dat is het geval als $p < 1$.

23 De transformatie is:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= a \cdot f\left(\frac{1}{a}x\right) = a \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a}x\right)^2 + 1} \\ &= \frac{a}{\frac{1}{a^2}x^2 + 1} = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \end{aligned}$$

Ook is toegestaan $f_a(x) = \frac{a}{a^2x^2 + 1}$.

24 Omdat T evenredig is met de logaritme van n , zal de tijd afnemend toenemen. Met andere woorden: per toegevoegd icoon neemt de tijd steeds minder snel toe.

25 a Als $x = \pi$, dan is $f(\pi) = \frac{\tan(\pi)}{\sin(\pi)} = \frac{0}{0}$ en die waarde is niet bepaald.

Er geldt $\lim_{x \uparrow \pi} \frac{\tan(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \uparrow \pi} \frac{1}{\cos(x)} = -1$ en zo ook $\lim_{x \downarrow \pi} f(x) = -1$.

Het punt $(\pi, -1)$ is een perforatie van de grafiek van f .

b Zowel de tangensfunctie als de sinusfunctie is punt symmetrisch in het punt $(\pi, 0)$, dus $\tan(\pi - p) = -\tan(\pi + p)$ en $\sin(\pi - p) = -\sin(\pi + p)$. Verder ligt $x = \pi$ in het midden van het domein van f .

$$f(\pi - p) = \frac{\tan(\pi - p)}{\sin(\pi - p)} = \frac{-\tan(\pi + p)}{-\sin(\pi + p)} = \frac{\tan(\pi + p)}{\sin(\pi + p)}.$$

$$f(\pi + p) = \frac{\tan(\pi + p)}{\sin(\pi + p)}.$$

Dus $f(\pi - p) = f(\pi + p)$ voor elke p (waarvoor de functie bestaat).

26 Als T toeneemt, neemt $T - 53,15$ toe. Omdat $T > 53,15$ neemt $\frac{1144}{T-53,15}$ af.

Hiermee neemt $\log(P) = 4,146 - \frac{1144}{T-53,15}$ weer toe.

Als $\log(P)$ toeneemt, neemt P ook toe.

2 Vergelijkingen en ongelijkheden

V1 Eerst bereken je hoeveel een enkele treinreis kost met elk van de kortingstarieven:

Bij 40% korting geldt: $14,30 \cdot (1 - 0,4) = 8,58$ euro.

Bij 20% korting geldt: $14,30 \cdot (1 - 0,2) = 11,44$ euro.

Neem x het aantal keer dat ze met 40% korting een enkele reis maakt en y het aantal keren dat ze met 20% korting reist. In totaal moet ze 190 retourreizen maken naar Delft, dus 380 enkele reizen. Dit geeft de vergelijkingen:

$$x + y = 380 \text{ voor het aantal reizen.}$$

$$8,58x + 11,44y = 3861 \text{ voor de kosten.}$$

Bijvoorbeeld trek je de tweede vergelijking 11,44 maal van de eerste af. Dat geeft:

$$-2,86x + 0y = -486,20, \text{ dus } x = \frac{486,20}{2,86} = 170.$$

De studente moet 170 keer met 40% korting reizen en $380 - 170 = 120$ keer met 20% korting.

1 a Dat gaat zo:

$$x^5 = 3x^3$$

$$x^5 - 3x^3 = 0$$

$$x^3(x^2 - 3) = 0$$

$$\text{Dus } x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}.$$

b Dat gaat zo:

$$x^6 - 3 = 2x^3$$

$$x^6 - 2x^3 - 3 = 0$$

$$(x^3 + 1)(x^3 - 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = \sqrt[3]{3}$$

c Dat gaat zo:

$$(x + 2)^2 = -(x + 2) \vee (x + 2)^2 = x + 2$$

$$x^2 + 4x + 4 = -x - 2 \vee x + 2 = 0 \vee x + 2 = 1$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \vee x = -2 \vee x = -1$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0 \vee x = -2 \vee x = -1$$

$$\text{Hieruit volgt } x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1.$$

d Dat gaat zo:

$$(1 - x)^4 = (2x - 5)^2$$

$$(1 - x)^2 = -(2x - 5) \vee (1 - x)^2 = 2x - 5$$

$$1 - 2x + x^2 = -2x + 5 \vee 1 - 2x + x^2 = 2x - 5$$

$$x^2 = 4 \vee x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 2$$

De tweede kwadratische vergelijking heeft geen oplossingen.

2 a Terugrekenen: $x = (\pm\sqrt[4]{81} - 5) \cdot 3$.

$$\text{Dus } x = -24 \vee x = -6.$$

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}x - 5 &= \sqrt{x + 3} \\(x - 5)^2 &= x + 3 \\x^2 - 10x + 25 &= x + 3 \\x^2 - 11x + 22 &= 0\end{aligned}$$

De abc-formule geeft $x = 5\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$ v $x = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}$

Bij controle blijkt dat de eerste oplossing niet voldoet.

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}5 - \frac{135}{(2x-1)^3} &= 0 \\ \frac{135}{(2x-1)^3} &= 5 \\ 135 &= 5(2x-1)^3 \\ (2x-1)^3 &= 27 \\ x &= 2\end{aligned}$$

d Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+1} &= \frac{2x}{x-3} \\(x-1)(x-3) &= 2x(x+1) \\x^2 - 4x + 3 &= 2x^2 + 2x \\x^2 + 6x - 3 &= 0\end{aligned}$$

De abc-formule geeft $x = -3 - 2\sqrt{3}$ v $x = -3 + 2\sqrt{3}$.

3 a Bovenste vergelijking wordt $y = -2x$.

Substitutie in onderste vergelijking: $3x - 2(-2x) = 7x = 6$ en $x = \frac{6}{7}$.

Met $y = -2x$ kom je op $y = -\frac{12}{7}$.

b Vermenigvuldig de bovenste vergelijking met 2 en de onderste met 3:

$$\begin{cases} 6x + 12y = 24 \\ 12x - 12y = 24 \end{cases}$$

Tel dan de onderste bij de bovenste op: $18x = 48$ geeft $x = \frac{8}{3}$.

Invullen in $3x + 6y = 12$ levert: $y = \frac{2}{3}$.

4 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}5x^2 + 16 &= x^2 + 16x \\4x^2 - 16x + 16 &= 0 \\x^2 - 4x + 4 &= 0 \\(x-2)^2 &= 0 \\x &= 2\end{aligned}$$

Grafieken: $x = 2$ is ook de oplossing van de ongelijkheid.

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}x &= 3\sqrt{x} + 4 \\3\sqrt{x} &= x - 4 \\9x &= (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 \\x^2 - 17x + 16 &= 0 \\x &= 1 \vee x = 16\end{aligned}$$

$x = 1$ voldoet niet.

Plot de grafieken lees de oplossing van de ongelijkheid: $0 \leq x < 16$.

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}x &= \frac{3}{x} + 4 \\\frac{3}{x} &= x - 4 \\3 &= x^2 - 4x \\(x - 2)^2 &= 7 \\x &= 2 - \sqrt{7} \vee x = 2 + \sqrt{7}\end{aligned}$$

Plot de grafieken lees de oplossing van de ongelijkheid: $x \leq 2 - \sqrt{7} \vee 0 < x \leq 2 + \sqrt{7}$.

5 a Twee nulpunten, dus $D = b^2 - 4ac = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = p^2 - 60 > 0$ oplossen.

$$p^2 - 60 = 0 \text{ geeft } p = -\sqrt{60} \vee p = \sqrt{60}.$$

$$\text{Dalparabool, dus: } p < -\sqrt{60} \vee p > \sqrt{60}.$$

b $3x^2 + px + 5 = 16x - 22$ geeft $3x^2 + (p - 16)x + 27 = 0$

Raken, dus $D = (p - 16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27 = 0$ geeft $(p - 16)^2 = 324$ en dus $p - 16 = \pm 18$, zodat $p = -2 \vee p = 34$.

6 a $3^{2x-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (3^{-2})^{x-2} = 3^{4-2x}$ geeft $2x - 1 = 4 - 2x$ en $x = \frac{5}{4}$.

b $(\sqrt{3})^{x^2} = 27^{\frac{1}{2}x-1}$ geeft $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x^2} = (3^3)^{\frac{1}{2}x-1}$ en $3^{\frac{1}{2}x^2} = 3^{1\frac{1}{2}x-3}$.

$$\text{Dus } \frac{1}{2}x^2 = 1\frac{1}{2}x - 3, \text{ zodat } x^2 - 3x - 6 = 0.$$

$$\text{De abc-formule geeft: } x = \frac{3-\sqrt{33}}{2} \vee x = \frac{3+\sqrt{33}}{2}.$$

c $4^x - 4 \cdot 2^x = 45$ geeft $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 45 = 0$.

$$\text{Stel } p = 2^x. \text{ Dan geldt: } p^2 - 4p - 45 = (p - 9)(p + 5) = 0, \text{ dus } p = 9 \vee p = -5.$$

$$\text{Dus } 2^x = 9 \vee 2^x = -5.$$

$$\text{De vergelijking } 2^x = -5 \text{ heeft geen oplossingen, dus } x = {}^2\log(9) = 2 \cdot {}^2\log(3).$$

d $e^x \cdot x^2 = \frac{e^x}{x}$ geeft $e^x \cdot x^3 = e^x$ en $e^x \cdot x^3 - e^x = 0$.

$$\text{Ontbinden: } e^x (x^3 - 1) = 0 \text{ geeft } e^x = 0 \vee x^3 - 1 = 0.$$

$$\text{Omdat } e^x = 0 \text{ geen oplossingen heeft geldt } x^3 - 1 = 0 \text{ ofwel } x = 1.$$

7 a ${}^3\log(x^2 - 1) = -1$ geeft $x^2 - 1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ en $x = -\sqrt{\frac{4}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

b $\ln(x^2 - 2x) = \ln(2x - 3)$ geeft $x^2 - 2x = 2x - 3$ en $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$.

Dus: $x = 1 \vee x = 3$ en de oplossing $x = 1$ vervalt vanwege het domein.

c ${}^5\log(x^2 + x) = {}^5\log(-x)$ geeft $x^2 + x = -x$ en $x^2 + 2x = x(x + 2) = 0$.

Dus $x = -2 \vee x = 0$ en de oplossing $x = 0$ vervalt vanwege het domein.

d ${}^2\log(x^2) = \frac{1}{2}\log(x) + 1$ geeft ${}^2\log(x) = \frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(\frac{1}{2})} + 1$.

Hieruit volgt ${}^2\log(x) = -{}^2\log(x) + 1$ en $3{}^2\log(x) = 1$.

Uit ${}^2\log(x) = \frac{1}{3}$ volgt $x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

8 a $g_{\text{jaar}} = (g_{\text{maand}})^{12} = 3$ dus $g_{\text{maand}} = 3^{\frac{1}{12}} \approx 1,0959$.

$1,0959^t = 2$ geeft $t = \frac{\log(2)}{\log(1,0959)} \approx 7,6$ maanden.

b $g_{\text{jaar}} = (g_{\text{maand}})^{12} = 1 - \frac{65}{100} = 0,35$ dus $g_{\text{maand}} = 0,35^{\frac{1}{12}} \approx 0,9162$.

$0,9162^t = 0,5$ geeft $t = \frac{\log(0,5)}{\log(0,9162)} \approx 7,9$ maanden.

c Voor het aantal konijnen in het gebied kun je de formule $K(t) = 1000 \cdot 1,0959^t$ opstellen en voor het aantal vossen de formule $V(t) = 20 \cdot 0,9162^t$.

$K(t) = 100 \cdot V(t)$ geeft met de grafische rekenmachine $x \approx 3,9$.

Na afgerond 3,9 maanden zijn er honderd keer zoveel konijnen als vossen.

9 a $16 \cdot 4^{x-1} = 1$ geeft $4^{x-1} = \frac{1}{16} = 4^{-2}$ en $x - 1 = -2$ zodat $x = -1$.

GR: de oplossing van de ongelijkheid is $x > -1$.

b $\ln(x^2) = 1$ geeft $x^2 = e$ en $x = -\sqrt{e} \vee x = \sqrt{e}$

GR: merk op dat $y = \ln(x^2)$ niet gedefinieerd is voor $x = 0$.

De oplossing is $-\sqrt{e} < x < 0 \vee 0 < x < \sqrt{e}$.

c $4^{-2x} = 12$ geeft $-2x = {}^4\log(12)$ en $x = -\frac{1}{2}{}^4\log(12)$

GR: de oplossing van de ongelijkheid is $x \leq -\frac{1}{2}{}^4\log(12)$.

d ${}^2\log(x^2 + 4x + 4) = -3$ geeft $(x+2)^2 = 2^{-3}$ en $x = -2 - \sqrt{\frac{1}{8}} \vee x = -2 + \sqrt{\frac{1}{8}}$.

GR: oplossing is $x \leq -2 - \sqrt{\frac{1}{8}} \vee x \geq -2 + \sqrt{\frac{1}{8}}$.

10 De grafiek van T heeft een horizontale asymptoot op $T = 390$. Dit is de maximumtemperatuur. 80% van deze temperatuur is $390 \cdot 0,8 = 312$.

Je zoekt dus de waarde van t waarvoor geldt:

$T(t) = 390 - 390 \cdot 0,95^t = 312$ zodat $0,95^t = 0,2$ en $t \approx 31,38$.

Deze waarde van t correspondeert met 31 minuten en 23 seconden.

11 a Dat gaat zo:

$$4 \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\arccos\left(\frac{3}{4}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$x \approx 0,45 + k \cdot 4\pi \vee x \approx -2,45 + k \cdot 4\pi$$

b Dat gaat zo:

$$\sin\left(3x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$3x + \frac{1}{4}\pi = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x + \frac{1}{4}\pi = \pi - \left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 4x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

d Dat gaat zo:

$$\tan\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\pi\right) - 4 = 0$$

$$\tan\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\pi\right) = 4$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\pi = \arctan(4) + k \cdot \pi$$

$$x \approx 2,77 + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi$$

12 a Dat gaat zo:

$$1 + \cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$$

$$\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos(x)$$

$$x + \frac{1}{3}\pi = x + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{3}\pi = -x + k \cdot 2\pi$$

$$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

b Dit moet met de grafische rekenmachine.

GR: $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 2 \sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ met venster bijvoorbeeld: $[0, 2\pi] \times [-3, 3]$.

Dit geeft $x \approx 2,20 \vee x \approx 5,34$ en hieruit volgt $x \approx 2,20 + k \cdot 2\pi \vee x \approx 5,34 + k \cdot 2\pi$.

c Dat gaat zo:

$$3 \sin^2(x) = \cos^2(x)$$

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{3}$$

$$\tan^2(x) = \frac{1}{3}$$

$$\tan(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \vee \tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

d $\sin^2(x) = -\cos^2(x) + \sin(x)$ geeft $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \sin(x)$ en $1 = \sin(x)$.

Dus $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

13 a Dat gaat zo:

$$2 \cos\left(\frac{1}{3}x + \pi\right) + 1 = 0$$

$$\cos\left(\frac{1}{3}(x + \pi)\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}(x + \pi) = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{3}(x + \pi) = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x + \pi = 2\pi + k \cdot 6\pi \vee x + \pi = 4\pi + k \cdot 6\pi$$

$$x = \pi + k \cdot 6\pi \vee x = 3\pi + k \cdot 6\pi$$

GR: de oplossing is op $[-2\pi, 4\pi]$: $\pi \leq x \leq 3\pi$.

b Dat gaat zo:

$$\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) + 3 = 4$$

$$\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{Dus } x = \frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi \text{ en } x = \frac{11}{24}\pi + k \cdot \pi.$$

GR: de oplossing is op $[0, 2\pi]$: $\frac{5}{24}\pi < x < \frac{11}{24}\pi \vee 1\frac{5}{24}\pi < x < 1\frac{11}{24}\pi$.

c Dat gaat zo:

$$-\sqrt{3} \tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 3$$

$$\tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\sqrt{3}$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$$

De grafiek heeft asymptoten als $x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, dus $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$.

GR: de oplossing is op $[-\pi, \pi]$: $-\frac{1}{4}\pi < x \leq -\frac{1}{12}\pi \vee \frac{3}{4}\pi < x \leq \frac{11}{12}\pi$.

14 a Dat gaat zo:

$$1 + \sin(2x) = \cos(2x)$$

$$1 + 2 \sin(x) \cos(x) = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$2 \sin(x) \cos(x) + 2 \sin^2(x) = 0$$

$$2 \sin(x)(\cos(x) + \sin(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = -\cos(x)$$

$$\sin(x) = 0 \vee \tan(x) = -1$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

GR: de oplossing is op $[0, 2\pi]$: $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \pi \leq x \leq 1\frac{3}{4}\pi \vee x = 2\pi$.

b Dat gaat zo:

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\sin(x) \cos(x) = -\frac{1}{2} \sin(x)$$

$$\sin(x) \left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

GR: de oplossing is op $[0, 2\pi]$: $\frac{2}{3}\pi < x < \pi \vee 1\frac{1}{3}\pi < x < 2\pi$.

c Dat gaat zo:

$$\tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\tan(x)$$

$$\tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = \tan(-x)$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = -x + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De eerste grafiek heeft asymptoten als $x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, dus $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$.

De tweede grafiek heeft asymptoten voor $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

GR: de oplossing is op $[0, \pi]$: $\frac{1}{8}\pi < x < \frac{1}{2}\pi \vee \frac{5}{8}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$.

15
$$\frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)}{-\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)} = -\tan\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

16 Om t_1 en t_2 te vinden moet je $h = 40$ oplossen voor $0 \leq t \leq 745$.

GR: $y_1 = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{745}x\right)$ en $y_2 = 40$ geeft $t_1 \approx 147,63$ en $t_2 \approx 597,37$.

Dit geeft $D = 597,37 - 147,63 \approx 450$ minuten.

17 Er geldt $g(x) = f(x+a) = 2 \cdot \ln(x+a)$. Het snijpunt met de y -as is $Q(0, 2\ln(a))$ en het snijpunt met de x -as volgt uit:

$2\ln(x+a) = 0$ en $\ln(x+a) = 0$, zodat $x+a = e^0 = 1$ en $x = 1-a$.

Dit geeft de coördinaten $P(1-a, 0)$. Er moet gelden $2\ln(a) = -(1-a)$.

GR: $y_1 = 2\ln(x)$ en $y_2 = x-1$ geeft $x=1$ en $x \approx 3,51$.

Het eerste antwoord vervalt (want $a > 1$) dus $a \approx 3,51$.

18 Je zoekt t zodanig dat $a(t) = \frac{1}{2}a(0)$. Vul dit en $\lambda = -1,42 \cdot 10^{-11}$ in en herleid:

$$\frac{1}{2}a(0) = a(0) \cdot e^{-1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-1,42 \cdot 10^{-11}} \approx 49 \cdot 10^9$$

Dat wil zeggen dat de halveringstijd ongeveer 49 miljard jaar is.

- 19** Het midden van PR noemen we S . Er geldt $x_S = \frac{a}{2}$ en $y_S = \frac{8}{2}$, dus de coördinaten zijn $S(\frac{a}{2}, 4)$.

Als S een snijpunt is met f moet gelden $f(\frac{a}{2}) = 4$.

Invullen geeft:

$$8 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4$$

$$-\frac{1}{8}a^2 = -4$$

$$a^2 = 32$$

$$a = \pm\sqrt{32}$$

Het antwoord $a = -\sqrt{32}$ valt af omdat $a > 4$. Dit geeft $a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

- 20 a** $AB = 5$ en $AE = \cos(\alpha)$.

$CE = \sin(\alpha)$ geeft met de stelling van Pythagoras $ED = \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$.

$$s = AB - AE - ED = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}.$$

- b** GR: $y_1 = 5 - \cos(x) - \sqrt{16 - \sin^2(x)} - \left(1 - \cos(x) + \frac{1}{8}\sin^2(x)\right)$ met venster bijvoorbeeld $[0, 2\pi] \times [-0,01; 0,01]$.

Je vindt voor het maximale verschil 0,002.

- 21** $70 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)} = 70$ geeft $\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) = \sin(\alpha)$.

Dus $\alpha + \frac{1}{4}\pi = \pi - \alpha$ en $\alpha = \frac{3}{8}\pi$.

3 Formules opstellen

V1 De amplitude van de sinusoidale zou $\frac{0,31+0,07}{2} = 0,19$ moeten zijn en dat klopt.

De evenwichtsstand van de sinusoidale zou $< \text{not enough right fences} : 1 >$ moeten zijn en dat klopt.

De periode van de sinusoidale zou $\frac{2\pi}{0,490} \approx 12,81$ moeten zijn en dat is ongeveer 12:49 uur.

Je kunt varen als het water ten minste hoger staat dan $-0,45 + 0,5 = 0,05$ m ten opzichte van NAP. Bereken vervolgens de tijden bij de eerste vloedgolf (tussen $t = 3$ en $t = 11$ waarop deze waterstand voorkomt. Bedenk dat je elke andere vloedgolf ook had kunnen onderzoeken, omdat de sinus periodiek is.

Voer op de grafische rekenmachine nu onder y_1 de formule in en voor de te onderzoeken hoogte $y_2 = 0,05$. Bepaal de snijpunten van beide functies. (Je zou deze ook algebraïsch moeten kunnen berekenen.)

Dit geeft twee snijpunten: $t = 3,975$ en $t = 9,930$. Tussen deze twee tijden is de waterstand hoger en kun je dus over het wad varen. De totale tijd die je per vloedmoment tot je beschikking hebt, is dan $9,930 - 3,975 = 5,955$ uur.

1 a $a = \frac{-3-1}{4-2} = -2$ geeft $f(x) = -2x + b$.

A invullen geeft $1 = -2 \cdot 2 + b$ en $b = 5$.

Dus $f(x) = -2x + 5$.

b Formule heeft de vorm $g(x) = a(x-3)^2 + 5$.

C invullen geeft $3 = a(5-3)^2 + 5$ en $a = -0,5$.

Dus $g(x) = -0,5(x-3)^2 + 5$.

c $-0,5(x-3)^2 + 5 = -2x + 5$ geeft $x^2 - 10x + 9 = (x-9)(x-1) = 0$ en $x = 1 \vee x = 9$.

Snijpunten (1,3) en (9, -13) dus gevraagd lengte: $\sqrt{(9-1)^2 + (-13-3)^2} = \sqrt{320}$.

2 a Het voorschrift van f heeft de vorm $f(x) = a(x+3)(x-5)$.

$f(7) = 4$ dus $20a = 4$ en $a = 0,2$.

Dit geeft $f(x) = 0,2(x+3)(x-5) = 0,2x^2 - 0,4x - 3$.

b Invullen van de gegeven punten in $y = ax^2 + bx + c$ geeft het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 5 & 5 & = & a + b + c \\ 1 & 5 & = & 25a + 5b + c \\ 3 & & = & 36a + 6b + c \end{cases}$$

De eerste vergelijking geeft $c = 5\frac{1}{2} - a - b$.

Substitutie in de onderste twee vergelijkingen geeft:

$$\begin{cases} -4 & = & 24a + 4b \\ -2 & 5 & = & 35a + 5b \end{cases}$$

Dit stelsel geeft $a = \frac{1}{2}$, $b = -4$ en $c = 9$.

Dus: $g(x) = 0,5x^2 - 4x + 9$.

3 a De functie is derdegraads, dus $n = 3$.

Het symmetriepunt (2,6) geeft $y = a(x-2)^3 + 6$.

Invullen van (4,1) geeft $a(4-2)^3 + 6 = 1$, dus $a = -0,75$.

Dit geeft $g(x) = -0,75(x-2)^3 + 6$

b De functie is vierdegraads, dus $n = 4$.

De grafiek is lijnsymmetrisch ten opzichte van de x-coördinaat van de top, precies tussen $x = -3$ en

$x = 7$. De x -coördinaat van de top is dus $\frac{1}{2}(7 + -3) = 2$.

Dit geeft $y = a(x - 2)^4 + 24$. Invullen van bijvoorbeeld $(7, 12)$ geeft: $a(7 - 2)^4 + 24 = 12$ en $a = -\frac{12}{625}$.

Dit geeft $h(x) = -\frac{12}{625}(x - 2)^4 + 24$

4 a $(4; 3,2)$ invullen geeft $3,2 = a \cdot 4^r$.

$(9; 10,8)$ invullen geeft $10,8 = a \cdot 9^r$.

Dit geeft $\frac{10,8}{3,2} = \frac{a \cdot 9^r}{a \cdot 4^r}$ en $3,375 = 2,25^r$ en $< \text{not enough right fences} : 1 >$.

En uit $3,2 = a \cdot 4^{1,5}$ volgt $a = 0,4$.

Functievoorschrift $N(t) = 0,4 \cdot t^{1,5}$.

b $N(t) = 0,4 \cdot t^{1,5} = 100$ geeft $t^{1,5} = 250$ en dus $t = 250^{\frac{1}{1,5}} \approx 39,69$.

De grafiek geeft t_{gr40} .

5 Druk x uit in y :

$$\frac{1}{2}(x + 2)^3 - \frac{1}{2} = y$$

$$\frac{1}{2}(x + 2)^3 = y + \frac{1}{2}$$

$$(x + 2)^3 = 2y + 1$$

$$x + 2 = \sqrt[3]{2y + 1}$$

$$x = \sqrt[3]{2y + 1} - 2$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \sqrt[3]{2x + 1} - 2$.

Voer beide formules in je GR in met het standaardvenster en je ziet beide grafieken.

6 a $h(x) = f(g(x)) = h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} - 4$

b Herleid $y = h(x)$ tot y uitgedrukt in x :

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} - 4$$

$$y + 4 = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}$$

$$(y + 4)^2 = \frac{1}{2}x + 3$$

$$y^2 + 8y + 16 - 3 = \frac{1}{2}x$$

$$2y^2 + 16y + 26 = x$$

Dus $h^{\text{inv}}(x) = 2x^2 + 16x + 26$.

7 a De groeifactor is gegeven: $g = \frac{3}{4}$.

Er geldt $f(0) = 5$, hieruit volgt: $a \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 5$, dus $a = 5$.

Dit geeft $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

b $g^1 = \frac{0,75}{1,5} = 0,5$

Uit bijvoorbeeld $g(2) = 0,75$ volgt: $a \cdot 0,5^2 = 0,75$, dus $a = 3$.

Dit geeft $g(x) = 3 \cdot 0,5^x$

- c** Voor de groeifactor geldt $g^5 = \frac{184,68}{144,7}$ dus $g = \left(\frac{184,68}{144,7}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,05$.

Uit bijvoorbeeld $g(3) = 144,7$ volgt $a \cdot (1,05)^3 = 144,7$, dus $a \approx 125$.

Dit geeft $h(x) = 125 \cdot 1,05^x$.

- 8** Tussen januari en juli 2020 is de groeifactor per maand: $\left(\frac{360}{211}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,093$.

Voor daaropvolgende tijdsperiodes: $\left(\frac{639}{360}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,100$; $\left(\frac{1153}{639}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,103$; $\frac{1255}{1153} \approx 1,088$ en

$\left(\frac{1497}{1255}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1,092$.

De groeifactor blijft steeds ongeveer hetzelfde, de wisselkoers neemt bij benadering exponentieel toe.

Als I het aantal ISK en t de tijd in maanden, dan wordt de formule $I \approx 211 \cdot 1,09^t$.

- 9 a** $f(x) = 2^{3x+2} = 2^{3x} \cdot 2^2 = 4 \cdot (2^3)^x = 4 \cdot 8^x$

- b** $g(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{-1} + \ln(4) = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^x \cdot \frac{1}{e} + \ln(4) \approx 0,37 \cdot 4,48^x + \ln(4)$

- c** Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}x} + 3^{x-1} \\ &= \frac{1}{9} + (3^{-2})^{-\frac{1}{2}x} + 3^x \cdot 3^{-1} \\ &= \frac{1}{9} + 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x \\ &= 1\frac{1}{3} \cdot 3^x + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

- 10 a** Druk x uit in y :

$$\begin{aligned} 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} + 5 &= y \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} &= \frac{y-5}{4} \\ 2x-1 &= \frac{1}{3} \log\left(\frac{y-5}{4}\right) \\ x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \log\left(\frac{y-5}{4}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \log\left(\frac{y-5}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

- b** Druk x uit in y :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 5 \log\left(\frac{1}{2}x - 3\right) + 1 &= y \\ 5 \log\left(\frac{1}{2}x - 3\right) &= 2(y-1) \\ \frac{1}{2}x - 3 &= 5^{2y-2} \\ x &= 2 \cdot 5^{2y-2} + 6 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } g^{\text{inv}}(x) = 2 \cdot 5^{2x-2} + 6$$

- 11** Druk x uit in y :

$$\frac{e^x + 5}{e^x + 1} = y$$

$$e^x + 5 = y(e^x + 1)$$

$$e^x + 5 = y e^x + y$$

$$e^x - y e^x = y - 5$$

$$e^x (1 - y) = y - 5$$

$$e^x = \frac{y-5}{1-y}$$

$$x = \ln\left(\frac{y-5}{1-y}\right)$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \ln\left(\frac{x-5}{1-x}\right)$$

12 a Ga uit van $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$.

Hier is $a = 25$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $c = 0$ en $d = 25$.

Hieruit volgt $f(x) = 25 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + 25$.

b Ga uit van $g(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$.

De amplitude is $a = 5 - (-3) = 8$ en de periode is 4π , dus $b = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$. Verder is $c = 2$ en $d = -3$.

Hieruit volgt $g(x) = 8 \sin\left(\frac{1}{2}(x - 2)\right) - 3$.

13 a Ga uit van $f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$.

De amplitude van f is gelijk aan 2 en de periode is 6π , dus $a = 2$ en $b = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$. Een beginpunt voor een cosinusfunctie is $(4\frac{1}{2}\pi, 6)$, dus $c = 4\frac{1}{2}\pi$. De evenwichtsstand is $d = 4$.

Dit geeft: $f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{3}\left(x - 4\frac{1}{2}\pi\right)\right) + 4 = 2 \cos\left(\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{2}\pi\right) + 4$.

b Ga uit van $g(x) = a \sin(b(x - c)) + d$.

De amplitude van g is gelijk aan 3, dus $a = 3$. De punten $(-1\frac{1}{2}\pi, 4)$ en $(2\frac{1}{2}\pi, 4)$ zijn toppen. Tussen deze toppen zitten drie periodes. Eén periode is dus $\frac{4\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$, en daarmee is $b = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{2}$. Een mogelijk beginpunt voor een sinusfunctie is $(-\frac{1}{2}\pi, 1)$, dus $c = -\frac{1}{2}\pi$. De evenwichtsstand is $d = 1$.

Dit geeft: $g(x) = 3 \sin\left(\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1 = 3 \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\pi\right) + 1$.

14 a $b = \frac{2\pi}{3}$ en hieruit volgt voor de trillingstijd $T = \frac{2\pi}{b} = 3$ seconden.

De frequentie is $\frac{1}{T} = \frac{1}{3}$ Hz (hertz).

b $f = 5$, dus $T = \frac{1}{5}$ en $T = \frac{2\pi}{b}$ zodat $b = 10\pi$.

Omdat er een maximum is bij $t = 0$, is het handig om de sinusoïde te beschrijven met een cosinus. De amplitude a is gelijk aan 4,5, zodat $a(t) = 4,5 \cos(10\pi t)$.

15 Noem $x_Q = q$, dan $SP = 1 + q$ en $PQ = \sqrt{4 - q}$.

Dus $A = SP \cdot PQ = (1 + q)\sqrt{4 - q}$.

$$(1 + q)\sqrt{4 - q} = 2$$

$$(1 + q)^2(4 - q) = 4$$

$$-q^3 + 2q^2 + 7q + 4 = 4$$

$$q(-q^2 + 2q + 7) = 0$$

$$q = 0 \vee -q^2 + 2q + 7 = 0$$

Met de abc-formule volgt daaruit $p = 1 - 2\sqrt{2}$ (vervalt) of $p = 1 + 2\sqrt{2}$.

Dus $x_Q = 1 + 2\sqrt{2}$.

- 16** De prullenbak bestaat uit vier gelijkvormige gelijkbenige trapezia.

De hoogte van zo'n trapezium is: $\sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{6}a\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{36}a^2}$.

De oppervlakte van een trapezium is dus: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h^2 + \frac{1}{36}a^2} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{h^2 + \frac{1}{36}a^2} = \frac{1}{6}a \sqrt{h^2 + \frac{1}{36}a^2}$.

De oppervlakte van de prullenbak is dus: $A = 4 \cdot \frac{1}{6}a \sqrt{h^2 + \frac{1}{36}a^2} + a^2 = \frac{14}{3}a \sqrt{h^2 + \frac{1}{36}a^2} + a^2$.

De inhoud van de afgeknotte piramide bereken je door de inhoud van een piramide hoogte $h + x$ en hoogte x van elkaar af te trekken. Er geldt $\frac{x}{h+x} = \frac{a}{\frac{4}{3}a} = \frac{3}{4}$ en dat betekent $x = 3h$. De inhoud van de

piramide is dus: $I = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}a\right)^2 \cdot 4h - \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 3h = \frac{37}{27}a^2h$.

Gegeven is dat de inhoud gelijk is aan $30 \text{ L} = 30000 \text{ cm}^3$: $I = 30000$.

Dus $\frac{37}{27}a^2h = 30000$ en $h = \frac{27}{37} \cdot \frac{3000}{a^2}$.

Hiermee vind je $A = \frac{14}{3}a \sqrt{\frac{81000}{37a^2} + \frac{1}{36}a^2} + a^2$.

Je moet nu de waarde van a vinden waarbij A minimaal is.

GR: $y_1 = \frac{14}{3}x \sqrt{\left(\frac{810000}{37x^2}\right)^2 + \frac{1}{36}x^2} + x^2$ met venster bijvoorbeeld $[0,80] \times [0,10000]$.

Je vindt een minimum als $a \approx 34,2 \text{ cm}$.

- 17** $f(0) = 4$ en $f(\ln(4)) = 3\frac{1}{2}$, dus de coördinaten van de punten zijn $A(0,4)$ en $T(\ln(4), 3\frac{1}{2})$.

De coördinaten van de top van de parabool zijn (b,c) dus de vergelijking is van de vorm:

$$y = a(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}.$$

Invullen van $A(0,4)$ geeft: $a = \frac{1}{2\ln^2(4)}$.

$$\text{Dus } y = \frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}.$$

Voer in op de GR: $y_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}\right)$ en $y_2 = 1$.

Het snijpunt van y_1 en y_2 ligt op $x \approx 5,1$.

- 18** De inverse functie van f_c vind je door x uit te drukken in y :

$$\frac{1}{c(x-1)} + 1 = y$$

$$\frac{1}{c(x-1)} = y - 1$$

$$\frac{1}{x-1} = c(y-1)$$

$$x - 1 = \frac{1}{c(y-1)}$$

$$x = \frac{1}{c(y-1)} + 1$$

Dus $f_c^{\text{inv}}(x) = f_c(x)$ voor $c > 0$.

- 19** Uit de gegevens volgt voor de groeifactor g : $g^5 = \frac{1,0 \cdot 10^{-8}}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 10^{-2}$.

Dus $g = (10^{-2})^{\frac{1}{5}} = 10^{-0,4}$.

Het verband tussen L en m is dus van de vorm: $L = a \cdot 10^{-0,4m}$.

Invullen van bijvoorbeeld $(1,0; 1,0 \cdot 10^{-6})$ geeft: $a = \frac{10^{-6}}{10^{-0,4}} = 10^{-5,6}$.

Dus $L = 10^{-5,6} \cdot 10^{-0,4m} = 10^{-5,6-0,4m}$. Daarmee zie je dat $p = -5,6$ en $q = -0,4$.

- 20** Bepaal de inverse functie van f door x uit te drukken in y .

$$\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = y$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = e^y$$

$$(x+2) \cdot e^y = 2x-1$$

$$x e^y + 2 e^y = 2x-1$$

$$x e^y - 2x = -2 e^y - 1$$

$$x(e^y - 2) = -(2 e^y + 1)$$

$$x = -\frac{2 e^y + 1}{e^y - 2}$$

$$x = \frac{1+2 e^y}{2-e^y}$$

Er geldt dus $f^{\text{inv}}(x) = g(x)$.

- 21 a** GR: $y_1 = 10^{4,3-1,9x}$ en $y_2 = 1$.
Snijden bij $x \approx 2,3$, dus $h \approx 2,3$.

- b** Na de stijging wordt $h = 2,5$ net zo vaak overschreden als $h = 2,4$ voor de stijging.

$f(2,5) \approx 0,355$ en $f(2,4) \approx 0,550$, dus $\frac{0,550}{0,355} \approx 1,5$ keer zo groot.

- c** Met de oude waarden van a en b is $f(2,5) = 10^{-0,45}$.

Er moet voor de nieuwe waarden van a en b gelden:

$$10^{a-b \cdot 2,5} = 10^{-0,45} \text{ en } 10^{a-b \cdot 3,9} = 0,01$$

Omdat $0,01 = 10^{-2}$ krijg je het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} a - b \cdot 2,5 = -0,45 \\ a - b \cdot 3,9 = -2 \end{cases}$$

Trek beide vergelijkingen van elkaar af en je vindt $1,4b = 1,55$.

Hieruit volgt $b \approx 1,1$ en daarmee is $a \approx 2,3$.

- 22 a** De vergelijking $a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}$ kun je herleiden tot $a(0) = a(t) \cdot e^{\lambda t}$.
Invullen in de andere vergelijking geeft:

$$a(t) + b(t) = a(t) \cdot e^{\lambda t} + b(0)$$

$$a(t) - a(t) \cdot e^{\lambda t} + b(t) = b(0)$$

$$(1 - e^{\lambda t})a(t) + b(t) = b(0)$$

- b** Invullen van de tabelgegevens geeft de vergelijkingen:

$$0,739 + (1 - e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}) \cdot 0,60 = b(0)$$

$$0,713 + (1 - e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}) \cdot 0,20 = b(0)$$

Omdat $b(0)$ voor elke meteoriet hetzelfde is geldt:

$$0,739 + (1 - e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}) \cdot 0,60 = 0,713 + (1 - e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}) \cdot 0,20$$

$$0,739 + 0,6 - 0,6 e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} = 0,713 + 0,2 - 0,2 e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t}$$

$$0,4 e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} = 0,426$$

$$e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} = 1,065$$

$$1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t = \ln(1,065)$$

$$t = \frac{\ln(1,065)}{1,42 \cdot 10^{-11}} \approx 4 \cdot 10^9$$

Dus ongeveer 4 miljard jaar.

4 Differentiaal- en integraalrekening

V1 Eerst bereken je het moment waarop de sluis op het gevraagde niveau van 3 meter is:

$$h(t) = 3 \text{ geeft } (1,449 - 0,00166t)^2 + 1,5 = 3 \text{ en } (1,449 - 0,00166t)^2 = 1,5.$$

Dus $1,449 - 0,00166t = \sqrt{1,5} = 1,225$ en $0,00166t = 0,224$, zodat $t = 135$ s.

De afgeleide van de waterstand stelt de snelheid van de waterdaling voor.

$$h'(t) = 2(1,449 - 0,00166t) \cdot (-0,00166) = 5,51 \cdot 10^{-6}t - 0,00481.$$

$$\text{Vul } t = 125 \text{ in: } h'(135) = 5,51 \cdot 10^{-6} \cdot 135 - 0,00481 = -0,00407 \text{ m/s.}$$

Oftewel het waterniveau in de sluis daalt op het moment dat sluis het niveau van het meer bereikt met 4,1 mm/s.

1 a Het differentiequotient op het interval $[1,2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-5,5}{1} = -1,5$.

Het differentiequotient geeft de gemiddelde toename van f op het interval $[1,2]$ weer.

b $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6-0,5(x+h)^2 - (6-0,5x^2)}{x+h-x} = \lim_{h \rightarrow 0} (-x - 0,5h) = -x$.

2 a $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} + 5 - 2^{0,5x} \ln(2) \cdot 0,5 = \frac{3}{x} + 5 - 0,5 \cdot 2^{0,5x} \ln(2)$

b $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2(x)}$

c $h'(x) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (1 + 2x)e^{2x}$

d $k'(x) = 2 \cdot \sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 6 \sin(3x) \cos(3x)$

3 De raaklijn is van de vorm $y = ax + b$ met $a = f'(4)$.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(4) = -\frac{5}{18} \text{ en } f(4) = \frac{2}{3}.$$

$$-\frac{5}{18} \cdot 4 + b = \frac{2}{3} \text{ geeft } b = \frac{16}{9}.$$

$$\text{De raaklijn is } l: y = -\frac{5}{18}x + \frac{16}{9}.$$

4 $f'(x) = e^x - 2e^{-2x}$ en $f'(x) = 0$ geeft:

$$e^x - 2e^{-2x} = 0$$

$$e^x = 2e^{-2x}$$

$$e^{3x} = 2$$

$$3x = \ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(2)}{3}$$

$$f\left(\frac{\ln(2)}{3}\right) = e^{\frac{\ln(2)}{3}} + e^{-\frac{2\ln(2)}{3}} = e^{\ln(2) \cdot \frac{1}{3}} + e^{\ln(2) \cdot \frac{-2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Uit de grafiek van f blijkt dat om een minimum gaat, dus $\min f\left(\frac{\ln(2)}{3}\right) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

5 $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x - \frac{1}{x^2}$

$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x + \frac{2}{x^3}$$

$$f'(-1) = -\frac{1}{e} - 1 < 0, \text{ dus de grafiek van } f \text{ is bij punt } A \text{ aan het dalen.}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{e} - 2 < 0, \text{ dus de grafiek van } f \text{ is bij } A \text{ toenemend dalend.}$$

6 a $f_{-1}(x) = \sin^3(x) - \sin(x)$

$$f'_{-1}(x) = 3\sin^2(x)\cos(x) - \cos(x) = 3(1 - \cos^2(x))\cos(x) - \cos(x) = 2\cos(x) - 3\cos^3(x)$$

$$f''_{-1}(x) = -2\sin(x) + 9\cos^2(x)\sin(x) = \sin(x)(9\cos^2(x) - 2)$$

$$f''_{-1}(x) = 0 \text{ geeft: } \sin(x) = 0 \vee \cos^2(x) = \frac{2}{9} \text{ ofwel } \sin(x) = 0 \vee \cos(x) = \pm \frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

Op $[0, 2\pi]$ heeft $\sin(x) = 0$ drie oplossingen, $\cos(x) = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ heeft er twee, en $\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$ ook twee. Er zijn in totaal dus zeven oplossingen.

Plot de grafiek van f_{-1} en controleer dat het bij al die oplossingen ook om buigpunten gaat.

b Er moet gelden: $f_p(x) = \frac{1}{4}$ en $f'_p(x) = 0$.

$$f'_p(x) = 3\sin^2(x)\cos(x) + p\cos(x) = 3(1 - \cos^2(x))\cos(x) + p\cos(x) = (3 + p)\cos(x) - 3\cos^3(x)$$

$$f'_p(x) = 0 \text{ geeft:}$$

$$(3 + p)\cos(x) - 3\cos^3(x) = 0$$

$$3\cos(x) + p\cos(x) = 3\cos^3(x)$$

$$p = \frac{3(\cos^3(x) - \cos(x))}{\cos(x)} \wedge \cos(x) \neq 0$$

$$p = 3(\cos^2(x) - 1) \wedge \cos(x) \neq 0$$

$$p = -3\sin^2(x) \wedge \cos(x) \neq 0$$

Deze uitdrukking voor p invullen in $f_p(x) = \frac{1}{4}$ geeft:

$$\sin^3(x) - 3\sin^2(x) \cdot \sin(x) = \frac{1}{4}$$

$$-2\sin^3(x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin^3(x) = -\frac{1}{8}$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } p \text{ is } p = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Uit de grafiek van $f_{-\frac{3}{4}}$ kun je aflezen dat de punten waarvoor $f_{-\frac{3}{4}}(x) = \frac{1}{4}$, maxima zijn.

Als $\cos(x) = 0$, dan is $f'_p(x) = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

$$f_p\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \sin^3\left(\frac{1}{2}\pi\right) + p \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 + p$$

Er geldt dan $f_p\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}$, dus ook dan is $p = -\frac{3}{4}$.

$$f_p\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = \sin^3\left(1\frac{1}{2}\pi\right) + p \cdot \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1 - p$$

Er geldt dan $f_p\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}$ en $p = -1\frac{1}{4}$

Uit de grafiek van $f_{-1\frac{1}{4}}$ kun je aflezen dat de punten waarvoor $f_{-1\frac{1}{4}}(x) = \frac{1}{4}$, minima zijn, deze oplossing voor p vervalt daarmee.

7 $f'_p(x) = p - \frac{1}{x}$

$$f'_p(x) = 0 \text{ geeft } p - \frac{1}{x} = 0 \text{ en } p = \frac{1}{x}.$$

Substitueer p in f en je krijgt een formule van de kromme waarop de toppen van de grafieken van f_p liggen: $y = \frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) = 1 - \ln(x)$.

8 a Plot de grafiek van f .

$y = p$ is een horizontale lijn.

$f(x) = p$ heeft twee oplossingen als $y_{\text{top}} < p < 0$.

Voor de top geldt $f'(x_{\text{top}}) = 0$.

$$f(x) = x(3+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = (3+x)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(3+x)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3+x} + \frac{x}{2\sqrt{3+x}}$$

$$\sqrt{3+x} + \frac{x}{2\sqrt{3+x}} = 0$$

$$\sqrt{3+x} = -\frac{x}{2\sqrt{3+x}}$$

$$2(3+x) = -x$$

$$-3x = 6$$

$$x = -2$$

Min. $f(-2) = -2$.

De vergelijking $f(x) = p$ heeft twee oplossingen voor alle waarden van p waarvoor geldt $-2 < p \leq 0$.

b $y = ax$ is een rechte lijn door de oorsprong.

$f(x) = ax$ heeft maar één oplossing als de lijn $y = ax$ de grafiek van f raakt of als $y = ax$ een dalende lijn is, dus als $a < 0$.

$y = ax$ raakt de grafiek als $a = f'(0) = \sqrt{3}$, dus $f(x) = ax$ heeft maar één oplossing als $a = \sqrt{3} \vee a < 0$.

9 De raaklijn $l: y = ax + b$ gaat door $A(0, -2)$ en raakt de grafiek van f in punt $P(p, f(p))$. Er geldt:

$$a = f'(p) = \frac{p^2+1}{p^2} \text{ en } a = \frac{f(p)-(-2)}{p-0} = \frac{p^2+2p-1}{p^2}.$$

$$\frac{p^2+1}{p^2} = \frac{p^2+2p-1}{p^2}$$

$$p^2 + 1 = p^2 + 2p - 1$$

$$p = 1$$

Hieruit volgt: $a = 2$.

Omdat de lijn door $A(0, -2)$ gaat is $b = -2$. De raaklijn is dus $l: y = 2x - 2$.

10 a Dat gaat zo:

$$\frac{4}{x^2-6x+9} - 1 = 0$$

$$\frac{4}{(x-3)^2} = 1$$

$$4 = (x-3)^2$$

$$x-3 = -2 \vee x = 2$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

b De raaklijnen aan f door de nulpunten hebben helling $f'(1)$ en $f'(5)$.

$$\text{Er geldt: } f(x) = \frac{4}{(x-3)^2} - 1 \text{ dus } f'(x) = -\frac{8}{(x-3)^3}.$$

Hieruit volgt: $f'(1) = 1$ en $f'(5) = -1$.

Omdat $f'(1) = -\frac{1}{f'(5)}$ snijden de raaklijnen elkaar loodrecht.

- 11** Twee grafieken snijden elkaar loodrecht als $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = -\frac{1}{g'_p(x)}$.

Uit $f(x) = g_p(x)$ volgt: $x^2 - x = \frac{p}{x}$ en $p = x^3 - x^2$.

Uit $f'(x) = -\frac{1}{g'_p(x)}$ volgt: $2x - 1 = \frac{x^2}{p}$ en $p = \frac{x^2}{2x-1}$.

Deze uitdrukkingen voor p aan elkaar gelijkstellen geeft:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 &= \frac{x^2}{2x-1} \\ (x^3 - x^2)(2x-1) &= x^2 \\ 2x^4 - 3x^3 + x^2 &= x^2 \\ 2x^4 - 3x^3 &= 0 \\ x^3(2x-3) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 1,5 \end{aligned}$$

$x = 0$ vervalt, dus $x = 1,5$. Dit geeft: $p = 1,125$.

- 12** De quotiëntregel geeft: $f'(x) = \frac{8 \cos(x)}{(3+2 \sin(x))^2}$.

De grafiek van f heeft extremen wanneer $8 \cos(x) = 0$, ofwel wanneer $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Grafiek van f : $\max. f\left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right) = 1,2$ en $\min. f\left(-\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right) = -2$.

Omdat g_p een familie van standaard sinusfuncties beschrijft met amplitude p en evenwichtsstand $y = p - 1$ hebben de grafieken van g_p ook extremen op $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Er geldt $\max. g_p\left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right) = 2p - 1$ en $\min. g_p\left(-\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right) = -1$.

De grafieken van f en g_p kunnen elkaar alleen in het maximum van de grafieken van g_p raken en wel als $2p - 1 = 1,2$, dus als $p = 1,1$.

- 13 a** $F(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} x^5 + c = \frac{1}{3} x^5 + c$

b $g(x) = 5x^{1\frac{1}{2}}$

$$G(x) = \frac{2}{5} \cdot 5x^{2\frac{1}{2}} + c = 2x^2\sqrt{x} + c$$

c $H(x) = e \ln|x| + c$

d $j(x) = 7x^{-2\frac{3}{4}}$

$$J(x) = -\frac{4}{7} \cdot 7x^{-1\frac{3}{4}} + c = \frac{-4}{x^{\frac{4}{4}\sqrt{x^3}}} + c$$

e $K(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + c$

f $L(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + c = -\frac{3}{\ln(4)} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + c$

- 14** $f(x) = \frac{2x-3}{x^3} = 2x^{-2} - 3x^{-3}$ geeft $F(x) = -1 \cdot 2x^{-1} - \frac{1}{2} \cdot 3x^{-2} + c = \frac{-2}{x} + \frac{3}{2x^2} + c$.

Uit $F(1) = 2$ volgt $-2 + \frac{3}{2} + c = 2$ en $c = 2\frac{1}{2}$, dus $F(x) = \frac{-2}{x} + \frac{3}{2x^2} + 2\frac{1}{2}$.

- 15 a** $F(x) = x^3 - 6x + c$

Als de grafiek van de primitieve de x -as raakt dan is $F(x) = 0 \wedge F'(x) = f(x) = 0$.

Hieruit volgt $3x^2 - 6 = 0$ dus $x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$.

Voor $x = -\sqrt{2}$ moet dan gelden $F(-\sqrt{2}) = 0$ dus $(-\sqrt{2})^3 - 6 + c = 0$ en $c = 2\sqrt{2} + 6$.

Dit geeft $F(x) = x^3 - 6x + 2\sqrt{2} + 6$.

Voor $x = \sqrt{2}$ moet eveneens gelden $F(\sqrt{2}) = 0$ dus $(\sqrt{2})^3 - 6 + c = 0$ en $c = -2\sqrt{2} + 6$.

Dit geeft $F(x) = x^3 - 6x - 2\sqrt{2} + 6$.

b $\int_{-2}^p (3x^2 - 6) dx = -4$ geeft $[x^3 - 6x]_{-2}^p = -4$.

$p^3 - 6p - (-8 + 12) = -4$ geeft $p^3 - 6p = 0$ en $p = -\sqrt{6} \vee p = 0 \vee p = \sqrt{6}$.

16 a $\int_{-4}^0 (5 \cdot 2^x + 3) dx = \left[5 \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} + 3x \right]_{-4}^0 = \left(5 \cdot \frac{2^0}{\ln(2)} + 3 \cdot 0 \right) - \left(5 \cdot \frac{2^{-4}}{\ln(2)} + 3 \cdot -4 \right) \approx 18,763$

b $\int_1^2 (3x^2 + \sin(x)) dx = [x^3 - \cos(x)]_1^2 = (2^3 - \cos(2)) - (1^3 - \cos(1)) \approx 7,956$

c $\int_{\frac{1}{3}}^3 \left(\frac{1}{3x+1} \right) dx = \left[\frac{1}{3} \ln|3x+1| \right]_{\frac{1}{3}}^3 = \frac{1}{3} \ln(10) - \frac{1}{3} \ln(2) = \frac{1}{3} \ln(5)$

d GR: $\int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) dx \approx 0,785$

e $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} (\cos(2x) - \cos^2(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \left(\cos(2x) - \left(\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \right) \right) dx = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \left(\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \right) dx =$
 $\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2}x \right]_0^{\frac{1}{6}\pi} = \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\pi$

17 $F'(x) = -\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) = f(x)$

18 Plot de gevraagde grafieken met venster $[-2,5] \times [-1,3]$.

De linkergrens van de oppervlakte is $x = 0$, de rechtergrens $x = 4$.

De grafieken snijden elkaar als $x = 2$. De oppervlakte van V is dus:

$$\text{opp}(V) = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 g(x) dx = \left[\frac{2}{3} x^{1\frac{1}{2}} \right]_0^2 + \left[-\frac{2}{3} (4-x)^{1\frac{1}{2}} \right]_2^4 = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

19 a De grafieken van f en g_a snijden elkaar als $\sqrt{x} = a - \sqrt{x}$, ofwel als $x = \frac{1}{4}a^2$.

$$\text{opp}(V) = \int_{\frac{1}{4}a^2}^a \left(2x^{\frac{1}{2}} - a \right) dx = \left[\frac{4}{3} x^{1\frac{1}{2}} - ax \right]_{\frac{1}{4}a^2}^a = \frac{1}{12}a^3 - a^2 + \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

b De oppervlakte van vierkant $ABCD$ is a^2 , dus er moet gelden:

$$\frac{1}{12}a^3 - a^2 + \frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{1}{2}a^2$$

Oplossen met de GR geeft $a \approx 0,87$.

20 Als de grafiek van f_r een halve cirkel met straal r beschrijft, is het omwentelingslichaam rondom de x -as van f_r een bol met straal r . De inhoud van dat lichaam is:

$$I = \int_{-r}^r \pi \cdot (f_r(x))^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$\text{En } \pi \cdot \left[r^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^r = \pi \cdot \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - \left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3 \right) \right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

21 a De grafieken van f en g snijden elkaar op $x = 0$, $x = 2$ en $x = 3$. De oppervlakte van de vlakdelen zijn dus:

$$\text{opp}(V) = \int_0^2 (2x^3 - 10x^2 + 12x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 3\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^2 = 5\frac{1}{3}$$

$$\text{opp}(W) = \int_2^3 (-2x^3 + 10x^2 - 12x) dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + 3\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 \right]_2^3 = \frac{5}{6}$$

De verhouding tussen deze oppervlaktes is $\frac{3}{16} \cdot \frac{6}{5} = \frac{32}{5}$, ofwel $32 : 5$.

$$b \quad I = \pi \cdot \int_2^3 (-2x^3 + 10x^2 - 12x)^2 dx = \pi \cdot \int_2^3 (4x^6 - 40x^5 + 148x^4 - 240x^3 + 144x^2) dx$$

$$\text{En } \pi \cdot \left[\frac{4}{7}x^7 - \frac{20}{3}x^6 + \frac{148}{5}x^5 - 60x^4 + 48x^3 \right]_2^3 = \pi \cdot \left(\frac{648}{35} - \frac{1856}{105} \right) = \frac{88}{105}\pi.$$

22 Schets of plot de grafiek van f en de oppervlakte V .

Functie f en de lijn $x = 4$ snijden elkaar in $f(4) = \ln(3)$.

$$\text{Er geldt } I = \int_0^{\ln(3)} \pi 4^2 dy - \int_0^{\ln(3)} \pi (f^{\text{inv}}(y))^2 dy.$$

Ga na dat de inverse $f^{\text{inv}}(y) = e^y + 1$ is.

$$I = 16\pi \ln(3) - \int_0^{\ln(3)} \pi (e^y + 1)^2 dy = 16\pi \ln(3) - \int_0^{\ln(3)} \pi (e^{2y} + 2e^y + 1) dy$$

$$\text{Dit geeft } I = 16\pi \ln(3) - \pi \left[\frac{1}{2}e^{2y} + 2e^y + y \right]_0^{\ln(3)} = 16\pi \ln(3) - \pi \left(4\frac{1}{2} + 6 + \ln(3) - 2\frac{1}{2} \right) = 15\pi \ln(3) - 8\pi.$$

23 a De zijden van $ABCD$ zijn van lengte 16, met $a = 1$, dus $b = a + 16 = 17$.

$$\text{De inhoud van het omwentelingslichaam is: } > \int_1^{17} \pi \cdot (16^2 - (f(x))^2) dx = \int_1^{17} \pi \cdot \left(256 - \frac{256}{x} \right) dx.$$

$$\text{Dit geeft } 256\pi \cdot \int_1^{17} \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx = 256\pi \cdot [x - \ln(x)]_1^{17} = 256\pi(16 - \ln(17)).$$

b De lengte van AB is gelijk aan die van AD . Er geldt dus $b = a + \frac{16}{\sqrt{a}}$.

De waarde van b is minimaal als $\frac{db}{da} = 0$.

$$\frac{db}{da} = 1 - \frac{8}{a\sqrt{a}} = 0 \text{ als } \frac{8}{a\sqrt{a}} = 1, \text{ dus } a = \sqrt[3]{8^2} = 4.$$

Dit geeft $b = 12$.

24 a Als de grafieken van f en g elkaar raken in punt $A(0, 1\frac{1}{2})$ moet gelden $f'(0) = g'(0)$.

$$f(x) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2} \text{ dus } f'(x) = 3x^2 - 3x - 1 \text{ en } g'(x) = -1.$$

Dit geeft $f'(0) = -1$ en $g'(0) = -1$, dus de grafieken van f en g raken elkaar inderdaad in A .

b De oppervlakte van driehoek OAB is $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{8}$.

Aan het functievoorschrift van f is af te lezen dat deze nulpunten heeft voor $x = -1$, $x = 1$ en $x = 1\frac{1}{2}$.

De oppervlakte van het linkerdeel (ingesloten door de assen en de grafiek van f is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (x^2 - 1) \left(x - 1\frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

De oppervlakte van het rechterdeel is dus $1\frac{1}{8} - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, en dat is precies de helft van de oppervlakte van het linkerdeel.

c Gegeven is $h(x) = \frac{-x + 1\frac{1}{2}}{(x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2})}$.

Voor $x \neq 1\frac{1}{2}$ kun je h schrijven als $h(x) = -\frac{1}{x^2 - 1}$.

Deze functie heeft asymptoten wanneer $x^2 - 1 = 0$, ofwel op $x = -1$ en $x = 1$.

Er geldt: $\lim_{x \uparrow 1\frac{1}{2}} h(x) = \lim_{x \downarrow 1\frac{1}{2}} h(x) = -\frac{4}{5}$.

Dus de perforatie zit op $(1\frac{1}{2}, -\frac{4}{5})$.

25 a GR: $y_1 = \frac{100x^3}{x^3+25000}$ en $y_2 = 75$.

Snijpunt bij $x \approx 42$, dus $p \approx 42$ mmHg.

b $v'(p) = \frac{7500000p^2}{(p^3+25000)^2}$

Voer deze afgeleide in de GR in en bepaal het maximum.

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}\frac{v}{100-v} &= 0,00004p^3 \\ v &= 0,00004p^3(100-v) \\ v &= 0,004p^3 - 0,00004vp^3 \\ v + 0,00004vp^3 &= 0,004p^3 \\ v(1 + 0,00004p^3) &= 0,004p^3 \\ v &= \frac{0,004p^3}{1+0,00004p^3} = \frac{100p^3}{25000+p^3}\end{aligned}$$

26 a $(0,0)$ invullen geeft $p^2 + 2p = 0$ en dus $p = 0 \vee p = -2$.

Als $p = 0$ is $f_0(x) = x^2$ en is de top $(0,0)$.

Als $p = -2$ is $f_{-2}(x) = (x+2)^2 - 4$ en is de top $(-2, -4)$.

b Met $x = p+1$ geldt $k : y = 2(p+1) - 1 = 2p+1$ en $f_p(p+1) = (p+1-p)^2 + 2p = 2p+1$.

Dus k en f_p snijden elkaar in $(p+1, 2p+1)$ voor willekeurige p . Om aan te tonen dat dit de coördinaten van een raakpunt zijn moet gelden: $f'_p(p+1) = 2$.

$f'_p(x) = 2(x-p)$ geeft $f'_p(p+1) = 2(p+1-p) = 2$, dus dat klopt inderdaad.

c Punt S_p : $x^2 = (x-p)^2 + 2p$ geeft $x_{S_p} = \frac{p^2+2p}{2p} = \frac{1}{2}p + 1$.

Punt Q : $f'_0(x) = 2x = 2$ geeft $x = 1$, dus $Q(1,1)$.

Punt R_p : $R_p(p+1, 2p+1)$.

Dus is $\frac{x_Q + x_{R_p}}{2} = \frac{1+p+1}{2} = \frac{1}{2}p + 1 = x_{S_p}$.

d De coördinaten van de punten zijn $Q(1,1)$, $R_4(5,9)$ en $S_4(3,9)$.

De oppervlakte van V is: $\int_1^3 (f_0(x) - (2x-1)) dx + \int_3^5 (f_4(x) - (2x-1)) dx$.

En $\int_1^3 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_3^5 ((x-4)^2 + 8 - 2x + 1) dx = \int_1^3 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_3^5 (x^2 - 10x + 25) dx$

geeft $\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_1^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x\right]_3^5 = 5\frac{1}{3}$.

27 a $A(p) = \int_{-9}^p \sqrt{x+9} dx \Rightarrow \int_{-9}^p (x+9)^{\frac{1}{2}} dx =$

$= \left[\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}\right]_{-9}^p = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}.$

- b** Gevraagd wordt naar de waarde van p waarvoor geldt $A(p) = \frac{1}{8}A(0)$.

$$\text{Er geldt } A(0) = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} = 18.$$

$$\text{Vul in en herleid } \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \cdot 18.$$

$$\text{Dit geeft } (p+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}, \text{ dus } p+9 = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ en } p = \frac{9}{4} - 9 = -6\frac{3}{4}.$$

- c** Er geldt $g(x) = f(-x+9) = \sqrt{-x}$

Door symmetrie kan je zeggen dat de grafieken van f en g elkaar snijden op $x = -4\frac{1}{2}$. De inhoud van het omwentelingslichaam is dus:

$$\begin{aligned} \int_{-4\frac{1}{2}}^0 \pi(f(x))^2 dx - \int_{-4\frac{1}{2}}^0 \pi(g(x))^2 dx &= \pi \cdot \int_{-4\frac{1}{2}}^0 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx \\ &= \pi \cdot \int_{-4\frac{1}{2}}^0 (x+9 - -x) dx \\ &= \pi \cdot \int_{-4\frac{1}{2}}^0 (2x+9) dx \\ &= \pi \cdot [x^2 + 9x]_{-4\frac{1}{2}}^0 = 20\frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

28 a $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 + 1) \cdot e^x = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x = (x+1)^2 \cdot e^x$

- b** Een functie heeft nulpunten wanneer $f(x) = 0$, ofwel wanneer $x^2 + 1 = 0$ of $e^x = 0$. Deze beide vergelijkingen hebben geen oplossingen.

Een functie kan extremen hebben wanneer $f'(x) = 0$, ofwel wanneer $(x+1)^2 = 0$ of $e^x = 0$.

Deze laatste vergelijking heeft geen oplossing. Uit de eerste vergelijking volgt: $x = -1$.

Functie f heeft een horizontale raaklijn bij $x = -1$.

Er geldt voor elke $x \neq -1$: $(x+1)^2 \geq 0$ en $e^x > 0$, dus $f'(x) \geq 0$.

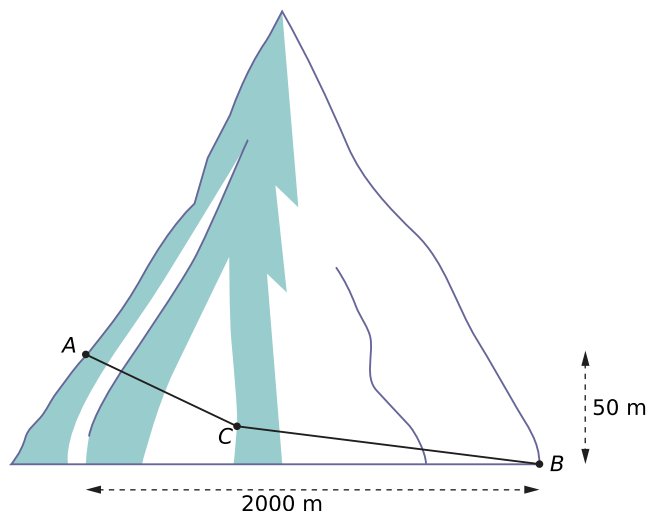
Bij $x = -1$ verandert $f'(x)$ niet van teken, en is dus geen extreme waarde.

- c** $f''(x) = 2(x+1) \cdot e^x + (x+1)^2 \cdot e^x = (2x+2) \cdot e^x + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$
 $f''(x) = 0$ geeft $x^2 + 4x + 3 = 0 \vee e^x = 0$.

Hieruit volgt $(x+1)(x+3) = 0$ en $x = -1 \vee x = -3$.

5 Vlakke meetkunde

V1 Zie de figuur.



Kies punt $A = (0,0)$, dan $B = (2000, -50)$.

Voor traject I geldt een richtingscoëfficiënt van $\frac{0,05}{1} = 0,05$, dus $y = -0,05x + b$.

$(0,0)$ invullen geeft $b = 0$.

Voor traject II geldt een richtingscoëfficiënt van $\frac{0,0125}{1} = 0,0125$, dus $y = -0,0125x + b$.

$(2000, -50)$ invullen geeft $b = -25$.

Vervolgens los je op: $-0,05x = -0,0125x - 15$.

Dit levert op $x = 666\frac{2}{3}$ en de bijbehorende y -waarde is: $y = -0,05 \cdot 666\frac{2}{3} = -33\frac{1}{3}$.

De afstand is: $BC = \sqrt{(2000 - 666\frac{2}{3})^2 + (50 - 33\frac{1}{3})^2} = \sqrt{1778055\frac{2}{3}} \approx 1333,44$ m.

1 a $\sin(50) = \frac{|AD|}{10}$

$|AD| = 10 \sin(50) \approx 7,66$

b $|AB| = 10 - 10 \cos(50) \approx 3,57$

2 De verhoudingen van de zijden zijn:

DE	EF	DF
2	$\sqrt{3}$	1

Als $EF = 9\sqrt{2}$ dan is $DE = \frac{2 \cdot 9\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{6}$.

3 $|AC| = \frac{10}{\sin(35)} \cdot \sin(115) \approx 15,80099$

$|AE| = 15,80099 - 7 \approx 8,80099$

$\angle ADE = \angle ABC = 115^\circ$ (F-hoek) en $\angle AED = 180^\circ - 35^\circ - 115^\circ = 30^\circ$.

$|AD| = \frac{8,80099}{\sin(115)} \cdot \sin(30) \approx 4,86$

4 $5^2 = 6^2 + 4,5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4,5 \cdot \cos(\angle ABC)$ geeft $54 \cdot \cos(\angle ABC) = 31,25$.

En $\cos(\angle ABC) \approx 0,5787$ geeft $\angle ABC \approx 55^\circ$.

5 $BD = \sqrt{4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(65)} \approx 5,6315$

$\angle BDE = 180 - 45 - 35 = 100^\circ$

$$BE = \frac{5,6315}{\sin(45)} \cdot \sin(100) \approx 7,8432$$

$$\cos(\angle ABE) = \frac{6}{7,8432}$$

$$\angle ABE \approx 40^\circ$$

6 a $|AB| = \sqrt{(34-14)^2 + (-4-25)^2} = \sqrt{841} = 29$

b $\left(\frac{14+34}{2}, \frac{-25+(-4)}{2}\right) = (24; -14,5)$

c $\frac{14+x_C}{2} = 34$ en $\frac{-25+y_C}{2} = -4$ geeft $x_C = 54$ en $y_C = 17$.

De coördinaten van C zijn $(54, 17)$.

d De richtingscoëfficiënt is $a = \frac{-4-25}{34-14} = \frac{21}{20} = 1,05$.

$AB: y = 1,05x + b$ door $(14, -25)$ geeft $b = -39,7$.

Dus $AB: y = -1,05x - 39,7$.

e De richtingscoëfficiënt van AB is $a = \frac{21}{20}$.

De richtingscoëfficiënt van m is $a_m = -\frac{20}{21}$.

$m: y = -\frac{20}{21}x + b$ door $C(54, 17)$ geeft $b = 68\frac{3}{7}$.

Dus $m: y = -\frac{20}{21}x + 68\frac{3}{7}$.

f De richtingscoëfficiënt van AB is $a = \frac{21}{20}$.

De richtingscoëfficiënt van een lijn door O en loodrecht op AB is $a_l = -\frac{20}{21}$.

$l: y = -\frac{20}{21}x + b$ door $O(0, 0)$ geeft $b = 0$.

Dus $l: y = -\frac{20}{21}x \approx -0,95x$.

Het snijpunt van AB en l is $S(19,83; -18,88)$.

$d(O, AB) = |OS| = \sqrt{(19,83)^2 + (-18,88)^2} \approx 27,4$.

7 a De coördinaten van punt A invullen geeft $-2 + 4 \cdot 3 = 10$ en dit klopt, dus punt A ligt op de lijn.

b Bij evenwijdige lijnen zijn de richtingscoëfficiënten gelijk. De gevraagde lijn is daarom van de vorm $m: x + 4y = c$ met c een nader te bepalen constante. Vind de waarde van c door het invullen van punt $B: 2 + 4 \cdot (-3) = -10$. Hieruit volgt: $m: x + 4y = -10$.

c l heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{4}$.

Lijn k door B en loodrecht op l heeft richtingscoëfficiënt 4 .

$k: y = 4x + b$ door $B(2, -3)$ geeft $b = -11$, dus $k: y = 4x - 11$.

Snijpunt k en $l: x + 4(4x - 11) = 10$ geeft $x = \frac{54}{17}$.

Snijpunt $S(\frac{54}{17}, \frac{29}{17})$.

$d(B, l) = |BS| = \sqrt{(\frac{54}{17} - 2)^2 + (\frac{29}{17} + 3)^2} = \sqrt{\frac{400}{17}} = \frac{20}{17}\sqrt{17}$.

8 $|AB| = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$

$\angle ADM = \angle BCM$ (Z-hoek).

$\angle MAD = \angle MCB$ (Z-hoek).

$\angle AMD = \angle BCM$ (overstaande hoek).

Dus $\triangle ADM \sim \triangle BCM$ en $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AM|}{|BM|}$.

Met $|AM| = x$ wordt dit $\frac{6}{2} = \frac{x}{3\sqrt{10-x}}$.

Dus $x = 3(3\sqrt{10} - x)$ en $4x = 9\sqrt{10}$, zodat $x = \frac{9}{4}\sqrt{10}$.

Een andere manier is het berekenen van het snijpunt M van de lijnen AB en CD . En dan de lengte van AM berekenen.

- 9** Noem het midden van BC punt M .

$\angle DAS = \angle BAM$, $\angle ASD = \angle AMB$, dus $\triangle ASD \sim \triangle AMB$.

Hieruit volgt: $\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{|AD|}{|AB|}$.

Omdat AM de zwaartelijn is geldt $|AS| : |SM| = 2 : 1$.

Hieruit volgt: $\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{2}{3}$ en $\frac{2}{3} = \frac{|AD|}{8}$, dus $|AD| = 5\frac{1}{3}$.

- 10** De bissectrice DG verdeelt de gelijkzijdige driehoek DEF in twee gelijke $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ driehoeken. De verhoudingen tussen de zijden van driehoek DEG zijn;

DE	DG	EG
2	$\sqrt{3}$	1

Als $DE = 3\sqrt{5}$ dan is $DG = \frac{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{15}$.

De bissectrices zijn bij een gelijkzijdige driehoek ook de zwaartelijnen, dus de lijnen snijden elkaar bij punt S in een verhouding $1 : 2$.

Dus $GS = \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{15} = \frac{1}{2}\sqrt{15}$

Voor de oppervlakte van de ingeschreven cirkel geldt dan $A = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)^2 = 3\frac{3}{4}\pi$.

- 11 a** Als bijvoorbeeld hoek R de rechte hoek is, dan is volgens Thales zijde PQ gelijk aan de middellijn van de cirkel. De grootste oppervlakte van driehoek PQR krijg je bij een maximale hoogte bij zijde PQ , dat wil zeggen dat de hoogte gelijk is aan r . Driehoek PQR is dan een gelijkbenige rechthoekige driehoek met oppervlakte $A = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$

- b** De zwaartelijnen verdelen een gelijkzijdige driehoek in zes gelijke $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ driehoeken.

Het zwaartepunt van driehoek PQR gaat dan door het middelpunt M van de cirkel.

Met $PM = r$ vind je $PQ = 2r\sqrt{3}$ en voor de bijbehorende hoogte $1\frac{1}{2}r$, dus $A = \frac{1}{2} \cdot 2r\sqrt{3} \cdot 1\frac{1}{2}r = 1\frac{1}{2}r^2\sqrt{3}$.

- 12 a** $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 2,25$

- b** Omdat P op de cirkel ligt, geldt $r = |MP|$, met:
 $|MP|^2 = (4-6)^2 + (-5-7)^2 = 148$, dus $r^2 = 148$.

Vergelijking c : $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 148$.

- c** Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x + 6y &= 12 \\ x^2 + 4x + y^2 + 6y &= 12 \\ (x+2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 &= 12 \\ (x+2)^2 + (y+3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

- 13 a** Omdat A op de cirkel ligt, geldt $r = |MA|$, met:
 $|MA|^2 = (-10 - -4)^2 + (25 - 21)^2 = 52$, dus $r^2 = 52$.

Vergelijking $c : (x + 10)^2 + (y - 25)^2 = 52$.

- b** Controleer dit door het punt in te vullen in de vergelijking van de cirkel:
 $(-5 + 10)^2 + (20 - 25)^2 = 50 < 52$, de afstand van B tot het middelpunt van de cirkel is kleiner dan de straal van de cirkel: punt B ligt binnen de cirkel.

- c** $MB : y = -x + 15$ invullen in de vergelijking van de cirkel:
 $(x + 10)^2 + (-x - 10)^2 = 52$ geeft $x^2 + 20x + 74 = 0$.

Met de abc-formule vind je $x = \frac{-20 \pm \sqrt{104}}{2} = -10 \pm \sqrt{26}$.

Snijpunten: $(-10 + \sqrt{26}, 25 - \sqrt{26})$ en $(-10 - \sqrt{26}, 25 + \sqrt{26})$.

- d** MA heeft r.c. $-\frac{2}{3}$ dus de raaklijn heeft r.c. $\frac{3}{2} = 1,5$.

$y = 1,5x + b$ door $A(-4, 21)$ geeft $b = 27$.

Raaklijn: $y = 1,5x + 27$.

- 14 a** $4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$ en $6 \cdot 4 + 6 \cdot 1 - 13 = 24 + 6 - 13 = 17$. Dus de coördinaten van A voldoen aan de gegeven vergelijking en daarom ligt dit punt op c .

- b** Kwadraat afsplitsen: $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = -13 + 9 + 9$, dus $c : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Middelpunt $M(3, 3)$, en de r.c. van AM is $\frac{1-3}{4-3} = -2$.

De helling van de raaklijn is $-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, dus $l : y = \frac{1}{2}x + b$.

Punt A invullen geeft $b = -1$.

De raaklijn door A is $l : y = \frac{1}{2}x - 1$.

- c** Raaklijnen door B $y = px + 2$.

Raken aan $c : (x - 3)^2 + (px - 1)^2 = 5$ geeft $(1 + p^2)x^2 + (-6 - 2p)x + 5 = 0$.

$D = 0$ geeft $(6 + 2p)^2 - 20(1 + p^2) = 0$ en $p = 2 \vee p = -0,5$.

Raaklijn $y = 2x + 2$ (invullen in cirkelvergelijking) raakt de cirkel in $(1, 4)$.

Raaklijn $y = -0,5x + 2$ raakt de cirkel in $(2, 2)$.

- d** $|BM| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10}$ en de straal van de cirkel is $\sqrt{5}$.

Dus $d(B, c) = \sqrt{10} - \sqrt{5}$.

- 15 a** $M_1(-1, 0)$ en $M_2(0, -1)$.

Lijn l gaat door deze punten en heeft dus richtingscoëfficiënt $\frac{0 - (-1)}{-1 - 0} = -1$.

Er geldt $l : y = -x + b$.

Invullen van M_2 geeft: $-1 = -1 \cdot 0 + b$ ofwel $b = -1$.

Dus $l : y = -x - 1$.

- b** De vergelijking van l invullen in de vergelijking van c_1 geeft:

$$(x + 1)^2 + (-x - 1)^2 = 4$$

$$2(x + 1)^2 = 4$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \pm\sqrt{2} - 1$$

Dit geeft de snijpunten $(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2})$ en $(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2})$.

De vergelijking van l invullen in de vergelijking van c_2 geeft:

$$x^2 + (-x - 1 + 1)^2 = 4$$

$$2x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Dit geeft de snijpunten $(-\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 1)$.

- c De grootste afstand is die tussen $(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2})$ en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 1)$.

De afstand tussen beide is $\sqrt{(-\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - (-\sqrt{2} - 1))^2} \approx 5,4$.

- 16 Teken een cirkel met middelpunt M . Teken punt P en de raaklijnen aan de cirkel, door het punt P . Noem de raakpunten Q en R . $\angle PRM = \angle PQM = 90^\circ$ (raaklijnen). $|QM| = |RM| = \text{straal}$. $|PM| = |PM|$. Dus $\triangle PRM \cong \triangle PQM$. Dus $|PR| = |QR|$.

17 a $|\vec{a}| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$

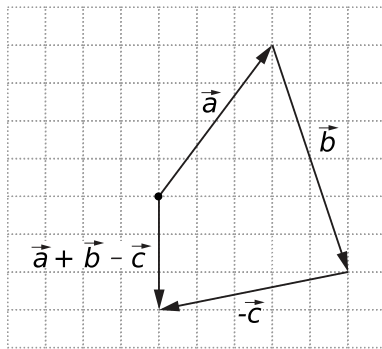
b $\arctan\left(-\frac{4}{7}\right) \approx -29,66^\circ$

De draaihoek van vector $\vec{a}$ is $180^\circ + -29,66^\circ \approx 150,26^\circ$.

c $b_x = 12 \cos(215) \approx -9,83$ en $b_y = 12 \sin(215) \approx -6,88$.

Dus $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 & 83 \\ -6 & 88 \end{pmatrix}$.

- 18 a Zie de figuur.



b $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2-5 \\ 4-6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

c $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ en $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$.

Inproduct: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot -6 = -18 = 5 \cdot \sqrt{40} \cdot \cos(\varphi)$.

Dit geeft $\cos(\varphi) = \frac{-18}{5 \cdot \sqrt{40}} \approx -0,569$ en $\varphi \approx 124,7^\circ$.

19 a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$

b Er geldt: $\vec{BC} \cdot \vec{AC} = -6 \cdot 1 + 3 \cdot 14$ en $\vec{BC} \cdot \vec{AC} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 14^2} \cdot \cos(\varphi)$.

Hieruit volgt: $36 = \sqrt{45} \cdot \sqrt{197} \cdot \cos(\varphi)$ en $\cos(\varphi) \approx 0,3824$, dus $\varphi \approx 67,5^\circ$.

c $Z = \left(\frac{0+7+1}{3}, \frac{0+11+14}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{25}{3}\right)$.

20 a $M\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = M\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

b $\vec{MA} = \vec{OA} - \vec{OM} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

Roteer vector $\overrightarrow{MA}$ 90° linksom en je vindt vector $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}, \text{ dus } \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Roteer vector $\overrightarrow{MA}$ 90° rechtsom en je vindt vector $\overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD}, \text{ dus } \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dus $B(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en $D(-2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$.

- c Punt Z ligt op $\frac{2}{3}$ afstand van punt M ten opzichte van de oorsprong, dus $\overrightarrow{OZ} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Of: } Z = \left(\frac{0 + (-3) + 2}{3}, \frac{0 + 1 + 15}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}, 2 \right).$$

21 Neem het gemeenschappelijke punt van alle figuren als oorsprong.

$$\text{I: } \overrightarrow{OZ_I} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } A_I = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$\text{II: } \overrightarrow{OZ_{II}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ en } A_{II} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

$$\text{III: } \overrightarrow{OZ_{III}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ en } A_{III} = 7^2 - 4 \cdot 6 = 25.$$

$$\text{IV: } \overrightarrow{OZ_{IV}} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ en } A_{IV} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10.$$

De oppervlakte van de totale figuur is 47.

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{6}{47} \cdot \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{6}{47} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{25}{47} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{10}{47} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}.$$

De coördinaten van het zwaartepunt zijn $(0,24; 2,21)$.

22 a Noem de straal x . En $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

De lijn MP staat loodrecht op AB en MQ staat loodrecht op BC , dus $PB = MQ = MP = BQ = x$.

$AP = AR = 4 - x$, $CQ = CR = 3 - x$ en $AC = AR + RC = 4 - x + 3 - x = 5$.

Dus $7 - 2x = 5$ en $x = 1$.

b $\angle NAU = \angle MAP$, $\angle AUN = \angle APM$, $\angle UNA = \angle UPM$ (F-hoeken).

Dus $\triangle AUN \sim \triangle APM$.

Hieruit volgt $\frac{AU}{AP} = \frac{UN}{PM}$ en $\frac{AU}{3} = \frac{r}{1}$, zodat $AU = 3r$.

c $NT = UP = 4 - 3r - 1 = 3 - 3r$, omdat UN loodrecht op AB staat.

$MT = MP - TP = 1 - r$ en $NM = r + 1$.

De stelling van Pythagoras in driehoek NTM levert: $(1 - r)^2 + (3 - 3r)^2 = (r + 1)^2$.

GR: $y_1 = (1 - x)^2 + (3 - 3x)^2$ en $y_2 = (x + 1)^2$ geeft $x \approx 0,52$ en $x \approx 1,92$.

r is kleiner dan 1, dus $r \approx 0,52$.

23 a $OA = \sin(\alpha) \cdot AD = \sin(\alpha) \cdot 1 = \sin(\alpha)$ en $AE = \cos(\alpha) \cdot AB = \cos(\alpha)$.

$$OE = OA + AE = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\text{Oppervlakte } OETS = OE^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3}^2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

b $\triangle GCR \sim \triangle GOQ$, dus $\frac{GR}{GQ} = \frac{CR}{OQ}$.

$$QR = SC = \cos(\alpha) \text{ en } GQ = \sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1.$$

$$GR = GQ - QR = \sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1 - \cos(\alpha) = \sin(\alpha) + 1 \text{ en } CR = HT = ET - EH = \sin(\alpha) + \cos(\alpha) - 1.$$

$$\text{Invullen geeft: } PQ = \frac{(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) - 1)(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1)}{\sin(\alpha) + 1}.$$

$$OP = OQ + PQ = 1 + \frac{(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) - 1)(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1)}{\sin(\alpha) + 1}.$$

c $OP = 1 + \frac{(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) - 1)(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1)}{\sin(\alpha) + 1}$

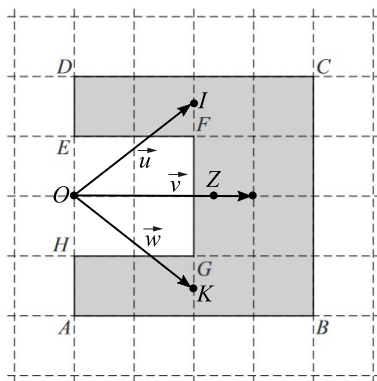
$$(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) - 1)(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1) =$$

$$\sin^2(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \cos(\alpha) - \sin(\alpha) - \cos(\alpha) - 1 =$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) - 1 =$$

$$1 + \sin(2(\alpha)) - 1 = \sin(2\alpha), \text{ dus } OP = 1 + \frac{\sin(2(\alpha))}{\sin(\alpha) + 1}.$$

24 Zie de figuur.



Trek de lijn FG aan beide kanten door en kies O tussen E en H .

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ en bijbehorende oppervlakte is } 2.$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en bijbehorende oppervlakte is } 8.$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ en bijbehorende oppervlakte is } 2.$$

Als Z het zwaartepunt is van de samengestelde figuur, met totale oppervlakte 12, dan is

$$\vec{OZ} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dus de coördinaten van het zwaartepunt zijn $(2\frac{1}{3}; 0)$. Zie de figuur.

- 25** Er is een rechthoekige driehoek waarvan één hoekpunt het middelpunt van de cirkel en een rechthoekzijde 45 cm is (de helft van de getekende koorde). De andere rechthoekzijde heeft lengte $r - 18$ en de schuine zijde heeft lengte r .

In die rechthoekige driehoek geldt: $45^2 + (r - 18)^2 = r^2$, dit geeft $2025 + r^2 - 36r + 324 = r^2$.

Dus $r = \frac{2349}{36} \approx 65$ cm.

- 26 a** $AM = 1$, $AN = r$ en $DM = DN - 1$.

Stelling van Pythagoras in $\triangle ADN$: $DN^2 + AD^2 = AN^2$, geeft: $AD^2 = r^2 - DN^2$.

Stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$: $DM^2 + AD^2 = AM^2$, geeft: $(DN - 1)^2 + AD^2 = 1$.

Substitueren geeft: $(DN - 1)^2 + r^2 - DN^2 = 1$ en dit is: $DN^2 - 2DN + 1 + r^2 - DN^2 = 1$.

Hieruit volgt: $2DN = r^2$ dus $DN = \frac{1}{2}r^2$.

- b** $DM = DN - 1 = \frac{1}{2}r^2 - 1$ en $CD = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}(r - 1)$.

$DM = CD$ geeft $\frac{1}{2}r^2 - 1 = \frac{1}{2}(r - 1)$ en $r^2 - r - 1 = 0$.

Met de abc-formule vind je: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Het tweede antwoord voldoet niet, dus $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

- 27 a** $\frac{MD}{OB} = \frac{AM}{AO}$ en $AM = a - 1 - r$ geeft $\frac{r}{1} = \frac{a-1-r}{a}$.

Dus $ar + r = a - 1$ en $r(a + 1) = a - 1$, zodat $r = \frac{a-1}{a+1}$.

- b** Er geldt $OB = AB = 1$ en $OB^2 + AB^2 = OA^2$, dus $a = OA = \sqrt{2}$.

Invullen in de formule bij a geeft $r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Dus $p = 3$ en $q = -2$.

6 Parameterkrommen

- V1** Stel eerst een parametervoorstelling op voor het ronddraaien van de middelste arm. Gebruik hiervoor het feit dat de middelste armen rond het punt (0,0) draaien.

Dit geeft:
$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{21}t\right) \\ y(t) = 5 \sin\left(\frac{2\pi}{21}t\right) \end{cases}$$

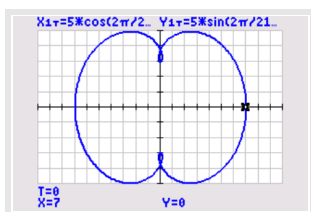
Het eindpunt van de kleine arm doorloopt, gezien vanuit het eindpunt van een lange arm een cirkel om dit eindpunt.

De parametervoorstelling is:
$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}t\right) \\ y(t) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{7}t\right) \end{cases}$$

Deze twee parametervoorstellingen kun je vervolgens bij elkaar optellen:

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{21}t\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}t\right) \\ y(t) = 5 \sin\left(\frac{2\pi}{21}t\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{7}t\right) \end{cases}$$

Vervolgens kun je deze parametervoorstelling tekenen met behulp van de grafische rekenmachine. Je ziet dat het karretje een kleine lus maakt wanneer deze de y-as passeert.



- 1 a** Lijn l heeft richtingsvector $\begin{pmatrix} 21 \\ -18 \end{pmatrix}$ en die kun je vereenvoudigen tot $\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Met bijvoorbeeld plaatsvector $\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$ wordt de vectorvoorstelling $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Lijn m gaat door (0, -34) en (34,0).

Richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en steunvector bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ geven vectorvoorstelling $m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- b** Parametervoorstelling van lijn l is: $(x, y) = (7p, 18 - 6p)$.

Dit invullen in de vergelijking van lijn $m : x - y = 34$ geeft $7p - (18 - 6p) = 34$ en dus $p = 4$.

$p = 4$ invullen in de parametervoorstelling van l geeft snijpunt: (28, -6).

- 2 a** De richtingsvector van lijn w is $\overrightarrow{rc_w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dus $rc_w = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. En $rc_v = -\frac{2}{3}$.

Hieruit volgt: $rc_v = -\frac{1}{rc_w}$, dus de lijnen v en w staan loodrecht op elkaar.

- b** De normaalvector van l is gelijk aan de richtingsvector van k : $\overrightarrow{rc_k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Neem voor de steunvector van loodlijn k : $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De vectorvoorstelling van k is: $k : ((x), (y)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- c De richtingsvector van m is gelijk aan de normaalvector van p : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De vergelijking van p is: $p: 2x - y = c$.

Het punt $(1,4)$ invullen geeft: $p: 2x - y = -2$.

- 3 De normaalvector van l is $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dit is de richtingsvector van de lijn k loodrecht op l .

De loodlijn gaat door P geeft: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt de parametervoorstelling: $(x, y) = (2 + 3t, 2 + 4t)$.

Invullen in de vergelijking van l : $3(2 + 3t) + 4(2 + 4t) = 8$.

Hieruit volgt: $t = -\frac{6}{25}$ en het snijpunt $S(1\frac{7}{25}; 1\frac{1}{25})$.

$$d(P, l) = \sqrt{\left(2 - 1\frac{7}{25}\right)^2 + \left(2 - 1\frac{1}{25}\right)^2} = 1,2.$$

- 4 Neem $P(t, 4 + t)$.

De normaalvector van k is $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en dit is de richtingsvector van de loodlijn.

Lijn door $P \perp l$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 4 + t \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Deze lijn snijdt l als $t + p - 3(4 + t - 3p) = 2$, dus als $p = 0,2t + 1,4$.

Dus $S(1,2t + 1,4; 0,4t - 0,2)$ en $d(P, l) = \sqrt{(1,2t + 1,4 - t)^2 + (0,4t - 0,2 - (4 + t))^2} = 2\sqrt{10}$.

Dit geeft $(0,2t + 1,4)^2 + (-0,6t - 4,2)^2 = 40$.

Haakjes wegwerken en ontbinden: $x = 3 \vee t = -17$.

Dus $P(-17, -13)$ of $P(3, 7)$.

- 5 Een mogelijke richtingsvector van lijn n is $\vec{r}_n = \begin{pmatrix} 25 \\ 300 \end{pmatrix}$ en van lijn m is $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} -300 \\ 10 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{r}_n| = \sqrt{25^2 + 300^2} = \sqrt{90625} \text{ en } |\vec{r}_m| = \sqrt{(-300)^2 + 10^2} = \sqrt{90100}.$$

Inproduct: $25 \cdot (-300) + 300 \cdot 10 = \sqrt{90625} \cdot \sqrt{90100} \cdot \cos(\varphi)$ geeft $-4500 = \sqrt{90625 \cdot 90100} \cos(\varphi)$, dus $\varphi \approx 92,85^\circ$.

De hoek tussen beide lijnen is $180^\circ - 92,85^\circ \approx 87,15^\circ$.

- 6 a De straal is $r = 25 - 5 = 20$, dus $c: (x - 25)^2 + (y - 15)^2 = 20^2$.

$$\begin{cases} x(t) = 25 + 20 \cos(t) \\ y(t) = 15 + 20 \sin(t) \end{cases}$$

- c $y = 0$ geeft $(x - 25)^2 + 225 = 400$ en dus $x = 25 \pm \sqrt{175}$.

De gevraagde afstand is $2\sqrt{175}$.

- d De lijn MP heeft een r.c. van $a = \frac{10-15}{35-25} = -0,5$ en dus vergelijking $y = -0,5x + 27,5$.

Deze lijn snijden met de cirkel geeft $(x - 25)^2 + (-0,5x + 12,5)^2 = 400$.

Haakjes wegwerken en de abc-formule geeft $x \approx 7,11 \vee x \approx 42,89$.

Het dichtstbijzijnde snijpunt is $Q(42,89; 6,06)$ en de afstand van P tot de cirkel is

$$|PQ| = \sqrt{(42,89 - 35)^2 + (6,06 - 10)^2} \approx 8,8.$$

- 7** Het middelpunt van de cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van $\triangle ABC$.

Het midden van lijn AB is $(3,4)$. De richtingsvector van AB is $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus van de loodlijn op AB is de richtingsvector $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De middelloodlijn op AB wordt gegeven door $\begin{cases} x(t) = 3 - t \\ y(t) = 4 + t \end{cases}$.

De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{1}{3}$ en de middelloodlijn op AC heeft richtingscoëfficiënt: $a \cdot \frac{1}{3} = -1$, dus $a = -3$. De middelloodlijn gaat door het punt $(4,3)$. Dus de middelloodlijn op AC wordt gegeven door: $y = -3x + 15$.

Het snijpunt van de middelloodlijnen vind je door op te lossen: $4 + t = -3 \cdot (3 - t) + 15$. Dit geeft $t = -1$.

Het middelpunt van de cirkel is $(4,3)$ en de straal is $r = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$.

Vergelijking cirkel: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 10$.

- 8** De vergelijking van de cirkel is: $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 3^2$.

De parametervoorstelling van de raaklijnen is: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = ct \end{cases}$.

Dit substitueren in de cirkel geeft $(t-4)^2 + (ct-6)^2 = 9$ en $(1+c^2)t^2 - (8+12c)t + 43 = 0$.

Deze kwadratische vergelijking heeft één oplossing als de discriminant gelijk is aan nul.

$D = (-8-12c)^2 - 4 \cdot (1+c^2) \cdot 43 = 0$ geeft $c = 0,618$ v $c = 6,596$.

Dus $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0,618t \end{cases}$ en $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 6,596t \end{cases}$.

Je kunt ook de raaklijnen $y = ax$ noemen, dit invullen in de vergelijking en $D = 0$ gebruiken om a te berekenen. Je moet dan nog wel achteraf de vergelijkingen omwerken naar parametervoorstellingen.

- 9** De snijpunten bepaal je door $l: y = 3x + 7$ te substitueren in de cirkelvergelijking.

Dit geeft snijpunten $P(-6, -11)$ en $Q(0,7)$.

$c: (x+6)^2 + (y+1)^2 = 10^2$, dus het middelpunt is $M(-6, -1)$ en de straal is 10.

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ en de richtingsvector van de raaklijn aan de cirkel door P is $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De richtingsvector van lijn l is $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Inproduct: $10 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = |10| \cdot \left| \sqrt{1^2 + 3^2} \right| \cdot \cos(\varphi)$ en $10 = 10 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\varphi)$, zodat $\varphi = 72^\circ$.

- 10** De lijn k door M en loodrecht op l snijden met de cirkel geeft de raakpunten.

$l: y = x + b$ geeft $k: y = -x + b$ door $M(2,5)$ invullen geeft $b = 7$.

$k: y = -x + 7$ en $c: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 4^2$ met elkaar snijden:

Substitueer $y = -x + 7$ in de vergelijking van de cirkel.

$(x-2)^2 + ((-x+7)-5)^2 = 4^2$ geeft $x = \frac{8-\sqrt{128}}{4} = 2 - 2\sqrt{2}$ v $x = \frac{8+\sqrt{128}}{4} = 2 + 2\sqrt{2}$.

Vul de gevonden x -waarden in de formule van k in.

De raakpunten zijn: $(2 - 2\sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2})$ en $(2 + 2\sqrt{2}, 5 - 2\sqrt{2})$.

- 11 a** Snijpunten met de x -as, dus $y(t) = 0$ dus $2 \sin(t) = 0$. Hieruit volgt $t = k \cdot \pi$.

$x(0) = 5 \sin(0 + 1) \approx 4,21$ en $x(\pi) = 5 \sin(\pi + 1) \approx -4,21$.

Dus de snijpunten zijn $(0; 4,21)$ en $(0; -4,21)$.

- b** In die punten is de raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 2 \cos(t) = 0$.

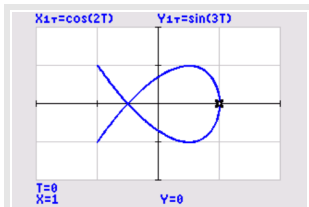
Hieruit volgt $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

$$x\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi + 1\right) \approx 2,70 \text{ en } y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2.$$

$$x\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 5 \sin\left(1\frac{1}{2}\pi + 1\right) \approx -2,70 \text{ en } y\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -2.$$

Dus deze punten zijn $(2,70; 2)$ en $(-2,70; -2)$.

- 12 a** Zie de figuur.



Snijpunten met de x-as, dus $y(t) = 0$ dus $\sin(3t) = 0$. Hieruit volgt $t = \frac{1}{3}k \cdot \pi$.

$$x(0) = \cos(0) = 1, \quad x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} \text{ en } x\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}.$$

Dus de snijpunten zijn $(1,0)$ en $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- b** De snelheidsvector is $\begin{cases} x'(t) = -2 \sin(2t) \\ y'(t) = 3 \cos(3t) \end{cases}$

De baansnelheid is $v = \sqrt{4 \sin^2(2t) + 9 \cos^2(3t)}$.

GR: $y = \sqrt{4 \sin^2(2x) + 9 \cos^2(3x)}$ met venster $[0, 2\pi] \times [0, 4]$ geeft een minima van 0 bij $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$.

Dus deze punten zijn $(-1, -1)$ en $(-1, 1)$.

- 13** $x(t) = \frac{1}{2}$ geeft $2 \cos(t)(1 - \cos(t)) = \frac{1}{2}$ en $2 \cos^2(t) - 2 \cos(t) + \frac{1}{2} = 0$.

Hieruit volgt $\cos(t) = \frac{1}{2}$ en $t_A = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t_B = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

Tussen t_A en t_B zit: $t_B - t_A = 1\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$.

Tussen t_B en t_A zit: $t_A - t_B = 2\frac{1}{3}\pi - 1\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$.

$2 \cdot \frac{2}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$, dus de benodigde tijd om van punt A naar punt B te bewegen is tweemaal zo groot als de benodigde tijd om van punt B naar punt A te bewegen.

- 14 a** Bepaal de waarde van t die hoort bij dit punt.

$2 \cos(2t) = -2$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

$\sin(3t) + 1 = 2$ geeft $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$.

Het eerste tijdstip dat aan beide voorwaarden voldoet is $1\frac{1}{2}\pi$.

Snelheidsvector: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \sin(2t) \\ 3 \cos(3t) \end{pmatrix}$.

Baansnelheid dus $v = \sqrt{(-4 \sin(2 \cdot 1\frac{1}{2}\pi))^2 + (3 \cos(3 \cdot 1\frac{1}{2}\pi))^2} = 0$.

b $2 \cos(2t) = 1$ geeft $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$.

$\sin(3t) + 1 = 2$ geeft $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$.

Punt P gaat op $t = \frac{1}{6}\pi$ en $t = \frac{5}{6}\pi$ door $D(1,2)$.

$$\left| \vec{v}\left(\frac{1}{6}\pi\right) \right| = \sqrt{\left(-4 \sin\left(2 \cdot \frac{1}{6}\pi\right)\right)^2 + \left(3 \cos\left(3 \cdot \frac{1}{6}\pi\right)\right)^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\left| \vec{v}\left(\frac{5}{6}\pi\right) \right| = \sqrt{\left(-4 \sin\left(2 \cdot \frac{5}{6}\pi\right)\right)^2 + \left(3 \cos\left(3 \cdot \frac{5}{6}\pi\right)\right)^2} = 2\sqrt{3}.$$

De snelheid is dus beide keren gelijk.

15 De richtingsvector van de lijn is $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De richtingsvector van de raaklijn aan de kromme vind je door eerst de bijbehorende waarde van t te vinden:

$\cos(2t) = 0$ geeft $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

$\cos(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

Een oplossing is dus $t = \frac{1}{4}\pi$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \text{ dus voor } t = \frac{1}{4}\pi: \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Inproduct: $-2 \cdot 3 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 4 = \sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \cos(\varphi)$.

Dus $-8,828 = \sqrt{112,5} \cdot \cos(\varphi)$ en $\varphi \approx 146,3^\circ$.

De hoek tussen beide krommen in het dit snijpunt is dus $180^\circ - 146,3^\circ \approx 34^\circ$.

16 a De coördinaten van punt C zijn: $\left(21 + \frac{1}{3} \cdot 21; \frac{2}{3} \cdot 21\sqrt{3}\right) = (28, 14\sqrt{3})$.

De coördinaten van punt D zijn: $\left(\frac{1}{3} \cdot 21; \frac{1}{3} \cdot 21\sqrt{3}\right) = (7, 7\sqrt{3})$.

De vergelijking van de lijn door O en C : $y = a \cdot x$ en punt C invullen geeft $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x$ en $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ geeft

$\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}(-5t + 42)$ en $t = 6$.

Vul dit in in $x(t)$ en dan vind je de x -coördinaat van E : $x = -5 \cdot 6 + 42 = 12$.

b De richtingsvector van BE is $\begin{pmatrix} 21 - 12 \\ 21\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

De richtingsvector van AE is $\begin{pmatrix} 12 - 42 \\ 6\sqrt{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 6\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Inproduct: $3 \cdot -5 + 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = -15 + 15 = 0$, dus $\angle AEB = 90^\circ$.

- 17 a** Noem de coördinaten van $P(0,p)$, dan $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ p-3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -6 \\ p-7 \end{pmatrix}$.

$$2 \cdot -6 + (p-3)(p-7) = 0, \text{ geeft } (p-9)(p-1) = 0.$$

Er geldt $p = 9 \vee p = 1$ dus de coördinaten zijn $P(0,9)$ en $Q(0,1)$.

- b** De vergelijking van de lijn door A en B : $y = \frac{1}{2}x + 4$.

$$\text{Invullen in de cirkelvergelijking geeft: } (x+3)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = r^2.$$

$$\text{Hieruit volgt: } x = -4 + \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25} \vee x = -4 - \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}.$$

De coördinaten van R en S zijn dus

$$R\left(-4 - \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}, 2 - \frac{1}{5}\sqrt{5r^2 - 25}\right) \text{ en } S\left(-4 + \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}, 2 + \frac{1}{5}\sqrt{5r^2 - 25}\right).$$

$$\text{De lengte van lijnstuk } RS \text{ is } \left(\frac{4}{5}\sqrt{5r^2 - 25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}\right)^2 = (6\sqrt{5})^2.$$

$$\text{Hieruit volgt: } 4r^2 - 20 = 180, \text{ dus } r = 5\sqrt{2}.$$

- 18 a** De coördinaten van $P(p, \frac{1}{8}p^2 + 2)$.

$$\text{Gebruik de stelling van Pythagoras (of de cirkelvergelijking): } FP = \sqrt{p^2 + \left(\frac{1}{8}p^2 + 2 - 4\right)^2}.$$

$$\text{Dit is gelijk aan: } \sqrt{\frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + 4} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2} = \frac{1}{8}p^2 + 2.$$

- b** De y -waarde van het midden van PP' is de helft van de y -waarde van de parabool: $m : y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

$$\text{De cirkelvergelijking is: } c : x^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2.$$

Het raakpunt van de lijn en de cirkel in het punt met $x = 0$:

$$0^2 + \left(\frac{1}{16}p^2 + 1 - 4\right)^2 = \left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2 \text{ geeft } \frac{1}{16}p^2 - 3 = \frac{1}{8}p^2 + 2 \vee \frac{1}{16}p^2 - 3 = -\left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right).$$

$$\text{De eerste vergelijking heeft geen oplossingen. De tweede vergelijking geeft: } p = \sqrt{\frac{16}{3}} = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

- 19 a** Bereken de hoek tussen de richtingsvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Het inproduct geeft: } 1 \cdot 1 + -2 \cdot -3 = \sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2} \cdot \cos(\varphi).$$

$$\text{Dus } \cos(\varphi) = \frac{7}{\sqrt{50}} \text{ en } \varphi \approx 8^\circ.$$

- b** De vergelijking van lijn m is: $y = -2x + 2$.

$$\text{Substitueren in de cirkelvergelijking: } x^2 + (-2x + 2 - 1)^2 = 1 \text{ geeft } x = 0 \vee x = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Voor punt } B \text{ geldt dus } x = \frac{4}{5}. \text{ Dit geeft } y = -2 \cdot \frac{4}{5} + 2 = \frac{2}{5}.$$

- c** Stel eerst de vergelijking op van een cirkel door drie punten. In dit geval A , B en D .

$$\text{Voor } x\text{-coördinaat van het middelpunt } M \text{ geldt: } x_M = \frac{5}{6}.$$

$$\text{De cirkelvergelijking is } \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

$$A \text{ invullen: } \left(1 - \frac{5}{6}\right)^2 + (0 - y_M)^2 = r^2.$$

$$B \text{ invullen: } \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y_M\right)^2 = r^2.$$

$$\text{Dus } \left(\frac{1}{6}\right)^2 + (-y_M)^2 = \left(-\frac{1}{30}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y_M\right)^2 \text{ en } y_M = \frac{1}{6}, \text{ zodat } r^2 = \frac{1}{18}.$$

Ligt C ook op deze cirkel?

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{50}{900} = \frac{1}{18}. \text{ Dus } C \text{ ligt ook op deze cirkel.}$$

$$\text{De vier punten liggen dus op cirkel: } \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

20 a De afstand van P tot de oorsprong is $\sqrt{\left(\frac{1}{2} \sin(t)\right)^2 + \left(\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right)\right)^2}.$

$$\text{GR: } y_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sin(t)\right)^2 + \left(\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right)\right)^2} \text{ geeft maximum } y = 1,04.$$

De maximale lengte is dus 1,04.

b De snelheidsvector is $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(t) \\ \cos\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix}, \text{ dus } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

$$\text{De snelheid op } t = 0 \text{ is } \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

c $\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin(t)$ geeft $t + \frac{1}{3}\pi = t + k \cdot 2\pi$ en $t + \frac{1}{3}\pi = \pi - t + k \cdot 2\pi.$

$$\text{Dus } t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ en de gezochte waarden voor } t \text{ zijn dus } \frac{1}{3}\pi \text{ en } 1\frac{1}{3}\pi.$$

$$\text{Invullen geeft: } \left(\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \text{ en } \left(-\frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

21 a De snelheidsvector is $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin t + 2 \sin(2t) \\ 2 \cos t - 2 \cos(2t) \end{pmatrix}.$

De snelheid is:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{(-2 \sin t + 2 \sin(2t))^2 + (2 \cos t - 2 \cos(2t))^2} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 t - 8 \sin t \sin(2t) + 4 \sin^2(2t) + 4 \cos^2 t - 8 \cos t \cos(2t) + 4 \cos^2(2t)} \\ &= \sqrt{8 - 8(\sin(t) \sin(2t) + \cos(t) \cos(2t))} \\ &= \sqrt{8 - 8 \cos(2t - t)} = \sqrt{8 - 8 \cos(t)} \end{aligned}$$

De snelheid is maximaal als $\cos(t)$ minimaal is, dus gelijk is aan -1.

$$\text{Maximale snelheid is: } \sqrt{8 - 8 \cdot -1} = \sqrt{16} = 4.$$

b Als $x = 1$, dan is $2 \cos(t) - \cos(2t) = 1$, dus $2 \cos(t) - 2 \cos^2(t) + 1 = 1.$

$$\text{Dit geeft } 2 \cos(t)(1 - \cos(t)) = 0 \text{ en } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee t = k \cdot 2\pi.$$

$$\text{Voor de snijpunten geldt: } t = \frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 1\frac{1}{2}\pi.$$

$$y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(2 \cdot \frac{1}{2}\pi\right) = 2 \text{ en } y\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(2 \cdot 1\frac{1}{2}\pi\right) = -2.$$

Dus $a = 2.$

22 De baan snijdt de y -as, dus $x = \sin(2t) + \sin(t) = 0$.

Dit kun je schrijven als $2 \sin(t) \cos(t) + \sin(t) = 0$, dus $\sin(t) = 0 \vee 2 \cos(t) + 1 = 0$.

Hieruit volgt: $t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

Tussen 0 en π is er één waarde, namelijk $t = \frac{2}{3}\pi$.

De snelheidsvector is $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) + \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$.

Dit geeft $\begin{pmatrix} x'(\frac{2}{3}\pi) \\ y'(\frac{2}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(1\frac{1}{3}\pi) + \cos(\frac{2}{3}\pi) \\ -\sin(\frac{2}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

De snelheid is $\sqrt{\left(-1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$.

7 Naar het examen

1 $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g'(x) = \frac{x}{e}$.

$\frac{1}{x} = \frac{x}{e}$ geeft $x^2 = e$ en dus $x = \pm\sqrt{e}$.

$x = \sqrt{e}$ geeft < not enough right fences : 1 > en $g(\sqrt{e}) = \frac{e^2}{2e} = \frac{1}{2}$.

$x = -\sqrt{e}$ voldoet niet.

Beide grafieken raken elkaar in $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$.

2 $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{PQ}$ (of $\overrightarrow{OP'}$) $= \begin{pmatrix} -(\frac{1}{2}p + 3) \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ \frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$

Uit $x = \frac{1}{2}p - 3$ en $y = \frac{1}{2}p + 3$ volgt $p = 2y - 6$ en $x = \frac{1}{2}(2y - 6) - 3$, dus $m : y = \frac{1}{3}x + 4$.

3 a Gebruik de cosinusregel: $(M_1M_3)^2 = (M_1M_2)^2 + (M_2M_3)^2 - 2 \cdot M_1M_2 \cdot M_2M_3 \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$.

$(r+2)^2 = 8^2 + (r+6)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (r+6) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$ geeft: $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{-8r-96}{-16r-96} = \frac{r+12}{2r+12}$.

b $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r+12}{2r+12} = \frac{1}{2}$, dus $\lim_{r \rightarrow \infty} \cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{1}{2}$.

Hieruit volgt dat $\angle M_1M_2M_3$ nadert naar 60° .

c Noem de x-coördinaat van M_3 : a .

De stelling van Pythagoras geeft in driehoek M_1PM_3 : $(r+2)^2 = r^2 + (-2-a)^2$ dus $4r = a^2 + 4a$

en in driehoek M_2PM_3 : $(r+6)^2 = r^2 + (6-a)^2$ dus $12r = a^2 - 12a$.

Uit deze vergelijkingen volgt $3(a^2 + 4a) = a^2 - 12a$ en $a = 0 \vee a = -12$.

$a = 0$ voldoet niet en $a = -12$ geeft $4r = (-12)^2 + 4 \cdot -12 = 96$, dus $r = 24$.

4 a $x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t)$ en $y'(t) = -2\sin(t)$.

Voor de snelheid v op tijdstip t geldt: $v = \sqrt{(-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 + (-2\sin(t))^2}$.

Met de GR bepaal je de maximale snelheid van 3,6 m/s. (Schrijf op hoe je de GR gebruikt!)

b $2\cos(t) = \cos(t) + \sin(2t)$ geeft $2\cos(t) = \cos(t) + 2\sin(t)\cos(t)$.

Dus $\cos(t) - 2\sin(t)\cos(t) = \cos(t)(1 - 2\sin(t)) = 0$ en $\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = \frac{1}{2}$.

Dit geeft $t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$ ($\cos(t) = 0$ voldoet niet want geeft punt O).

De beweging duurt $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ s.

c De helling van lijnstuk PQ op tijdstip t is gelijk aan

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t+\pi) - 2\cos(t)}{\cos(t+\pi) + \sin(2(t+\pi)) - (\cos(t) + \sin(2t))}$

$\sin(2(t+\pi)) = \sin(2t + 2\pi) = \sin(2t)$ geeft:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(\cos(t+\pi) - \cos(t))}{\cos(t+\pi) - \cos(t)} = 2$ en dus onafhankelijk van t .

5 a $\frac{5}{4x-6} = x - 3\frac{1}{2}$ geeft $5 = (x - 3\frac{1}{2})(4x - 6)$.

Hieruit volgt $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) = 0$, zodat $x = 1 \vee x = 4$.

Punt B heeft coördinaten $(4, \frac{1}{2})$.

b Linkerdeel:

$$I_L = \pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 25 \cdot (4x-6)^{-2} dx = \pi \cdot \left[25 \cdot -1(4x-6)^{-1} \cdot \frac{1}{4}\right]_0^1 = \left[\frac{-25\pi}{4(4x-6)}\right]_0^1 = 2\frac{1}{12}\pi.$$

$$\text{Rechterdeel } I_R = \pi \cdot \int_0^{3\frac{1}{2}} \left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^{3\frac{1}{2}} = 5\frac{5}{24}\pi.$$

$$\text{De totale inhoud is } 2\frac{1}{12}\pi + 5\frac{5}{24}\pi = 7\frac{7}{24}\pi.$$

c $g(x) = \frac{5}{4x-6} + a$ met verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$.

De horizontale asymptoot van g is $y = a$.

De verticale asymptoot van g^{inv} is $x = a$ (spiegeling in $y = x$).

$$\text{De afstand tussen beide verticale asymptoten is } \left|a - 1\frac{1}{2}\right| = 4, \text{ dus } a = -2\frac{1}{2} \vee a = 4\frac{1}{2}.$$

6 a $T'_{\text{nat}}(t) = 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} \cdot \left(\frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t}\right)$

$$T'_{\text{nat}}(t) = 0 \text{ geeft } \frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t} = 0 \text{ en } 2\ln(t) = 6.$$

$$\text{Dus } \ln(t) = 3 \text{ en } t = e^3.$$

$$\text{De maximale temperatuur is } 20 + 1050 \cdot e^{-3^2+6\cdot 3-9} = 20 + 1050 \cdot e^0 = 1070 \text{ }^\circ\text{C}.$$

b $20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300$ geeft $\log(8t + 1) = \frac{280}{345}$, zodat $t = \frac{10^{\frac{280}{345}} - 1}{8} \approx 0,685$.

Dus ongeveer 0,685 minuten.

c De oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3 is

$$\int_{0,69}^{30} (20 + 345 \cdot \log(8t + 1) - 300) dt \approx 11929.$$

$$T_{\text{nat}}(t) = 30 \text{ geeft met de GR: } t \approx 6,36. \text{ (Beschrijf hoe je dit doet.)}$$

De oppervlakte bij natuurlijke brand is is

$$\int_{6,36}^{30} (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} - 300) dt \approx 14242.$$

$14242 > 11929$, dus de deur houdt tijdens de natuurlijke brand niet minstens 30 minuten stand

7 $(x^2 + 1)(x - 2) = 0$ geeft alleen $x = 2$.

Deze x -waarde moet de perforatie opleveren en dus ook voldoen aan $px^2 + 4px + 6 = 0$.

$$\text{Dus } p2^2 + 4p \cdot 2 + 6 = 0 \text{ en dit geeft } p = -0,5.$$

$$\text{Dan is } f_2(x) = \frac{-0,5x^2 - 2x + 6}{(x^2 + 1)(x - 2)} = \frac{-0,5(x-2)(x+6)}{(x^2 + 1)(x-2)} = \frac{-0,5(x+6)}{x^2 + 1}.$$

$$\text{En } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-0,5(x+6)}{x^2 + 1} = -0,8, \text{ dus de perforatie is } (2; -0,8).$$

a

abc-formule 16
absolute waarde, modules 8
afgeleide 38
afstand tussen een punt en een lijn 68
afstand tussen twee cirkels 56
afstand van een lijn tot een cirkel 56
afstand van een punt tot een cirkel 56
afstand van een punt tot een lijn 54
afstand van twee evenwijdige lijnen 54
algebraïsch oplossen 16
amplitude 8
asymptoten 4, 10

b

balansmethode 16
beginwaarde 30
bepaalde integraal 42
bereik 4
bewegingsvergelijkingen 72
bijzondere driehoeken 52
bissectrice 54
buigpunt 38

c

cartesisch assenstelsel 54
cirkel 56
component van een vector 58
congruentie 52
cosinusregel 52

d

differentiaalquotiënt 38
differentiequotiënt 38
differentiëren 38
domein 4

e

eliminatie 16
evenwichtsstand 8
evenwijdige lijnen 54
exact oplossen 16
exponentiële functie 6
extremen 4

f

formules van simpson 20
families van functies 10
functie, karakteristieken van 4

g

gebroken functie 4
gelijkvormig 52

gelijkvormige figuren 52
goniometrische functies 8
groeifactor 30

h

halveringstijd 18
harmonische trilling 32
harmonische trillingen 72
hellingsgetal 28
hoek tussen een lijn en een cirkel 56, 70
hoek tussen twee cirkels 56, 70
hoek tussen twee lijnen 68
hoek tussen twee vectoren 58
(hogere machts) wortelfunctie 4
hogere machtsfunctie 4
hoofdstelling integraalrekening 42
hoogtelijn 54
horizontale asymptoot 10

i

inklemmen 16
inproduct 58
integraal 42
integrand 42
inverse 6
inverse functie 28

k

kentallen 58
kettingregel 38
kettingregel voor primitiveren 42
kwadraat afsplitsen 16, 56
kwadratische functie 4, 28

l

lijnsymmetrisch 10
limieten 4
lineaire functie 4, 28
logaritmische functie 6
loodlijn opstellen 68
loodrecht snijden in een punt 40
loodrechte lijnen 54

m

machtsfunctie 4, 28
middelloodlijn 54
middelpunt 56
missen lijn en cirkel 56
modelleren 32
modulusfunctie 8

n

natuurlijke logaritme 6

normaalvector **68**
nulpunten **4**

o

omgekeerd evenredig **4**
omwentelingslichaam **44**
ongelijkheid oplossen **16**
ontbinden in factoren **16**
oppervlakte **44**
optellen en aftrekken van vectoren **58**

p

pythagoras, stelling van **52**
parameterkromme **72**
parametervoorstelling **68, 70**
perforatie **10**
periode **8**
periodieke functies **8**
primitieve **42**
procentuele afname **30**
procentuele toename **30**
productregel **38**
puntsymmetrisch **10**

q

quotiëntregel **38**

r

raaklijn **38**
raaklijn aan een cirkel **70**
raaklijn cirkel **56**
raakpunt **40**
raken in een punt **40**
raken lijn en cirkel **56**
recht evenredig **4**
rekenregels logaritmen **18**
rekenregels machten **18**
richtingsvector **68**

s

somformules **20**
symmetrieformules **20**
scalair vermenigvuldigen **58**
scheve asymptoot **10**
sinusoïde **32**

sinusoïden **8**
sinusregel **52**
sinus, cosinus, tangens in driehoeken **52**
snelheidsvector **72**
snijden lijn en cirkel **56**
snijdende lijnen **54**
snijpunt berekenen **68**
snijpunten van een rechte lijn met een cirkel **70**
snijpunten van twee cirkels **70**
som van de hoeken van een driehoek, hoeken-
som **52**
somregel **38**
somregel voor primitiveren **42**
stelsel **16**
steunvector **68**
straal **56**
substitutie **16**
symmetrie **10**

t

tekenoverzicht **38**
terugrekenen **16**
transformaties **4**

u

uiterste waarden **38**

v

verbanden tussen sin en cos **20**
verdubbelingsformules **20**
vectoriële snelheid **72**
vectoriële versnelling **72**
vectorvoorstelling **68**
verdubbelingstijd **18**
vergelijking oplossen **16**
vergelijking van een lijn **54**
vergelijking van een raaklijn **40**
versnellingsvector **72**
verticale asymptoot **10**

z

zwaartelij **54**
zwaartepunt **58**

Deze examentraining bereidt je voor op het VWO Wiskunde B examen. De complete examenstof is daarvoor opgedeeld in overzichtelijke onderwerpen. Ieder onderwerp begint met een verkenningsopgave. Die opgave laat zien waar je het onderwerp in de praktijk kunt tegenkomen.

Een onderwerp bevat meerdere theorieblokken. Naast ieder theorieblok staan oefenopgaven om de theorie weer even op te halen. Een onderwerp wordt afgesloten met verwerkingsopgaven die gebaseerd zijn op vraagstukken uit de officiële wiskundeexamens.

Probeer bij het maken van opgaven niet te snel naar de antwoorden achter in deze reader te kijken.

Deze examentraining wordt afgesloten met een echt examen. Als je dat examen gaat maken, probeer dan de examenomstandigheden een beetje na te bootsen. Dit is natuurlijk maar één examen. Er zijn veel meer oude examens. Die vindt je op de [Math4All website](http://www.math4all.nl).

Veel succes gewenst namens Math4All.



