

Wiskunde C 456 VWO

EXAMENTRAINING





© 2021

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaarden ze geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Examentraining

1	Standaardfuncties	3
2	Vergelijkingen en ongelijkheden	15
3	Formules opstellen	29
4	Discrete wiskunde	41
5	Logica en meetkunde	51
6	Naar het examen	65

Antwoorden	75
------------	----

Register	100
----------	-----

1 Standaardfuncties

Inleiding



Figuur 1

In de Rotterdamse haven bevinden zich grote chemische bedrijven. Bij deze bedrijven wordt gebruikgemaakt van gevaarlijke chemische stoffen, zoals chlooraceton en hexaan. Deze stoffen worden gebruikt om producten zoals verf, medicijnen en schoonmaakmiddelen te maken. Om de veiligheid te waarborgen, moeten deze stoffen zorgvuldig worden opgeslagen. Daarom wordt er gebruikgemaakt van tanks in de vorm van bollen. Door de bolvorm is de tank veiliger, omdat drukkrachten in een bol beter kunnen worden opgevangen dan in andere vormen. In de Rotterdamse haven kun je er dus van uitgaan dat hoe ronder de opslagtank is, hoe hoger de druk van de opgeslagen stof zal zijn.

Verkennen

Opgave V1

Een bedrijf wil een opslagtank maken voor gevaarlijke stoffen. Er moet $1,3 \text{ Mm}^3$ gas kunnen worden opgeslagen in honderd bolvormige opslagtanks. Voor de inhoud van een bol geldt: $I = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Hierin is r de straal en I de inhoud van de bol voorstelt.

Bereken de straal van zo'n gastank als ze allemaal even groot zijn. Rond af op twee decimalen.

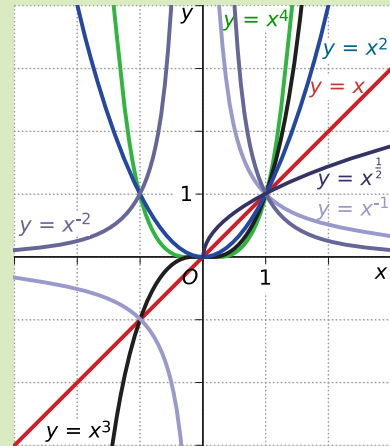
Theorie

Om te onthouden

Standaardfuncties

Er bestaan verschillende soorten **standaardfuncties**:

- Functies van de vorm $y = a \cdot x + b$ heten **lineaire functies**. De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt a en snijpunt met de y -as $(0, b)$.
- Functies van de vorm $y = a(x - b)^2 + c$ heten **kwadratische functies**. De grafiek is een parabool met top (b, c) . Als $a > 0$ dan heb je een dalparabool, als $a < 0$ een bergparabool. Soms moet je door kwadraat afsplitsen een voorschrift van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ in de juiste vorm brengen.
- Functies van de vorm $y = a \cdot x^r$ heten **machtsfuncties**. Je zegt dan dat y **recht evenredig** is met x^r .
Functies van de vorm $y = a \cdot x^n$ met n geheel en $n > 2$ hebben, als n even is, een grafiek een top $(0, 0)$ en als n oneven is een symmetriepunt $(0, 0)$.
- Functies van de vorm $y = \frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$ met n geheel en $n \geq 1$ heten **gebroken functies**. Je zegt dan dat y **omgekeerd evenredig** is met x^n . De functiewaarde bij $x = 0$ bestaat niet; $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek. Voor x -waarden ver van 0 worden de functiewaarden ongeveer 0 en nadert de grafiek de horizontale as.
- Functies van de vorm $y = a \cdot \sqrt[n]{x} = a \cdot x^{\frac{1}{n}}$ met n geheel heten **(hogere machts) wortelfuncties**. Is n even dan heeft de grafiek een beginpunt of eindpunt (b, c) , is n oneven dan is $(0, 0)$ het symmetriepunt.



Figuur 2

Nieuwe functievoorschriften kunnen ontstaan door twee functies door middel van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen met elkaar te combineren.

Karakteristieken

De **karakteristieken van een functie** zijn:

- de toegestane x -waarden vormen het **domein** van functie f ;
- de mogelijke y -waarden vormen het **bereik** van functie f ;
- de **snijpunten met de x -as** van een functie zijn de punten waarvoor geldt: $f(x) = 0$;
- het **snijpunt met de y -as** van een functie is het punt waarvoor geldt: $x = 0$;
- de **extremen** van een functie zijn de y -waarden die de functie maximaal of minimaal heeft binnen een bepaald gebied;
- een functie vertoont soms **asymptotisch gedrag**; er zijn dan lijnen die de grafiek steeds dichter benadert. Vooral bij gebroken functies komt dit voor.

Opgave 1

Gegeven zijn de verbanden $y_1 = 2x^2 - 4x - 6$ en $y_2 = -2x - 2$.

- Bepaal van het lineaire verband de snijpunten met de assen.
- Schrijf het kwadratische verband in de vorm: $y = a(x - p)^2 + q$.
- Van het kwadratische verband is de grafiek een parabool. Bepaal de top van die parabool en leg uit of het een dalparabool of een bergparabool is.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de parabool met beide assen.

Opgave 2

Gegeven zijn de machtsfuncties $f(x) = 10 \cdot x^3$ en $g(x) = 2 \cdot x^4$.

- Bereken de coördinaten van de snijpunt(en) van de grafieken van f en g .
- Welk van beide functies heeft een top? Bepaal de coördinaten ervan.
- Bepaal het bereik van beide functies.

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

- Bepaal het domein van beide functies en plot hun grafieken.
- Laat zien, dat beide functies machtsfuncties zijn.
- Welke van beide functies is recht evenredig en welke omgekeerd evenredig met $\sqrt{x}$?
- Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
- Wat zijn de coördinaten van de beginpunten van de grafieken van f en g ?

Opgave 4

Gegeven zijn de gebroken functies $f(x) = \frac{12}{x}$ en $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

- Leg uit, hoe de grafieken van f en g er uitzien in de buurt van $x = 0$.
- Wat gebeurt er met de grafieken van f en g als je hele grote x -waarden invult? En als je heel erg negatieve x -waarden invult?
- Functie h ontstaat door beide functies op te tellen: $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel een formule op voor h en herleid deze tot hij uit één breuk bestaat.
- Functie k ontstaat door beide functies op elkaar te delen: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Laat zien dat k recht evenredig is met x als $x \neq 0$.

Opgave 5

Van een bol met straal r is het volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ en de oppervlakte $A = 4\pi r^2$.

- Laat zien, dat er een waarde van r is waarvoor volume en oppervlakte dezelfde waarde hebben.
- Laat zien, dat de oppervlakte recht evenredig is met een macht van het volume, dus dat beide formules te combineren zijn tot één formule van de vorm $A = c \cdot V^p$. Bereken de exacte waarden van c en p .

Theorie

Om te onthouden

Standaardfuncties: exponentiële - en logaritmische functies

Exponentiële functies en logaritmische functies zijn elkaars inverse functies. De grafieken van **exponentiële verbanden** en **logaritmische verbanden** met hetzelfde grondtal hebben dezelfde vorm, maar zijn gespiegeld in de lijn $y = x$. Bekijk de figuur waarin de groeifactor, het grondtal $g = 2$.

Er geldt $y = g^x$ betekent $x = {}^g\log(y)$ en omgekeerd.

De karakteristieken van de functies zijn vergelijkbaar, maar eveneens gespiegeld. Zo heeft een exponentiële functie een horizontale asymptoot, maar een logaritmische functie een verticale asymptoot. Bij een exponentiële functie is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $y > 0$. Bij een logaritmische functie is het domein $x > 0$ en het bereik $\mathbb{R}$. Beide functies hebben geen extreme waarden.

Een exponentieel verband $y = c \cdot g^x$ heeft de x -as als horizontale asymptoot en is toenemend stijgend als $g > 1$, maar afnemend dalend als $0 < g < 1$.

Bekijk de tabel met exponentiële - en logaritmische functies met hetzelfde grondtal.

exponentiële functie	logaritmische functie
$y = g^x$ met $g > 0$	$y = {}^g\log(x)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$
$y = 10^x$	$y = {}^{10}\log(x) = \log(x)$

Tabel 1

Het verband tussen de groeifactor g en het groeipcentage p is $g = 1 + \frac{p}{100}$ en $p = (g - 1) \cdot 100$.

De **verdubbelingstijd** bij exponentiële groei is de tijd die nodig is om de functiewaarde te verdubbelen.

De **halveringstijd** bij exponentieel verval is de tijd die nodig is om de functiewaarde te halveren.

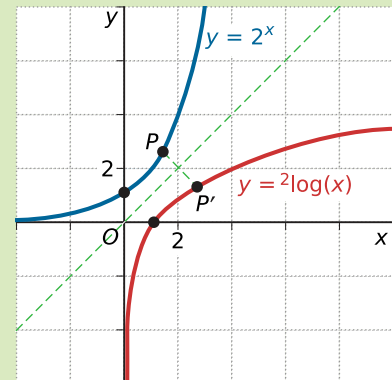
Logaritmische schaalverdeling

Bij een **logaritmische schaalverdeling** plaats je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen plaatsen. Met behulp van de logaritme kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

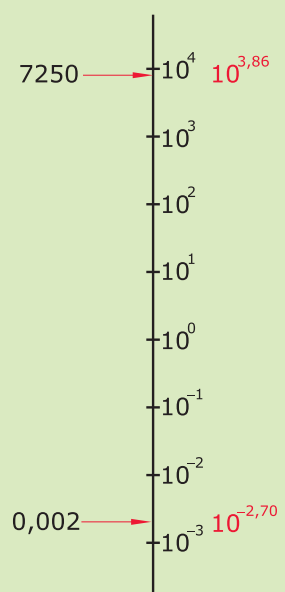
- Omdat $\log(7250) \approx 3,86$ plaats je 7250 op 3,86 eenheden boven 10^0 , dat is tussen 10^3 en 10^4 .
- Omdat $\log(0,002) \approx -2,70$ plaats je 0,002 op 2,70 eenheden onder 10^0 , dat is tussen 10^{-1} en 10^{-2} .

De grafiek van een exponentieel verband op **enkellogaritmisch papier** is een rechte lijn, want $y = b \cdot a^x$ is te schrijven als: $\log(y) = \log(a) \cdot x + \log(b)$.

De grafiek van een machtsverband op **dubbellogaritmisch papier** is een rechte lijn, want $y = c \cdot x^r$ is te schrijven als: $\log(y) = r \cdot \log(x) + \log(c)$.



Figuur 3



Figuur 4

Opgave 6

Een hoeveelheid H groeit exponentieel met 0,3% per jaar. In 2000 bedroeg deze hoeveelheid 5200.

- Schrijf een bijpassende groeiformule op.
- Als je aanneemt dat de groei van H altijd zo heeft plaatsgevonden, welke waarde benadert H als je steeds verder naar het verleden kijkt?
- Bepaal de verdubbelingstijd van H .

Opgave 7

Een hoeveelheid $H(t)$ neemt exponentieel af met 1,2% per dag. Op $t = 0$ bedroeg deze hoeveelheid 14000.

- Schrijf een bijpassende groeiformule op.
- Als je aanneemt dat de groei van H altijd zo doorgaat, welke waarde benadert H uiteindelijk?
- Bepaal de halveringstijd van H .

Opgave 8

Gegeven de functies f van de vorm $f(x) = g \log(x)$.

- Door welk punt gaan al deze grafieken? En waarom?
- Welke asymptoot hebben al deze grafieken?
- Voor welke waarden van g is de grafiek van f dalend?

Opgave 9

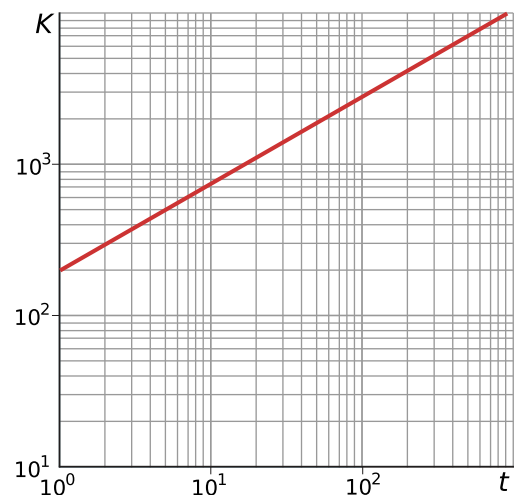
Het verband tussen p en q wordt gegeven door $q = 40 \cdot 10^{0,1p}$.

- Hoeveel bedraagt de groeifactor van dit exponentiële verband? En het groeipercentage?
- Teken de grafiek van q als functie van p op **enkellogaritmisch papier**.

Opgave 10

Je ziet hier een grafiek op dubbellogaritmisch papier.

Laat zien, dat de functie $K = 20 \cdot x^{0,914}$ bij deze figuur past.



Figuur 5

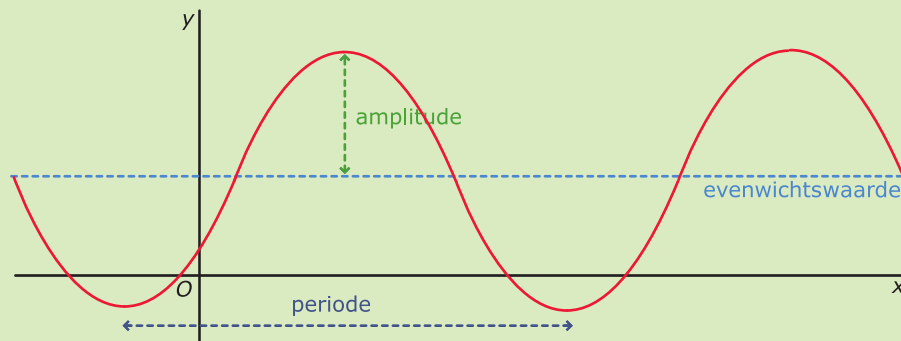
Theorie

Om te onthouden

Periodieke grafieken

Kenmerkend voor een **periodieke grafiek** is:

- de **periode** is de tijd die het duurt totdat de grafiek zich herhaalt;
- de **evenwichtswaarde** of evenwichtsstand is het gemiddelde van de hoogste en de laagste waarde;
- de **amplitude** is de maximale uitwijking uit de evenwichtsstand, dus het verschil tussen de hoogste/laagste waarde en de evenwichtswaarde.



Figuur 6

Formules herleiden

Soms wil je een formule **herleiden** naar een andere vorm. Dat doe je met behulp van:

- de **balansmethode** waarbij de aan beide zijden van het isgelijktken hetzelfde optelt of aftrekt, of met hetzelfde (ongelijk aan 0) vermenigvuldigt, of door hetzelfde (ongelijk aan 0) deelt;
- **terugrekenen** waarbij je een bepaalde standaardfunctie opheft door zijn terugrekenfunctie te gebruiken.

Bij terugrekenen gebruik je:

functie	terugrekenfunctie
$y = x^2$	$x = \pm\sqrt{y}$
$y = \sqrt{x}$	$x = y^2$
$y = x^p$	$x = y^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{y}$
$y = x^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{x}$	$x = y^p$
$y = g^x$ met $g > 0$	$x = {}^g\log(y)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$
$y = {}^g\log(x)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$	$x = g^y$

Tabel 2

Een formule als $K = 2x + 3y + 20$ beschrijft een verband tussen drie variabelen. De formule $y = 2x - 3$ beschrijft een verband tussen twee variabelen.

Om het aantal variabelen en het aantal formules terug te brengen, kun je formules met elkaar combineren. Dit kan als de formules ten minste één variabele gemeenschappelijk hebben. Je kunt dan de één formule **substitueren** in de andere:

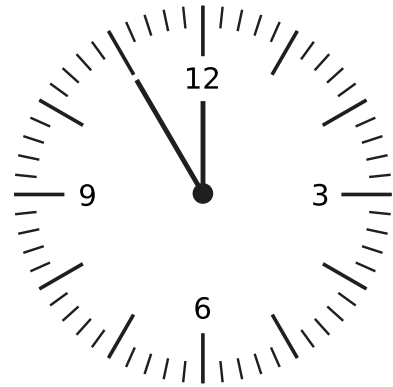
$$K = 2x + 3(2x - 3) + 20 = 2x + 6x - 9 + 20 = 8x + 11.$$

Wil je liever K uitdrukken in y dan moet je $y = 2x - 3$ eerst herleiden tot $x = 0,5y + 1,5$.

Opgave 11

De wijzers van een klok maken een periodieke beweging. Een klok hangt met zijn middelpunt 1,90 meter boven de grond. De grote wijzer is 20 centimeter en de kleine wijzer is 12 centimeter.

- De hoogte tussen het puntje van de grote wijzer ten opzichte van de grond hoort bij een periodiek verband. Geef de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.
- De hoogte tussen het puntje van de kleine wijzer en de grond is een periodiek verband. Geef de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.



Figuur 7

Opgave 12

Een periodieke grafiek heeft een maximum in $(2, 6)$ en het daarop volgende minimum in $(6, -2)$. Bereken de periode, de amplitude en de evenwichtswaarde.

Opgave 13

“Met het reuzenrad op de pier heeft De Pier een unicum in huis: Europa’s eerste reuzenrad boven de zee! Het ruim vijftig meter hoge reuzenrad telt 36 gesloten gondels met airco waaronder één vip-gondel die is voorzien van een glazen bodem. Alle (dichte) gondels beschikken over luxe zitjes en bieden stuk voor stuk ruimte aan maximaal zes personen.”

Het reuzenrad bij de Scheveningse pier heeft een diameter van 40 meter en het laagste punt zit 10 meter boven de zeespiegel. Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van het rad ten opzichte van het zeeniveau. Het rad draait in 10 minuten rond.

Opgave 14

Druk x uit in y .

- $y = 50x - 400$
- $y = 250 \cdot 5^x$
- $y = 30 \cdot x^{1,5}$
- $y = {}^8 \log(x)$
- $\frac{10}{2x} = \frac{5y}{2}$
- $\sqrt{2y} = 6x$

Opgave 15

Gegeven zijn de formules: $A = 5p + 7q - 12$ en $2p - 3q = 6$.

Combineer beide formules tot een formule waarin A wordt uitgedrukt in p .

Verwerken

Opgave 16: Aandelen

Veel mensen beleggen in aandelen. Daarvoor geven ze een opdracht aan een zogenoemde 'broker'. Die regelt bij een opdracht de aankoop (of de verkoop) van de door de klant gewenste aandelen. Voor het uitvoeren van een opdracht brengt de broker kosten in rekening.

Broker Haag hanteert voor een opdracht een tarief volgens de volgende formule:

$$K = 0,0045 \cdot w + 4.$$

Hierbij zijn K de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop. De klant moet echter altijd ten minste € 12,00 voor een opdracht betalen.

Een klant koopt via Haag 150 aandelen ABN die per stuk € 19,18 kosten. Een tijd later is de waarde van deze aandelen gestegen naar € 21,44 per stuk. De klant neemt het besluit alle aandelen via Haag te verkopen. Voor de berekening van zijn winst houdt de klant rekening met de kosten van aankoop en verkoop.

- a Voor welke waarde van w heeft deze formule een zinvolle betekenis?
- b Bereken hoeveel winst de klant heeft behaald op de aandelen ABN.

Handelaar Van der Meulen is ook een broker. Hij hanteert als tarief: $K = 0,004 \cdot w + 7$.

Hierbij zijn K weer de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop. De klant betaalt bij Van der Meulen per opdracht nooit meer dan € 46,00. Als de totale waarde van de aandelen hoog genoeg is, nemen de kosten die Van der Meulen in rekening brengt, niet verder meer toe.

- c Bereken hoe groot de totale waarde van de aandelen dan tenminste moet zijn.

bron: examen vwo wiskunde A in 2008, eerste tijdvak

Opgave 17: Dennenhout

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voordat een bos wordt gekapt, onderzoekt men meestal eerst hoeveel m^3 hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter en de hoogte van bomen. De diameter van een boom wordt gemeten op een vaste hoogte. Voor het bepalen van de hoeveelheid hout in één boom wordt gebruikgemaakt van de volgende formule:

$$V = f \cdot d^2 \cdot h \text{ met diameter } d \text{ en hoogte } h \text{ beide in meter.}$$

In deze formule is V het volume aan hout in de boom in m^3 . De factor f heet de vormfactor. De vormfactor is een getal dat afhangt van de soort boom en de diameter d van de boom. Een voorbeeld van een boom die gebruikt wordt in de houtindustrie is de grove den (*Pinus sylvestris*).

Voor de grove den wordt het verband tussen de figuur vormfactor f en de diameter d bij benadering gegeven door de volgende formule:

$$f = 0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46$$

In een bos staat een grove den met een diameter van 0,16 m.

- a Bereken hoeveel procent de vormfactor van deze boom afneemt als de diameter van deze boom met 100% toeneemt.

De grootste bekende diameter van een grove den is 1,2 m. Naarmate de diameter van een grove den groter is, is de hoogte ook groter. Voor de grove den geldt bij benadering het volgende verband tussen de hoogte h en de diameter d :

$$h = 44 \cdot d^{0,65}$$



Figuur 8

Ook hier zijn de diameter en de hoogte beide in meter. Een grove den van 40 m hoog wordt gekapt.

- b** Bereken het volume aan hout.

Op basis van de formule $f = 0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46$ en de formule $h = 44 \cdot d^{0,65}$ kan de formule $V = f \cdot d^2 \cdot h$ worden geschreven als $V = a \cdot d^{4,65} + b \cdot d^{3,65} + c \cdot d^{2,65}$. Hierin zijn a , b en c constanten.

- c** Toon aan dat V inderdaad geschreven kan worden als

$V = a \cdot d^{4,65} + b \cdot d^{3,65} + c \cdot d^{2,65}$ en bereken a , b en c in twee decimalen nauwkeurig.

bron: examen vwo wiskunde C in 2011, eerste tijdvak

Opgave 18: Wikipedia

Wikipedia is een internationale internet-encyclopedie.

In maart 2012 bevatte de Nederlandstalige editie ruim één miljoen artikelen.

In de tabel staan de gegevens van 2012.

datum	22 maart	29 maart	5 april	12 april	19 april
aantal	1033414	1034660	1035882	1037184	1038340

Tabel 3

Zoals in de tabel te zien is, groeit het aantal artikelen flink.

Sommigen beweren dat hier sprake is van lineaire groei, anderen houden het op exponentiële groei.

- a** Onderzoek elk van deze beweringen.

Over een langere periode bleek de groei sterker te worden: in de 23 weken van 19 april tot 27 september 2012 groeide de Nederlandstalige Wikipedia uit tot 1120987 artikelen.

Neem aan dat het aantal artikelen vanaf 19 april exponentieel groeide en in de toekomst met dezelfde factor blijft groeien.

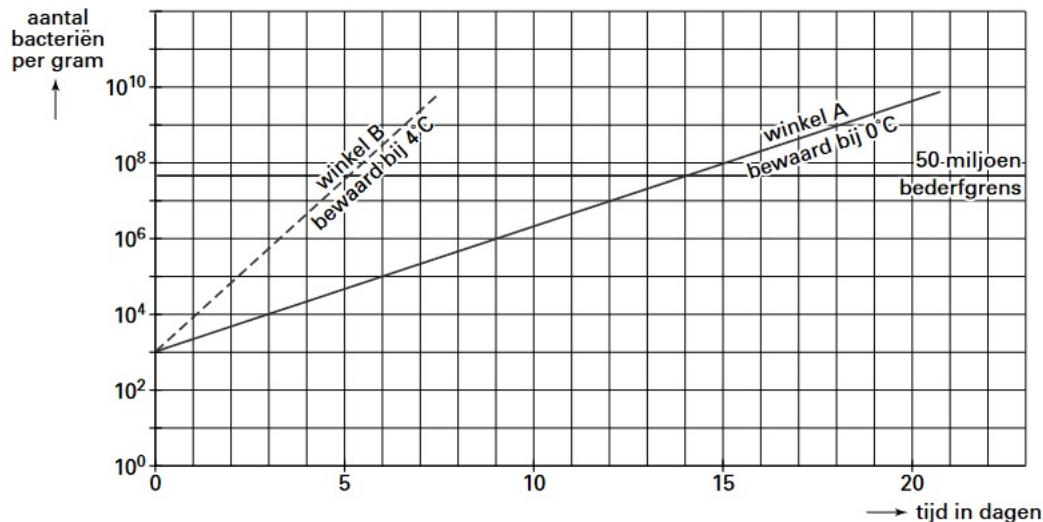
- b** Bereken het aantal artikelen op 19 april 2014.

bron: examen vwo wiskunde C in 2014, tweede tijdvak

Opgave 19: Koeling

Wageningse onderzoekers hebben zich verdiept in de groei van het aantal bacteriën in voedsel. Bij constante bewaartemperatuur groeit het aantal bacteriën exponentieel. De bijbehorende groeifactor hangt af van de bewaartemperatuur. Bij een krantenartikel hierover stond de volgende grafiek. De schaalverdelingen langs de beide assen zijn zo gekozen dat de grafieken, die de groei van het aantal bacteriën weergeven, rechte lijnen zijn.

Temperatuursafhankelijkheid van het bederf van kip door pseudomonasbacteriën



Figuur 9

In de grafiek wordt de bacteriegroei beschreven in kip die bij 0 °C (winkel A) respectievelijk 4 °C (winkel B) wordt bewaard.

- a** Toon aan dat bij 0 °C het aantal bacteriën zich per dag meer dan verdubbelt.

In de figuur is het aantal bacteriën per gram bij het begin gelijk aan 1000. De bederfgrens ligt bij 50 miljoen bacteriën per gram. In de figuur is af te lezen dat kip die voortdurend op 0 °C wordt bewaard, na 14 dagen de bederfgrens bereikt. Door verbeterde hygiëne is men in staat het aantal bacteriën bij het begin terug te brengen van 1000 per gram naar 100 per gram. Dit verlengt de houdbaarheid natuurlijk. Bij bewaren bij 0 °C (winkel A) duurt het dan in totaal 17 dagen voordat de bederfgrens bereikt wordt. De houdbaarheid wordt dus met 3 dagen verlengd. Bij bewaren bij 4 °C (winkel B) wordt de houdbaarheid door die verbeterde hygiëne met minder dan 3 dagen verlengd. De groeifactor per dag die bij 4 °C hoort, is 8,3.

- b** Met hoeveel dagen wordt de houdbaarheid bij 4 °C door die verbeterde hygiëne verlengd? Licht je antwoord toe.

In **figuur 9** kunnen we zien dat de groeifactor per dag g van het aantal bacteriën afhangt van de bewaartemperatuur. De onderzoekers hebben de volgende formule hiervoor opgesteld:

$$g = 10^{0,0092 \cdot (T+6)^2}$$

In deze formule is T de bewaartemperatuur in °C.

Met deze formule kun je dus bij iedere bewaartemperatuur de bijbehorende groeifactor berekenen.

Bij de volgende vraag gaan we uit van kip die buiten de koelkast bij een temperatuur van 18 °C bewaard wordt. Het aantal bacteriën per gram bij het begin is gelijk aan 100. De bederfgrens is nog steeds 50 miljoen bacteriën per gram.

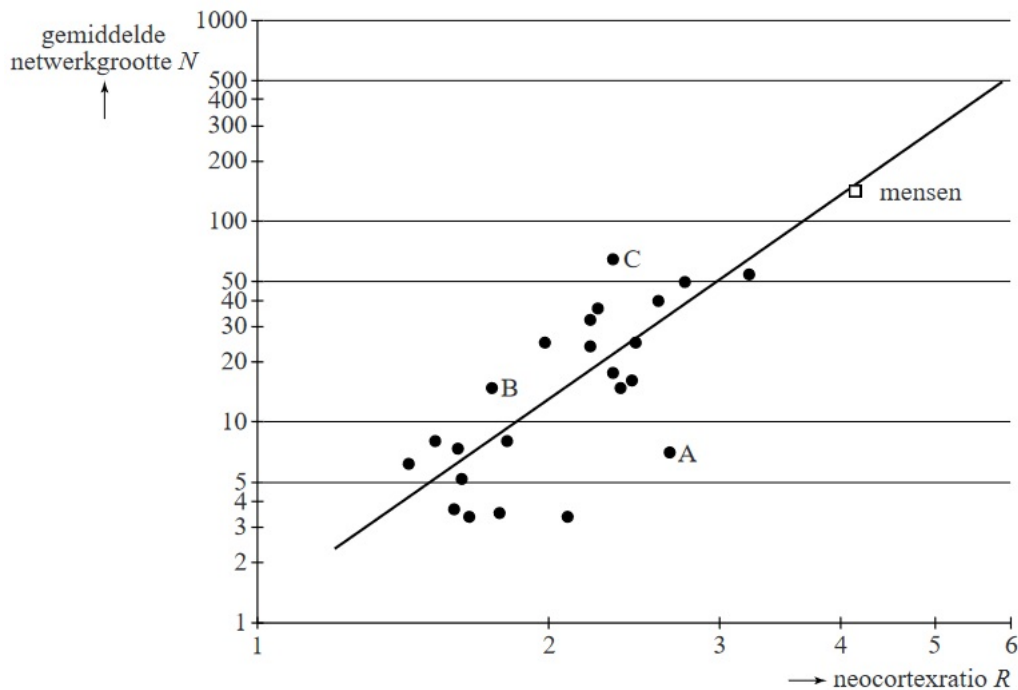
- c** Onderzoek met een berekening of de bederfgrens binnen één dag bereikt wordt.

bron: examen vwo wiskunde A1 in 2001, eerste tijdvak

Opgave 20: Het getal van Dunbar

Een groep mensen of dieren die op de een of andere manier sociaal contact met elkaar onderhouden, noemt men een sociaal netwerk. Tegenwoordig vind je sociale netwerken bijvoorbeeld op Facebook en ook in vriendengroepen, families en verenigingen.

De onderzoeker Robin Dunbar bestudeerde de relatie tussen de gemiddelde netwerk grootte N van diverse soorten primaten (apen en mensen) en hun zogeheten neocortexratio R , een maat voor de omvang van de hersenschors. Bekijk **figuur 10**.



Figuur 10

In de figuur kun je aflezen dat de gemiddelde netwerk grootte van mensen ongeveer 150 is. Daarom wordt 150 wel ‘het getal van Dunbar’ genoemd. De zwarte stippen horen bij verschillende soorten apen.

In **figuur 10** is ook de best passende lijn getekend bij deze gegevens.

Beide assen hebben een logaritmische schaalverdeling.

Voor de mens geeft deze lijn de gemiddelde netwerk grootte vrij goed aan, maar er zijn apensoorten waarbij er een fors verschil is tussen de werkelijke waarde en de waarde volgens de lijn.

In de figuur zijn drie apensoorten met de letters A, B en C aangegeven.

- a** Onderzoek bij welke van deze soorten het verschil tussen de werkelijke waarde en de waarde volgens de lijn absoluut gezien het grootst is.

In de figuur is bijvoorbeeld voor $R = 4$ de waarde van N niet precies af te lezen. Een formule voor de getekende lijn is:

$$\log(N) = 0,1 + 3,4 \cdot \log(R).$$

- b** Bereken met behulp van de formule de waarde van N als $R = 4$.

De neocortex is een deel van het brein. De neocortexratio is het volume van de neocortex gedeeld door het volume van de rest van het brein. Bij mensen is het volume van de neocortex gemiddeld $1006,5 \text{ cm}^3$ en het totale breinvolume gemiddeld $1251,8 \text{ cm}^3$.

- c** Toon met behulp van de formule aan dat je met deze gegevens kunt concluderen dat de gemiddelde netwerk grootte bij mensen inderdaad ongeveer gelijk is aan 150.

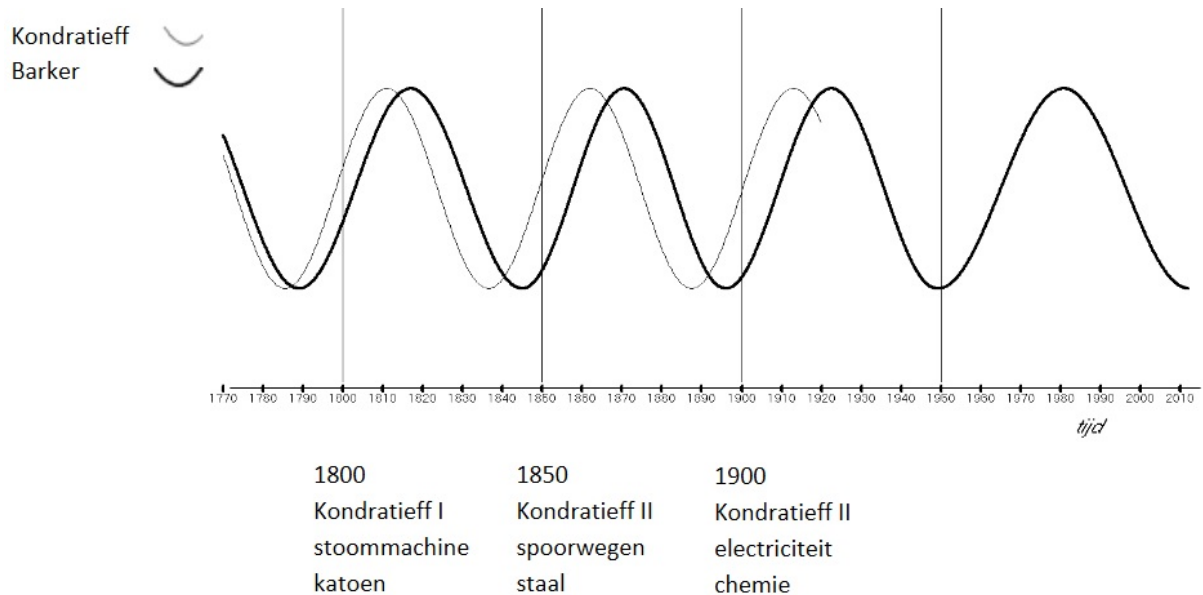
De formule voor de getekende lijn $\log(N) = 0,1 + 3,4 \cdot \log(R)$ kun je herschrijven tot de vorm $N = c \cdot R^{3,4}$.

- d Bepaal c in één decimaal nauwkeurig.

bron: examen vwo wiskunde C in 2014, tweede tijdvak

Opgave 21: Golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker

In de economie komen vaak golfbewegingen voor: het gaat afwisselend beter en slechter met de economie. Economen proberen deze golfbewegingen te analyseren, onder andere om een volgende economische crisis te kunnen voorspellen. In november 2010 stond hierover een artikel in dagblad Trouw. In de figuur, gebaseerd op dit artikel, zijn twee verschillende golfbewegingen te zien.



Figuur 11

De Russische econoom Kondratieff presenteerde rond 1920 de theorie dat er in de (kapitalistische) wereldeconomie golven of cycli voorkomen met een periode tussen de 50 en 60 jaar: na grote technische vernieuwingen leeft de economie steeds op, om een aantal jaren later weer in een crisis of slechte tijd te belanden. In de figuur is onder andere de golfbeweging volgens Kondratieff getekend tot 1920. Als je deze golfbeweging met dezelfde vaste periode ook na 1920 voortzet, wordt de crisis van 2009 hiermee niet goed voorspeld.

- a Laat met een redenering gebaseerd op de figuur zien dat 2009 volgens Kondratieff niet in een periode van economische neergang zit.

De Amerikaanse beursanalist Barker gaat uit van een iets andere golfbeweging. Ook de golfbeweging volgens Barker is in de figuur getekend. Vanaf het dieptepunt in 1949 heeft de golfbeweging volgens Barker een periode die constant is.

In de figuur is te zien dat de golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker steeds meer van elkaar gaan verschillen. In bepaalde perioden laten de beide grafieken zelfs een tegengestelde beweging van de economie zien: de grafiek volgens Barker stijgt, terwijl die van Kondratieff daalt of andersom.

- b Onderzoek met behulp van de figuur in welke perioden tussen 1950 en 2050 de grafieken van Kondratieff en Barker een tegengestelde beweging van de economie laten zien.

naar: voorbeeldexamenopgaven wiskunde A in 2011

2 Vergelijkingen en ongelijkheden

Inleiding



Figuur 1

Muziekfestivals zijn gigantische evenementen waar beroemde artiesten de line-up vormen. Artiesten treden om de beurt op, waarbij hun stemgeluid uit de speakers over het terrein schalt. Muziekfestivals zijn aan veel regels gebonden. Zo mag het geluid bijvoorbeeld niet te hard staan.

Geluidsniveau wordt gemeten in decibel (dB). Hoe hoger het geluidsniveau, hoe harder het geluid en hoe schadelijker voor het gehoor. De pijngrens van een mens ligt bij 170 dB, boven de 180 dB zal onherstelbare gehoorschade optreden.

De organisatie van een muziekfestival moet ervoor zorgen dat de bezoekers niet worden blootgesteld aan een geluid van meer dan 103 dB.

Verkennen

Opgave V1

Als de bezoekers niet dichterbij dan op 20 meter afstand bij de speakers komen, hoeveel speakers mag de organisatie dan maximaal bij elkaar plaatsen? Neem de grens van 103 dB in acht.

Theorie

Om te onthouden

Vergelijkingen, basistechnieken

Bij het oplossen van een **vergelijking** gebruik je meestal benaderingstechnieken. Het **inklemmen** is een bekende methode, maar meestal gebruik je gewoon programmatuur, bijvoorbeeld in je grafische rekenmachine.

Bij het oplossen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ kun je enkele basistechnieken toepassen, zoals:

- de **balansmethode** waarbij je aan beide zijden hetzelfde optelt of aftrekt, of met hetzelfde vermenigvuldigt (behalve met 0 of door hetzelfde deelt (behalve door 0));
- de **terugrekenmethode** om een vergelijking van de vorm $f(x) = c$ op te lossen en bij functie f een rekenschema kan worden gemaakt;

Verder gebruik je soms:

Ga wel altijd na of de gevonden oplossingen binnen de domeinen van de functie f en g vallen!

In veel gevallen zul je de grafische rekenmachine gebruiken. Schrijf dan wel duidelijk op welke functie je invoert en hoe je de grafische rekenmachine gebruikt. In principe moet iemand die jouw examenwerk straks nakijkt, jouw berekening kunnen nadoen!

Vergelijkingen, machtsfuncties

Voor machten heb je rekenregels.

De rekenregels voor machten

$$x^0 = 1$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \quad (x \neq 0)$$

$$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x} \quad (x \neq 0 \text{ en } a \geq 0)$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Bij machtsfuncties $y = x^n$ gebruik je bij het oplossen van een vergelijking of ongelijkheid:

als $x^p = c$, dan is $x = c^{\frac{1}{p}}$ voor elke mogelijke waarde van p .

Enkele bijzondere situaties zijn:

- $p = n$ is geheel, positief en even: $x^n = c$ geeft $x = \pm c^{\frac{1}{n}} = \pm \sqrt[n]{c}$ als $c \geq 0$.
- $p = n$ is geheel, positief en oneven: $x^n = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$.
- $p = \frac{1}{n}$ en n is geheel en positief en even: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = c$ geeft $x = c^n$ als $c \geq 0$.
- $p = \frac{1}{n}$ en n is geheel en positief en oneven: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = c$ geeft $x = c^n$.
- Als $p = -n$ negatief is, kun je de vergelijking herleiden: $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = c$ geeft $x^n = \frac{1}{c}$.

Ongelijkheden

Een **ongelijkheid** los je op door eerst de bijbehorende vergelijking op te lossen. Daarna gebruik je de grafiek van de functie(s) om de oplossing van de ongelijkheid af te lezen.

Opgave 1

Los op.

- a** $2x - 3 < 3x + 4$
- b** $\frac{1}{4}x + 5 = \frac{1}{5}x + 4$
- c** $x(x + 4) < 0$
- d** $x^2(x - 4) \leq 0$

Opgave 2

Los op en rond indien nodig af op twee decimalen.

- a** $x^2 - 2x > -2x^2 + 4x$
- b** $x^3 < 5 - x$

Opgave 3

Bekijk de grafieken van $y_1 = 3x^4$ en $y_2 = 2x^3$.

Los op, afrondingen op drie decimalen.

- a** $2x^3 < 11$
- b** $3x^4 > 12$
- c** $2x^3 < 3x^4$

Opgave 4

Los op. Antwoord indien nodig in drie decimalen nauwkeurig.

- a** $x^{1\frac{1}{3}} \leq 17$
- b** $\sqrt[4]{x^3} \geq 8$

Opgave 5

Los op. Antwoord indien nodig in drie decimalen nauwkeurig.

- a** $x^{-2} \leq 17$
- b** $\frac{30}{x-3} \geq 5$

Theorie

Om te onthouden

Vergelijkingen met exponentiële en logaritmische functies

Belangrijk zijn weer de rekenregels:

De **rekenregels voor machten** ($g > 0$)

$$g^0 = 1 \qquad g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$g^{-a} = \frac{1}{g^a} \qquad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g} \qquad (g^a)^b = g^{ab}$$

De **rekenregels voor logaritmen** ($g > 0$ en $g \neq 1$)

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$${}^g\log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$$

Bij het algebraïsch oplossen van exponentiële vergelijkingen isoleer je het exponentiële deel van de vergelijking met behulp van de rekenregels voor machten totdat er $g^{f(x)} = c$ (met $c > 0$) of $g^{f(x)} = g^{h(x)}$ staat.

- $g^{f(x)} = c$ geeft $f(x) = {}^g\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$
- $g^{f(x)} = g^{h(x)}$ geeft $f(x) = h(x)$

Bij de exponentiële groeifunctie $N = b \cdot g^t$ met $g > 1$ kun je de **verdubbelingstijd** berekenen door $g^t = 2$ op te lossen.

Deze tijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid b .

Bij $0 < g < 1$ kun je de **halveringstijd** van een hoeveelheid berekenen door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Bij het algebraïsch oplossen van logaritmische vergelijkingen isoleer je het logaritmische deel van de vergelijking met behulp van de rekenregels voor logaritmen totdat er ${}^g\log(f(x)) = c$ of ${}^g\log(f(x)) = {}^g\log(h(x))$ staat.

- ${}^g\log(f(x)) = c$ geeft $f(x) = g^c$
- ${}^g\log(f(x)) = {}^g\log(h(x))$ geeft $f(x) = h(x)$

$y = {}^g\log(f(x))$ voor elke functie f bestaat alleen voor $f(x) > 0$. Controleer daarom altijd of de oplossingen voor x aan deze voorwaarde voldoen.

Ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies

Bereken bij een ongelijkheid eerst de gelijkheid en bepaal daarmee, met behulp van een grafiek, de oplossing van de ongelijkheid. Houd hierbij rekening met eventuele asymptoten.

Opgave 6

Los op.

- a** $2^{2x-1} = 32$
- b** $2^{3x} = 10^x$
- c** $150 \cdot 10^{-0,1x} = 60$
- d** $50 \cdot 2^{0,5x} + 10 = 100$

Opgave 7

Een hoeveelheid groeit exponentieel met 30% per jaar.
Bereken de verdubbelingstijd in jaar, rond af op één decimaal.

Opgave 8

Los op.

- a** ${}^2\log\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$
- b** $\log(4 - x) = 2$

Opgave 9

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0,95^t$ geeft de hoeveelheid A in mg van het medicijn die na t minuten in het bloed aanwezig is.

- a** Na hoeveel minuten (in één decimaal nauwkeurig) is er 300 mg in het bloed opgenomen?
- b** Waarom kun je nu geen verdubbelingstijd uitrekenen?

Opgave 10

De luchtdruk p in hPa (hectopascal) varieert met de hoogte h in km boven het zeeniveau.
Er geldt op een bepaalde plaats: $h = -19 \log(p) + 57$.

- a** Hoeveel bedraagt daar de luchtdruk op zeeniveau?
- b** Hoeveel bedraagt daar de luchtdruk op 2000 m boven zeeniveau?

Theorie

Om te onthouden

Verandering van een grafiek weergeven

Een **toenamediagram** geeft de verandering (toename of afname) van y weer met een vaste stapgrootte Δx .

Om bij een gegeven functie $y = f(x)$ een toenamediagram te maken, kun je op de grafische rekenmachine de functie invoeren bij y_1 en dan een toenametabel maken. Bij stapgrootte $\Delta x = 1$ voer je dan $y_2 = y_1(x) - y_1(x - 1)$ in.

Vanuit een toenamediagram kun je ook de grafiek weer samenstellen vanuit een gegeven startpunt, hoewel je geen informatie hebt over het preciese verloop.

Differentiequotiënt

Bij een gegeven functie $y = f(x)$ is het **differentiequotiënt** over het interval $[a, b]$:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ook dit is een maat voor de verandering van de grafiek van f op dit interval. Je noemt dit de **gemiddelde verandering** van f op het interval $[a, b]$.

De grafiek is **stijgend** op het interval $[a, b]$ als het differentiequotiënt positief is.

De grafiek is **dalend** op het interval $[a, b]$ als het differentiequotiënt negatief is.

Differentiaalquotiënt en helling in een punt

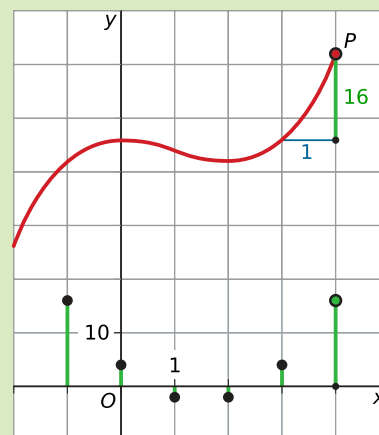
Bij een gegeven functie $y = f(x)$ is het **differentiaalquotiënt** voor een bepaalde waarde $x = a$:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ met } h \rightarrow 0.$$

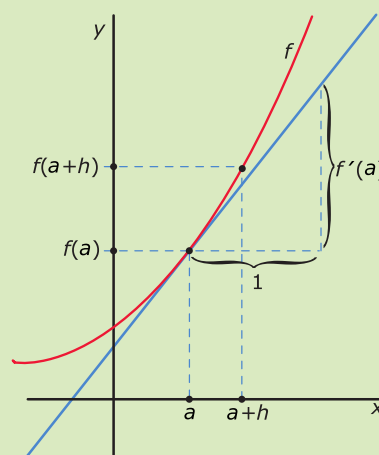
Dit is een maat voor de verandering van de grafiek van f voor deze waarde van x . Het is ook de helling van de grafiek in het punt $(a, f(a))$ en dus de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** aan de grafiek van f in dat punt. Je kunt deze helling bepalen met behulp van je grafische rekenmachine.

De grafiek is **stijgend** in $(a, f(a))$ als de helling positief is. Als de helling zelf groter wordt is er sprake van **toenemende stijging**, anders van **afnemende stijging**.

De grafiek is **dalend** in $(a, f(a))$ als de helling negatief is. Als de helling zelf groter wordt (minder negatief) is er sprake van **afnemende daling**, anders van **toenemende daling**.



Figuur 2



Figuur 3

Opgave 11

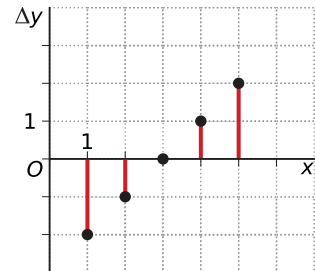
Gegeven is de functie f door $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$.

- Teken een toenamediagram op het interval $[0,6]$ met stapgrootte $\Delta x = 1$.
- Voor welke waarden van x is de grafiek van f stijgend? En gaat het dan om toenemende of afnemende stijging?
- Voor welke waarden van x is de grafiek van f dalend? En gaat het dan om toenemende of afnemende daling?

Opgave 12

Gegeven is een toenamediagram van een functie die door het punt $(2,0)$ gaat.

Teken een grafiek die bij dit toenamediagram past.



Figuur 4

Opgave 13

Gegeven is de functie f met $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- Bereken de gemiddelde verandering op het interval $[0,3]$.
- Bepaal het differentiequotiënt op het interval $[0,1]$.
- Bepaal de helling van de grafiek van f voor $x = 1$.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$.

Opgave 14

De luchtdruk p in hPa (hectopascal) varieert met de hoogte h in km boven het zeeniveau.

Er geldt op een bepaalde plaats: $p = 1000 \cdot 10^{-0,053h}$.

- Hoeveel daalt de luchtdruk als je van 1 km hoogte stijgt naar 1,5 km?
- Met welke snelheid daalt de luchtdruk op zeeniveau?

Verwerken

Opgave 15: Zeemonsters

In 1972 werd de mesoplodon densirostris ontdekt in de oceaan. Het is een dolfijnensoort die 7 meter lang kan worden. Mede naar aanleiding van deze vondst deed de bioloog C. Paxton onderzoek naar de vraag hoeveel van dergelijke grote diersoorten er in de toekomst nog meer ontdekt zullen worden. Paxton beperkte zich tot wat hij zeemonsters noemde: dieren die in zee leven en meer dan 2 meter lang kunnen worden.



Figuur 5 Een mesoplodon densirostris

Op basis van gegevens over het aantal ontdekte zeemonsters in verschillende jaren stelde Paxton het volgende model op: $P(t) = \frac{264t - 476657}{t - 1767}$.

Met dit model kon hij een schatting maken van het aantal ontdekte soorten tot en met een zeker jaar t . In deze formule is $P(t)$ het aantal soorten dat tot en met jaar t bekend is. Dus als je een schatting wilt van het aantal soorten dat bijvoorbeeld op het eind van het jaar 1980 bekend is, dan moet je $t = 1980$ invullen in de formule. De uitkomst wordt afgerond op gehele. Vanaf eind 1895 tot en met eind 1995 zijn er in werkelijkheid 30 soorten ontdekt.

- Bereken hoeveel soorten er volgens het model van Paxton zouden zijn ontdekt in deze periode.
- In een bepaald jaar is de waarde van de formule van Paxton 200. In welk jaar is dat en wat is de betekenis van deze waarde?

naar: examen vwo wiskunde A1 in 2009, tweede tijdvak

Opgave 16: Boomgroei

Naar de groei van bomen is veel onderzoek gedaan. Dat heeft geleid tot een goed inzicht in het verband tussen de hoogte van een boom en de leeftijd van die boom. In de bosbouw wordt voor veel bomen de te verwachten hoogte berekend met de formule van Chapman-Richards: $h = a(1 - b^t)^c$. Hierin is h de hoogte van een boom in meters en t de leeftijd in jaren. De waarden van de getallen a , b en c hangen af van de soort boom. De getallen a , b en c zijn positief. In de tabel zijn deze waarden voor enkele boomsoorten weergegeven.

boom	a	b	c
Japanse lariks	23,743	0,9603	1,22770
zomereik	39,143	0,9867	0,96667
Amerikaanse eik	29,026	0,9790	0,80820
berk	43,281	0,9876	0,95040
grove den	24,426	0,9656	1,59980

Tabel 1

Het verband tussen de hoogte en de leeftijd van de zomereik wordt dus gegeven door de formule: $h = 39,143(1 - 0,9867^t)^{0,96667}$

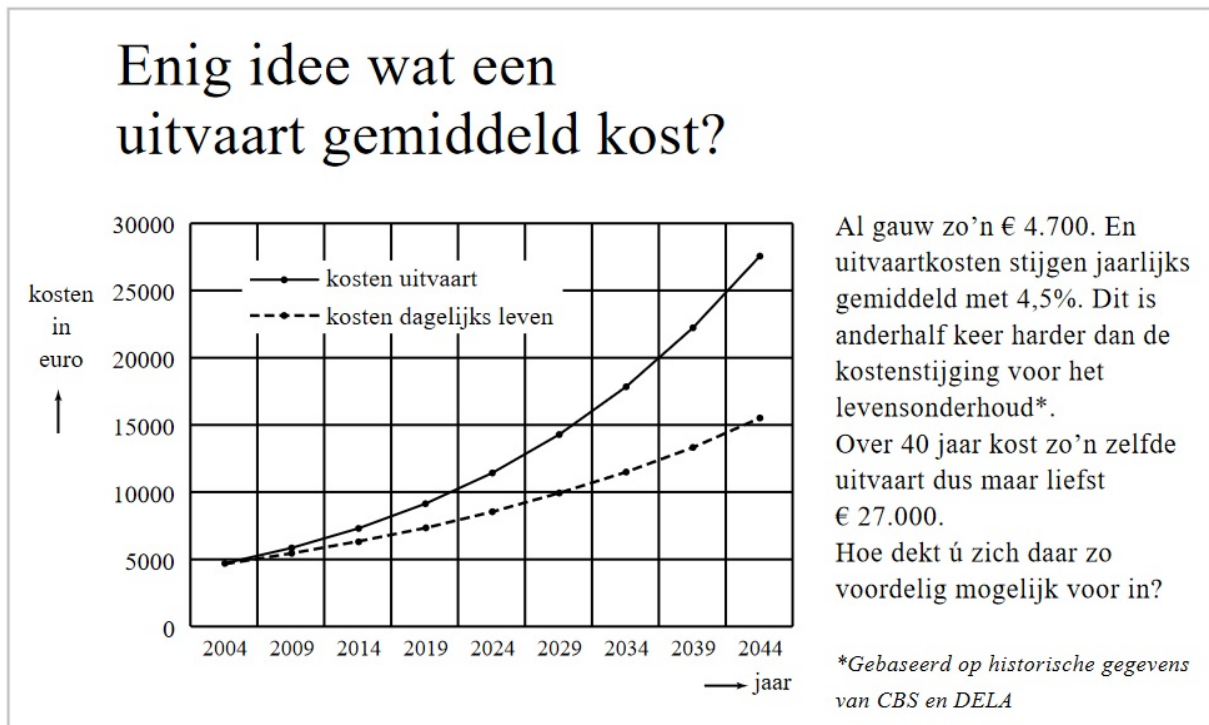
De zomereik wordt op den duur veel groter dan de Amerikaanse eik, maar in de eerste levensjaren groeit de Amerikaanse eik veel sneller.

- Toon door berekening aan dat volgens de formule van Chapman-Richards de Amerikaanse eik in het vierde levensjaar ruim 20 cm méér groeit dan de zomereik.
- Bereken hoe oud een Japanse lariks van 8 meter hoogte is.

naar: examen vwo wiskunde C in 2010, eerste tijdvak

Opgave 17: Verzekering

Verzekeringsmaatschappijen maken op verschillende manieren reclame voor allerlei verzekeringen. Een voorbeeld daarvan vind je in de figuur. Daar zie je een deel van een reclamefolder die in 2004 huis aan huis werd verspreid. In de folder legt de verzekeraar uit dat de kosten voor een uitvaart sneller stijgen dan de kosten voor het levensonderhoud. Ook wordt de ontwikkeling van beide kostensoorten met een grafiek in beeld gebracht.



Figuur 6

Uitgaande van een jaarlijkse kostenstijging met 4,5% berekende men de kosten in 2044. De uitvaartkosten stijgen van € 4700 in 2004 tot ongeveer € 27000 in 2044. Het bedrag in 2044 is afgerond op duizendtallen.

- a** Bereken dit bedrag in euro's nauwkeurig.

Met 'anderhalf keer harder' bedoelt de schrijver van de folder dat de jaarlijkse procentuele stijging van de kosten voor een uitvaart 1,5 keer zo groot is als die van de kosten voor het levensonderhoud. Daardoor zullen de kosten voor het levensonderhoud in de periode 2004-2044 stijgen met een percentage dat aanzienlijk kleiner is dan 474% (het stijgingspercentage van de uitvaartkosten). Dit is in de folder ook grafisch weergegeven.

- b** Bereken met hoeveel procent de kosten voor het levensonderhoud volgens de folder zullen toenemen in de periode 2004-2044.

bron: examen vwo wiskunde C in 2010, eerste tijdvak

Opgave 18: Lichaamsoppervlak

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak. Gegevens over iemands lichaamsoppervlak worden bijvoorbeeld gebruikt voor risico-analyse bij bestrijdingsmiddelen. De schadelijke stoffen hierin kunnen via de huid in het lichaam worden opgenomen. In een rapport van het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) is een tabel te vinden waarin onder andere de lichaamsoppervlakte is af te lezen. Een gedeelte van deze tabel is hieronder weergegeven.

	lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
leeftijd	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Tabel 2

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam.

Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15% naar 21,0%. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

- a** Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Er zijn ook formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen. Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M} \quad (\text{formule van Mosteller})$$

$$S_{\text{Haycock}} = 0,024265 \cdot L^{0,3964} \cdot M^{0,5378} \quad (\text{formule van Haycock})$$

In deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Voor een kind met een lengte van 1 meter ($L = 100$) blijken de grafieken van de formules van Mosteller en Haycock bijna samen te vallen. Behalve bij $M = 0$ kg is er bij $L = 100$ nóg een lichaamsgewicht waarbij de formule van Mosteller en de formule van Haycock precies dezelfde lichaamsoppervlakte geven.

- b** Bereken dat lichaamsgewicht in één decimaal nauwkeurig.

Om de formules nog beter met elkaar te kunnen vergelijken, is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock.

De formule van Mosteller kan geschreven worden in de vorm

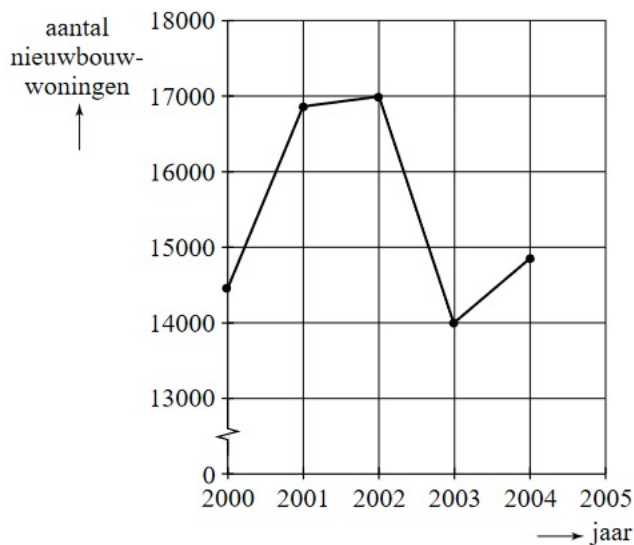
$$S_{\text{Mosteller}} = c \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$$

- c** Laat dat zien en bereken de waarde van c .

bron: examen vwo wiskunde C in 2013, eerste tijdvak

Opgave 19: Controle bij nieuwbouw

In Nederland worden veel woningen gebouwd. In de figuur zie je een grafiek van de aantallen nieuwbouwwoningen die in Zuid-Holland zijn gebouwd in de jaren 2000 tot en met 2004.



Figuur 7

In 2004 was men niet tevreden met het aantal nieuwbouwwoningen. Men wilde graag in 2005 even veel nieuwbouwwoningen bouwen als in 2002. Het aantal nieuwbouwwoningen in 2005 moest dan een flink percentage hoger zijn dan het aantal in 2004.

- a Bereken met behulp van de figuur dit percentage.

Bij de bouw van woningen en gebouwen controleert de overheid of de constructie veilig is. Deze controle kost tijd. Hoe duurder het gebouw, hoe meer controletijd men denkt nodig te hebben. Het verband tussen de benodigde controletijd en de bouwkosten is weergegeven in **figuur 8**.

Van een gebouw A zijn de bouwkosten 1 miljoen euro. In **figuur 8** is af te lezen dat de controletijd van gebouw A 50 uren is. Een gebouw B is twee keer zo duur als gebouw A.

- b Hoeveel keer zo groot is de controletijd van gebouw B ten opzichte van de controletijd van gebouw A? Licht je werkwijze toe.

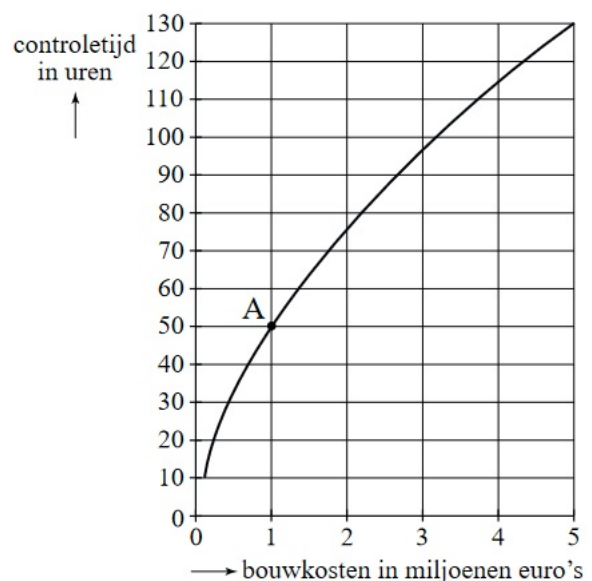
Volgens ingenieur Van Overveld kan de grafiek in **figuur 8** goed worden benaderd door de volgende formule:

$$C = (1,544 + 0,245 \log(K))^9$$

Hierin zijn C de benodigde controletijd in uren en K de geraamde bouwkosten in miljoenen euro's. Deze formule is gebaseerd op het prijspeil van het jaar 2003. We gaan ervan uit dat de formule ook geldig is voor gebouwen die meer dan 5 miljoen euro kosten.

In 2003 werden de plannen goedgekeurd voor de bouw van het Museum voor Beeld en Geluid. De bouwkosten werden geraamd op 50 miljoen euro.

- c Bereken het aantal uren dat volgens de formule nodig zou zijn voor de controle.



Figuur 8

In 2003 werd het ontwerp van het Nieuwe Rijksmuseum goedgekeurd. Volgens de formule zou de benodigde controletijd zo'n 950 uur bedragen

- d Bereken hoeveel miljoen euro de geraamde bouwkosten van het Nieuwe Rijksmuseum waren.

De formule kan ook gebruikt worden voor de jaren na 2003. Maar dan moet voor de bouwkosten wel het bedrag genomen worden dat dit gebouw in 2003 zou hebben gekost. We willen de controletijd berekenen van een gebouw waarvan in 2007 de bouwkosten 62,7 miljoen euro bedragen. De bouwkosten zijn in de periode 2003-2007 jaarlijks met 4% gestegen.

- e Bereken de controletijd van dit gebouw.

bron: examen vwo wiskunde A1 in 2008, tweede tijdvak

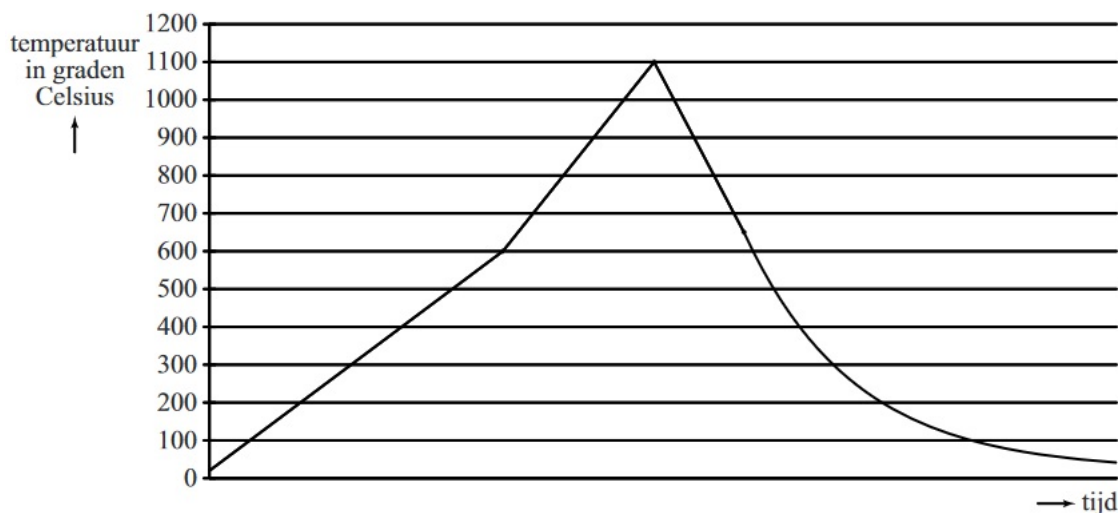
Opgave 20: Keramiek

Op de foto zie je een stad van keramiek, gemaakt door de kunstenaar Elly van de Merwe.

De huisjes zijn gemaakt van kleiplaten en worden twee keer gebakken. Om kapotspringen van het werk te voorkomen, moet de temperatuur bij de eerste keer bakken heel precies geregeld worden. Dit is goed mogelijk in een elektrische oven die met een computer bestuurd wordt. In **figuur 10** zie je een grafiek van de temperatuur tijdens het bakproces.



Figuur 9



Figuur 10

Het bakproces bestaat uit vier fasen:

- fase 1: de oven gaat aan en men laat de temperatuur stijgen van 20 °C naar 600 °C met een constante stijging van 60 °C per uur;
- fase 2: van 600 °C tot de maximale temperatuur 1100 °C houdt men een constante stijging aan van 100 °C per uur;

- fase 3: men laat nu de oven afkoelen tot 650 °C met een constante daling van 150 °C per uur (de oven is nog aan);
- fase 4: bij 650 °C zet men de oven uit en de temperatuur daalt nu volgens een afnemend dalende grafiek.

a Bereken hoeveel minuten de oven in totaal bij dit bakproces aan heeft gestaan.

Nadat de huisjes uit de oven zijn gehaald wordt er een laagje glazuur op aangebracht. Hierna worden ze een tweede keer gebakken in een speciale oven die buiten staat, een zogenoemde Raku-oven. Na het opwarmen tot 1000 °C worden de huisjes met een tang uit de oven gehaald. Doordat ze in de buitenlucht snel afkoelen, ontstaan er barstjes in het glazuur. Zie de foto bij het begin van de opgave. Voor een bepaald huisje geldt tijdens het afkoelingsproces de volgende formule:

$$T = 20 + 980 \cdot 0,93^t$$

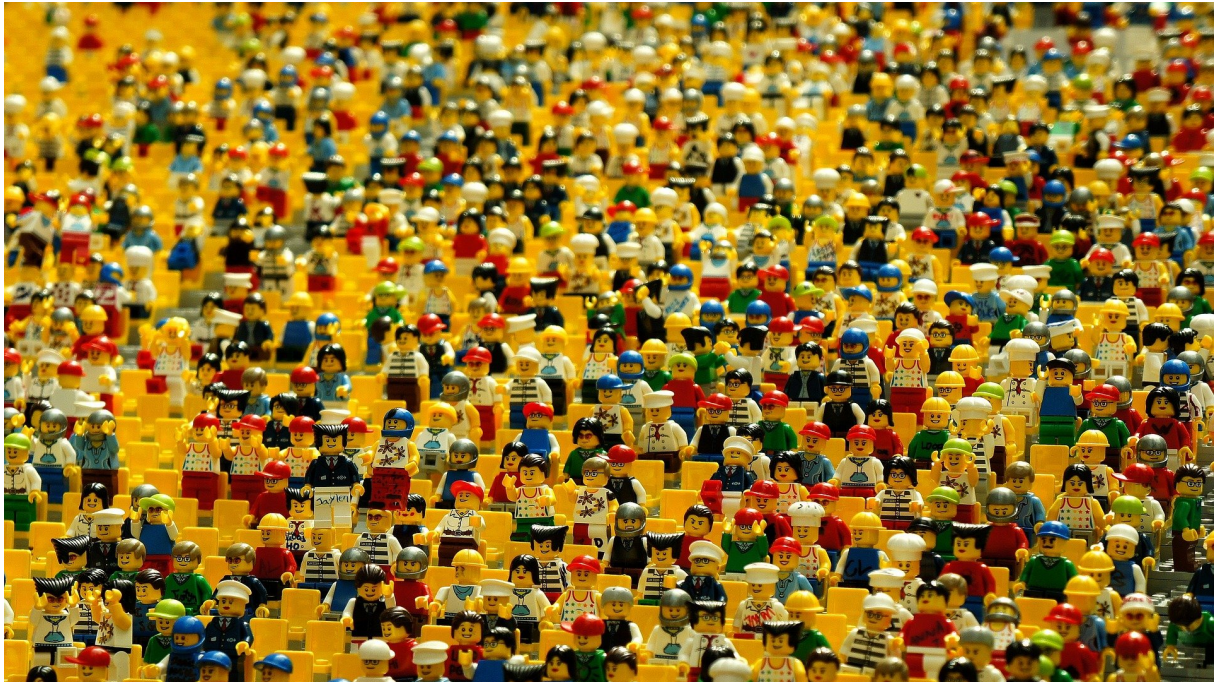
Hierin is T de temperatuur van het huisje in °C en t de tijd in minuten nadat het uit de oven is gehaald. Bij de tweede keer bakken is de snelheid waarmee de temperatuur van het huisje daalt op het moment dat het uit de oven gehaald wordt, behoorlijk groot.

b Bereken deze snelheid met behulp van je grafische rekenmachine of met een gemiddelde verandering.

bron: pilotexamen wiskunde C in 2014, eerste tijdvak

3 Formules opstellen

Inleiding



Figuur 1

De wereldbevolking is in de vorige eeuw zeer snel toegenomen. Dit komt doordat er meer mensen geboren worden dan dat er sterven en dat mensen over het algemeen steeds langer leven. Daar zijn verschillende oorzaken voor: met name de toegankelijkheid tot schoon drinkwater en een betere hygiëne heeft de levensverwachting in de 19e eeuw sterk doen stijgen. In de 20e eeuw zijn de voedselvoorziening en de kennis over het bestrijden van ziektes verbeterd.

In 1860 was de levensverwachting in Nederland maar 37 jaar. Hoewel de meeste mensen toen rond hun zeventigste jaar stierven, was de babysterfte enorm. In de loop der tijd is de levensverwachting bij geboorte in Nederland toegenomen naar gemiddeld 81 jaar in 2015. Een betere levensverwachting heeft in het algemeen een positief effect op de bevolkingsgroei: omdat ouders de kans groot achten dat hun kinderen een goede en lange toekomst krijgen, zullen zij eerder aan kinderen beginnen en eventueel meer kinderen voortbrengen.

Verkennen

Opgave V1

In 1950 bestond de wereldbevolking uit 2,5 miljard mensen en in 2005 bestond de wereldbevolking uit 6,5 miljard personen. Neem aan dat bevolkingsgroei kan worden beschreven met een exponentiële functie.

Stel een formule op voor die exponentiële groei en voorspel daarmee het aantal mensen in 2050.

Theorie

Om te onthouden

Formule opstellen van een lineair verband

Het functievoorschrift van een **lineair verband** is: $y = ax + b$.

Als de grafiek door de punten (0,6) en (3,0) gaat, is de richtingscoëfficiënt van de lijn:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-6}{3-0} = -2$$

Dit invullen samen met de coördinaten van een van beide punten in $y = ax + b$ geeft:

$$6 = -2 \cdot 0 + b, \text{ zodat } b = 6.$$

Het functievoorschrift is: $y = -2x + 6$

Dit kun je desgewenst in de vorm $px + qy = r$ schrijven: $2x + y = 6$.

Formule opstellen van een kwadratisch verband

Het functievoorschrift van een **kwadratisch verband** met top (p,q) is $y = a(x - p)^2 + q$.

De parabool met de top (4, -2) wordt $y = a(x - 4)^2 - 2$.

Als hij ook door (0,6) gaat dan is $6 = a(0 - 4)^2 - 2$ en $a = 0,5$.

Het functievoorschrift van de parabool is: $y = 0,5(x - 4)^2 - 2$.

Dit kun je desgewenst schrijven in de vorm $y = ax^2 + bx + c$ door de haakjes weg te werken:
 $y = 0,5(x^2 - 8x + 16) - 2 = 0,5x^2 - 4x + 6$.

Formule opstellen van een machtsverband

Het functievoorschrift van een **machtsverband** heeft de vorm $y = a \cdot x^r$.

Gaat dit machtsverband door de punten (2,32) en (3,108) dan krijg je $32 = a \cdot 2^r$ en $108 = a \cdot 3^r$

Beide vergelijkingen delen: $\frac{108}{32} = \frac{a \cdot 3^r}{a \cdot 2^r}$ geeft $\frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^r$ en $r = \frac{3}{2} \log\left(\frac{27}{8}\right) = 3$.

Het invullen van de waarde van r en de coördinaten van één van de punten in $y = a \cdot x^r$ geeft:
 $32 = a \cdot 2^3$ en $a = 4$.

Het functievoorschrift van het machtsverband door de punten (2,32) en (3,108) is $y = 4 \cdot x^3$.

Formules opstellen door combineren en/of schakelen

Nieuwe functievoorschriften kunnen ontstaan door functievoorschriften door middel van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen met elkaar te combineren.

Neem bijvoorbeeld $f(x) = 4 - x$ en $g(x) = 2\sqrt{x}$.

Dan is $h(x) = f(x) + g(x) = 4 - x + 2\sqrt{x}$ en $k(x) = g(f(x)) = 2\sqrt{4 - x}$.

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $A(0,2)$, $B(0,6)$, $C(4,4)$ en $T(4,6)$.

- a** Stel een formule op van de lineaire functie waarvan de grafiek door B en C gaat.
- b** Stel een formule op van de kwadratische functie waarvan de grafiek door A gaat en waarvan T de top is.
- c** Bereken de snijpunten van beide functies.

Opgave 2

Iemand gooit een bal met een mooie parabolische baan. Ten opzichte van een Oxy -assenstelsel begint de bal in $(0,2)$ en heeft de baan zijn hoogste punt in $(6,3)$. Neem aan dat de eenheid op beide assen 1 m is.

- a** Stel een bij deze baan passende formule op.
- b** Op hoeveel meter vanaf $(0,0)$ komt de bal op de grond?

Opgave 3

Een machtsfunctie heeft de vorm: $N(t) = at^r$. De grafiek gaat door $(4; 3,2)$ en $(9; 10,8)$.

- a** Stel het bijbehorende functievoorschrift op.
- b** Bereken voor welke waarden van t geldt $N(t) < 100$. Geef je antwoord in gehele waarden van t nauwkeurig.

Opgave 4

Een wortelfunctie heeft de vorm: $f(t) = a\sqrt{t+b}$. De grafiek gaat door $(-2,0)$ en $(0,2)$.

- a** Stel het bijbehorende functievoorschrift op.
- b** Los op $f(t) < \sqrt{2}$.

Opgave 5

In een assenstelsel is op de horizontale as $\log(x)$ uitgezet en op de verticale as $\log(y)$. Er is een lijn getekend door de punten $(1,5)$ en $(11,0)$.

- a** Stel een bijbehorend functievoorschrift op van de vorm $\log(y) = a \cdot \log(x) + b$.
- b** Schrijf de formule in de vorm $y = c \cdot x^r$.

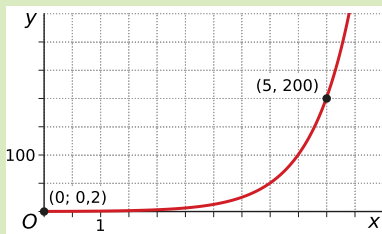
Theorie

Om te onthouden

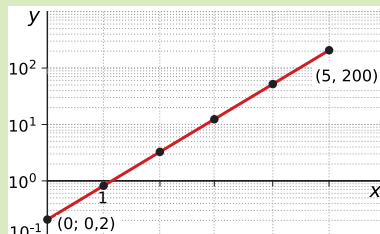
Formule opstellen van een exponentieel verband

Als een beschrijving of grafiek van een **exponentieel verband** is gegeven, kun je het functievoorschrift opstellen aan de hand van de coördinaten van twee punten op de grafiek.

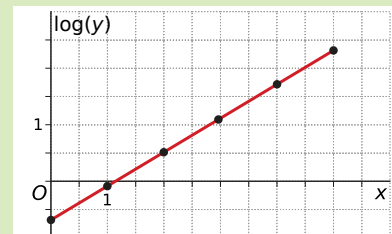
Hier zie je in drie verschillende grafieken hetzelfde verband tussen x en y .



grafiek 1



grafiek 2



grafiek 3

Figuur 2

In de eerste en ook in de tweede grafieken kun je de coördinaten van twee punten op de grafiek aflezen.

Bijvoorbeeld $(0; 0,2)$ en $(5; 200)$.

Het functievoorschrift van een exponentiële functie is: $y = a \cdot g^x$.

De groeifactor per jaar is $g = \left(\frac{200}{0,2}\right)^{\frac{1}{5}} = (1000)^{\frac{1}{5}} \approx 3,98$.

Hiermee is de waarde van a te berekenen: $0,2 = a \cdot 3,98^0$ geeft $a = 0,2$.

Het functievoorschrift wordt $y = 0,2 \cdot 3,98^x$.

In de derde grafiek kun je aflezen dat de lijn door $(0; -0,7)$ en $(5; 2,3)$ gaat.

Dit betekent dat $\log(y) = 0,6x - 0,7$.

Dit kun je schrijven als $10^{\log(y)} = 10^{0,6x-0,7}$ en $y = 10^{-0,7} \cdot (10^{0,6})^x \approx 0,2 \cdot 3,98^x$.

Opgave 6

De grafiek van een exponentiële functie gaat door (0,50) en (10,40).

- a Stel een bijbehorend functievoorschrift op.
- b Los algebraïsch op $y < 10$.

Opgave 7

Van een exponentiële functie is $\log(y)$ uitgezet tegen x .

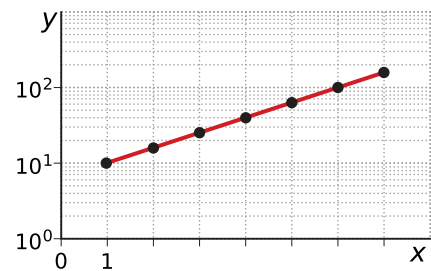
De grafiek is een rechte lijn door (0,5) en (6,17).

- a Stel een bijbehorend functievoorschrift op van de vorm $\log(y) = ax + b$.
- b Schrijf het verband tussen x en y in de vorm $y = c \cdot g^x$.

Opgave 8

Bekijk deze grafiek die het verband geeft tussen x en y .

Stel een bijpassende formule op.



Figuur 3

Opgave 9

Van een radioactieve bron wordt de straling gemeten. Bij $t = 0$ is de straling 30000 becquerel, terwijl een week later op $t = 7$ een straling wordt gemeten van 6000 becquerel.

Er is een exponentieel verband tussen t in dagen en de straling S in becquerel.

Bepaal het functievoorschrift.

Opgave 10

Bij een hoeveelheid H hoort de formule $H = 320 \cdot 10^{-0,12t}$.

Hierin is t de tijd in dagen.

Laat zien dat hier sprake is van exponentieel verval door de formule in de vorm $H = 320 \cdot g^t$ te schrijven. Bereken ook het vervalpercentage per dag.

Theorie

Om te onthouden

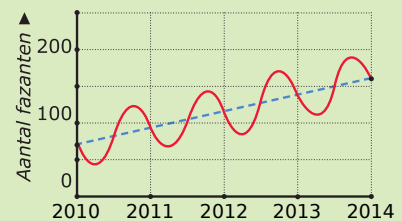
Interpoleren en extrapoleren

Waarden die niet in een tabel of grafiek voorkomen, kun je op meerdere manieren bepalen.

- Je kunt ze berekenen als je bij de tabel of de grafiek een formule kunt opstellen.
- **Grafisch interpoleren** is het schatten van waarden tussen twee gegeven waarden. Daarbij schets je een grafiek die zo goed mogelijk past bij de gegeven punten en lees je de gewenste waarde daaruit af.
- **Grafisch extrapoleren** is het schatten van waarden buiten het gebied met gegeven waarden. Daarbij schets je een grafiek die zo goed mogelijk past bij de gegeven punten, je trekt die volgens hetzelfde patroon door en je lees de gewenste waarde daaruit af.
- **Lineair interpoleren** is het schatten van waarden tussen twee gegeven waarden. Daarbij neem je aan dat twee meetpunten onderling verbonden zijn met een rechte lijn. Je neemt aan dat tussen die twee meetpunten de waarden steeds gelijkmatig toe- of afnemen. Zo kun je schatten door de richtingscoëfficiënt van die lijn te gebruiken.
- **Lineair extrapoleren** is het schatten van punten buiten het gebied met meetpunten. Daarbij neem je aan dat de laatste twee gegeven punten onderling verbonden zijn met een rechte lijn en dat die rechte lijn daarna in dezelfde richting doorloopt. Je neemt aan dat de waarden steeds gelijkmatig blijven toe- of afnemen. Zo kun je schatten door de richtingscoëfficiënt van die lijn te gebruiken.

Trendlijn

Bij het schatten van waarden van een **periodiek verband** moet je rekening houden met de periode. Uit de grafiek van het aantal fazanten blijkt duidelijk dat er steeds ongeveer in oktober een maximum zit, en ongeveer in maart een minimum. Je kunt het aantal fazanten in april 2013 niet schatten door het gemiddelde te nemen van het aantal fazanten in oktober 2012 en oktober 2013.



Figuur 4

In de grafiek over het aantal fazanten is sprake van een duidelijke **trend**. Het aantal fazanten in dit gebied neemt gestaag toe. De groene stippellijn is de **trendlijn**.

Door twee punten af te lezen kun je de formule van de trendlijn opstellen.

Hiermee kun je bijvoorbeeld het aantal fazanten in juni 2020 schatten indien deze trend zich voortzet.

Opgave 11

Bekijk de tabel.

x	134	180	210	b	240	255	261
y	65	a	46	40	31	26	c

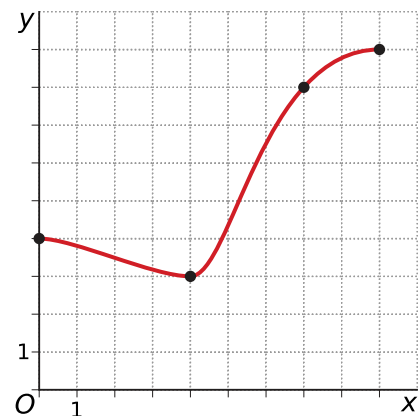
Tabel 1

- a** Bereken met lineair interpoleren de waarde van a .
- b** Bereken met lineair interpoleren de waarde van b .
- c** Bereken met lineair extrapoleren de waarde van c .

Opgave 12

Bekijk de grafiek.

- a** Bepaal met grafisch interpoleren de waarde die bij $x = 6$ hoort.
- b** Bepaal met lineair interpoleren de waarde die bij $x = 6$ hoort.
- c** Waarom is het bij zo'n grafiek zinloos om waarden te schatten met behulp van extrapoleren?

**Figuur 5****Opgave 13**

Bekijk de grafiek van het aantal fazanten F afhankelijk van de tijd t in jaren na 2010 in de. Neem aan dat de getekende trendlijn door $(0,70)$ en $(4,160)$ gaat.

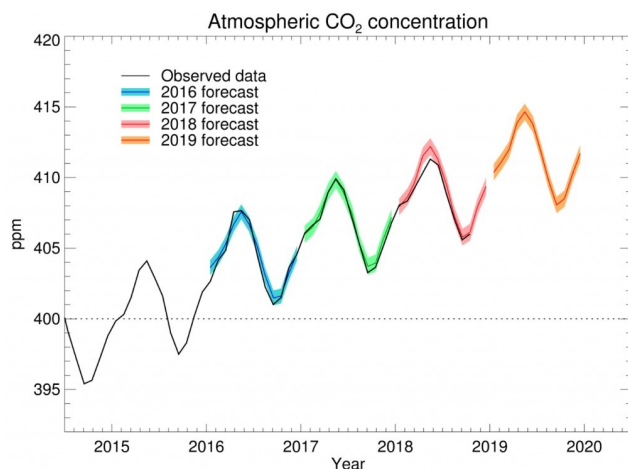
- a** Stel een formule op voor de getekende trendlijn.
- b** Schat met behulp van deze trendlijn het aantal fazanten in juni 2020 en in september 2020.

Opgave 14

Je ziet hier een grafiek van de voorspelde en de gemeten concentratie CO_2 in de aardatmosfeer. (ppm betekent 'parts per million'.)

Je ziet voorspellingen voor de jaren 2016, 2017, 2018 en 2019.

- a** Hoe zou je een voorspelling maken voor 2020?
- b** Bepaal met lineair extrapoleren de hoogste CO_2 -concentratie in 2021. Waarom kan dit met lineair extrapoleren?

**Figuur 6**

Verwerken

Opgave 15: Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van waardepunten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Op de website van Douwe Egberts stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

Voorbeeld:

Kop en schotel kosten samen € 5,00. Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,00 of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,00 bijbetalen.

Bij Douwe Egberts kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50. Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12000 waardepunten en wil zo min mogelijk euro's bijbetalen.

- a** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Op de website staat ook een puntencalculator. Deze calculator geeft per artikel aan hoeveel euro's je punten waard zijn. Je moet dan wel minstens 100 punten hebben. Je tikt het aantal punten in en op het scherm verschijnt de bijbehorende waarde in euro's voor één artikel. De calculator maakt gebruik van de volgende lineaire formule: $W = 1 + 0,005p$.

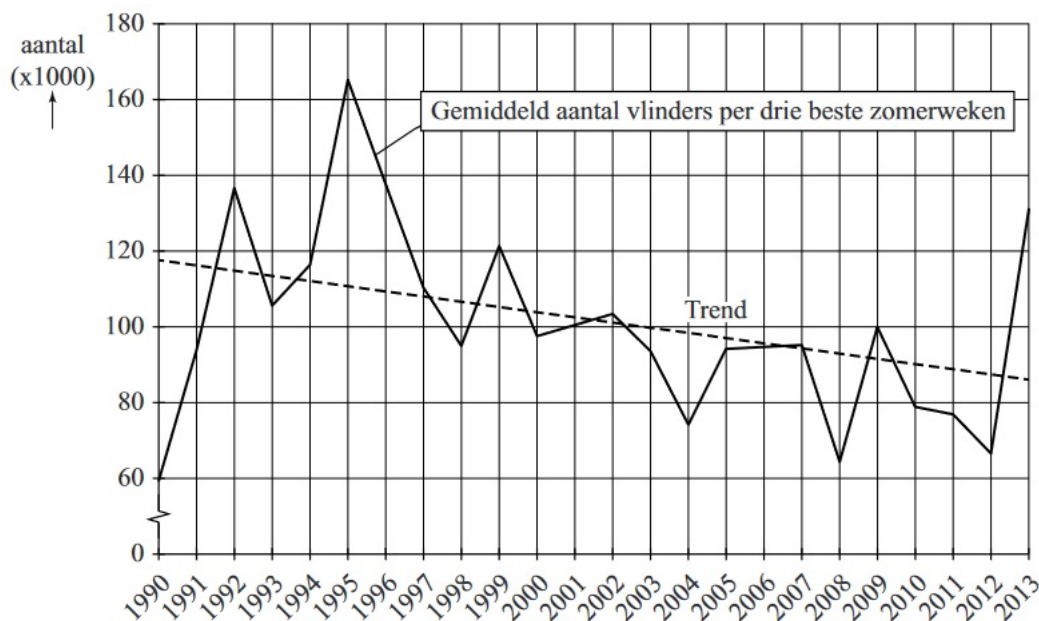
In deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

- b** Leid deze formule af uit bovenstaande voorwaarden.

bron: examen vwo wiskunde C in 2012, eerste tijdvak

Opgave 16: Vlinders

De zomer van 2013 was een topzomer voor vlinders. Toch gaat het aantal vlinders in Nederland volgens de Vlinderstichting langzaam achteruit. In dagblad Trouw stond in augustus 2013 deze grafiek.



Figuur 7

In de grafiek is te zien dat het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken (dit zijn de drie weken met de meeste vlinders) een dalende trend vertoont. Deze trend wordt weergegeven door de gestippelde lijn. In de grafiek is te zien dat 1995 zowel als 2013 een goed vlinderjaar was.

- a Onderzoek of in 1995 het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken 'in procenten' meer verschilde van het door de trendlijn voorspelde aantal dan in 2013.
- b Stel een formule op voor de trendlijn van figuur 1 met t in jaren en $t = 0$ in 1995. Bereken daarmee in welk jaar er volgens deze trendlijn voor het eerst minder dan gemiddeld 60000 vlinders in de drie beste zomerweken zullen zijn.

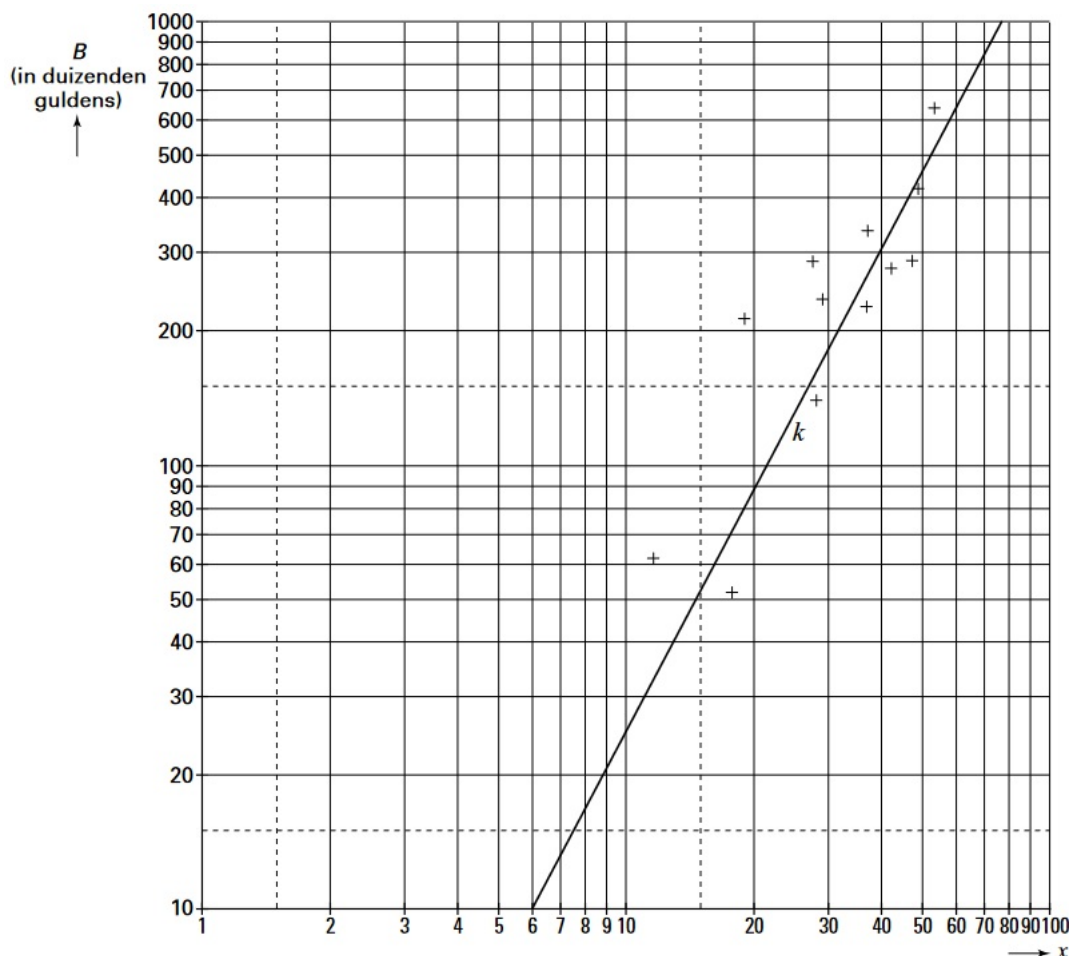
bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2016, tweede tijdvak

Opgave 17: Kavelkosten

Een gemeente wil uitbreiden door het bouwen van een nieuwe wijk. De plaats waar de nieuwe wijk gebouwd zal worden, is vastgesteld. Voordat de gemeente het uitbreidingsplan laat uitvoeren, doet de gemeente onderzoek naar de kosten van het plan. Er zijn twee soorten kosten voor de gemeente.

- De kosten van aankoop van de grond. In deze situatie bedragen de kosten 170000 euro per hectare (1 hectare = 10000 m²).
- De kosten van het bouwrijp maken. Dit betreft kosten voor de aanleg van bijvoorbeeld wegen, rioleringen en groenvoorzieningen. Deze kosten zijn hoger naarmate het aantal woningen dat per hectare gebouwd zal worden groter is.

In **figuur 8** zijn kosten van diverse vergelijkbare projecten door middel van plusjes weergegeven. Zowel langs de horizontale als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Hierbij is x het aantal woningen per hectare. B stelt voor de kosten per hectare van het bouwrijp maken in duizenden euro. Op grond van de plusjes in de figuur is een grafiek (de lijn k in de figuur) getekend die het verband tussen B en x weergeeft.



Figuur 8

Bepaal het machtsverband tussen x en B .

bron: examen wiskunde A1 in 2001, tweede tijdvak

Opgave 18: Ransuilen in Vaes

In 1977 troffen onderzoekers in Vaes een kleine groep ransuilen aan. Vanaf dat moment heeft men ze nauwgezet bestudeerd. Daaruit bleek onder andere dat de ransuilen vroeg in het voorjaar broeden en dat de jongen half juni al kunnen vliegen. Uit tellingen, die steeds eind juni plaatsvonden, bleek dat de populatie in omvang toenam. In de tabel staan enige resultaten.

aantal ransuilen per eind juni						
jaar	1977	1980	1982	1984	1987	1989
aantal	20	35	50	73	124	178

Tabel 2

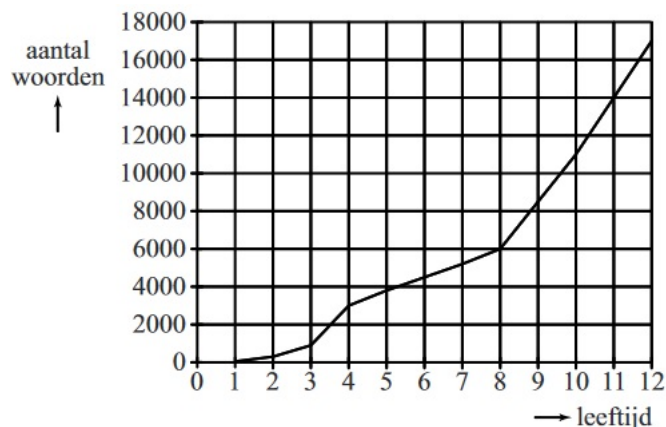
- Toon met behulp van logaritmisch papier aan dat het aantal ransuilen van 1977 tot en met 1989 vrijwel exponentieel groeide met een groeifactor van ongeveer 1,2 per jaar.
- Stel een formule op van het exponentieel verband tussen de tijd in jaren t en het aantal uilen a met $t = 0$ in 1977.

naar: examen vwo wiskunde A1 in 2002, tweede tijdvak

Opgave 19: Woordenschat

De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken. In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17000 woorden. In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.



Figuur 9 gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland

Uit **figuur 9** blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

- Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17000 op de 12e verjaardag. Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren: Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45000 tot 150000.

Bij sommige jongeren spreken we van een **hoge** woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$$W_h = 17000 \cdot 1,27^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

- b** Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een **lage** woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45000 op hun 21e verjaardag. Hiervoor geldt de volgende formule:

$$W_l = at + b$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van bovenstaande formules kan het verschil in woordenschat op de 18e verjaardag worden berekend tussen jongeren met een hoge woordenschat en jongeren met een lage woordenschat.

- c** Bereken dit verschil. Rond je antwoord af op duizendtallen.

In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt. Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule

$$W_h = 17000 \cdot 1,27^t \text{ (met } t = 0 \text{ op de 12e verjaardag).}$$

- d** Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

bron: examen vwo wiskunde C in 2012, tweede tijdvak

Inleiding



Figuur 1

Het getal van de gulden snede (weergegeven als φ) kom je in de loop van de geschiedenis veel tegen als een maat voor verhoudingen. Volgens velen verhouden de afmetingen van het ideale lichaam zich tot de gulden snede. Zo zou de middelste voortand zich verhouden tot de kleinere tand ernaast als $\varphi : 1$. En de afstand van de neus tot het oog zou zich met de gulden snede verhouden tot de breedte van het oog.

De gulden snede kun je op verschillende manieren berekenen. Eén van deze manieren is met behulp van de rij van Fibonacci. Deze rij wordt gegeven door $u(1) = 1$ en $u(2) = 1$, met de recursieformule: $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$.

Vervolgens kan de gulden snede worden benaderd door: $\varphi \approx \frac{u(n)}{u(n-1)}$.

Hoe groter de n voor de rij van Fibonacci, hoe beter je benadering.

Verkennen

Opgave V1

Bepaal een benadering voor de gulden snede. Gebruik het 20^e en 21^e getal uit de rij van Fibonacci.

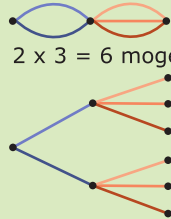
Bepaal ook de afwijking van deze benadering met: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Theorie

Om te onthouden

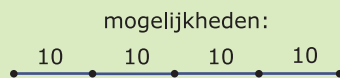
Systematisch tellen van mogelijkheden

Voor het systematisch tellen van mogelijkheden bestaan hulpmiddelen.

- Het **wegendiagram** is een schema (een graaf) waarin je de mogelijkheden weergeeft als verbindingslijnen tussen punten. Het kan ontstaan als compacte versie van een boomdiagram. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door de mogelijkheden om van punt naar punt te komen te vermenigvuldigen.  $2 \times 3 = 6$ mogelijkheden
- Het **boomdiagram** is een schema waarin je alle mogelijkheden weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Dit boomdiagram heeft twee lagen met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door het aantal takken in de laatste laag te tellen. Een boomdiagram kun je altijd maken, maar het kan erg groot zijn. **Figuur 2**
- Systematisch **uitschrijven**. Er zijn zes manieren om bij het gooien met vier geldstukken twee keer kop en twee keer munt te gooien: KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK, MMKK. Uitschrijven kan altijd, maar het kan veel tijd kosten en je vergeet snel mogelijkheden.
- Dit **rooster** laat het aantal even waarschijnlijke mogelijkheden bij het werpen met twee munten zien. Het totaal aantal mogelijkheden is het aantal vakjes met een uitkomst. Een rooster kun je maken als je maar twee verschillende series mogelijke uitkomsten hebt.

Machten en faculteiten

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen en herhaling is toegestaan en je let op de volgorde, dan heb je 10^4 mogelijkheden.



Figuur 3

Als herhaling niet is toegestaan, dan krijg je te maken met vermenigvuldiging van een rij getallen die steeds met één vermindert. De vermenigvuldiging van de aflopende rij opeenvolgende getallen n tot en met 1 wordt **n-faculteit** genoemd. Dit schrijf je als $n!$.

Dus $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Afgesproken is dat $0! = 1$. De rekenmachine heeft een functie om faculteiten te berekenen.

Permutaties en combinaties

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen en herhaling is niet toegestaan en je let op de volgorde, dan heb je $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ mogelijkheden.

Dit noem je het aantal **permutaties** van vier uit tien elementen. Het woord 'permutationem' (Latijn) betekent verwisseling.



Figuur 4

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen zonder herhaling waarvan hun onderlinge volgorde niet van belang is, heb je $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$ mogelijkheden.

De rekenmachine heeft een functie om permutaties te berekenen.

Dit heet het aantal **combinaties** van vier elementen uit tien elementen. Je noteert $\binom{10}{4}$ en je zegt: "tien boven vier".

De rekenmachine heeft een functie om combinaties te berekenen.

Opgave 1

Een merk e-bike is verkrijgbaar in de types A, B, C en D. Elk type is leverbaar met een accu 100 of accu 200. Verder kan een klant kiezen uit de kleuren wit, geel, rood, blauw, zwart of roodbruin.

- a Hoeveel soorten e-bikes kunnen er in totaal besteld worden?
- b Jannes wil niet het type B of D en hij wil per se een blauwe e-bike.
Uit hoeveel mogelijkheden kan Jannes dan nog kiezen?

Opgave 2

Met een zescijferige code kun je een toegangspoort openen. Bij deze code gaat het om een code van zes cijfers (0, 1, 2, ..., 9). Ga ervan uit dat voor elk cijfer waaruit de code bestaat, alle mogelijkheden zijn toegestaan.

- a Bereken hoeveel codes van zes cijfers er mogelijk zijn.
- b Als je weet dat in ieder geval het eerste en derde cijfer een oneven getal zijn, hoeveel codes zijn er dan mogelijk?
- c Je weet nog dat een blok van vier drieën heeft en twee andere verschillende cijfers heeft. Hoeveel codes zijn er zo mogelijk?

Opgave 3

Tijdens de finale van de 400 meter wisselslag op het Europees kampioenschap korte baan strijden acht zwemmers om drie medailles. De zwemmers zijn allemaal topatleten. Veronderstel dat alle denkbare volgordes van binnenkomst mogelijk zijn. Op hoeveel manieren kunnen de medailles worden verdeeld? En hoeveel uitslagen zijn er in totaal mogelijk?

Opgave 4

Iemand werpt negen keer met een munt en let op het aantal keren dat hij "kop" gooit.

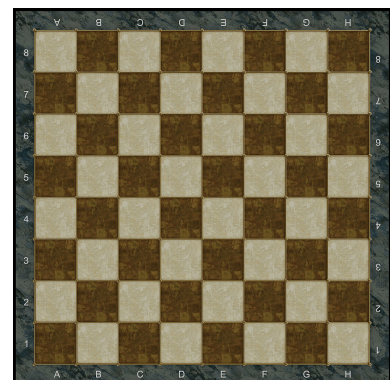
- a Op hoeveel manieren kan zij drie keer "kop" gooien? En hoe teken je dit in een "ja/nee"-rooster.
- b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
- c Op hoeveel manieren kan zij minstens zeven keer "kop" gooien?
- d Op hoeveel manieren kan zij hoogstens zeven keer "kop" gooien?

Opgave 5

Bekijk het schaakbord. De startpositie van de koning is E1.

De koning verplaatst zich altijd 1 vakje (links, rechts, vooruit, achteruit of schuin).

Op hoeveel manieren kan de koning op een schaakbord vanuit zijn startpositie op de eerste rij in 7 zetten de achterste rij bereiken?



Figuur 5

Theorie

Om te onthouden

Rijen beschrijven

Een **rij** getallen u_n met regelmaat kun je op twee manieren beschrijven:

- Een **recursieformule** is een formule waarmee je elke term berekent uit zijn voorgaande (of uit meerdere voorgaande). Je spreekt dan van een **recursief** gegeven rij: $u_n = f(u_{n-1})$ met $n = (0,)1,2,3,\dots$
- Een **directe formule** is een formule waarmee je elke term berekent door de juiste waarde van n in te vullen: $u_n = f(n)$ met $n = (0,)1,2,3,\dots$

Opmerking: In plaats van u_n wordt ook vaak $u(n)$ gebruikt, etc.

Rijen kun je op je grafische rekenmachine in beeld brengen met een speciale instelling waarin je de recursie moet gebruiken. Maar je kunt ze ook invoeren als functie als je de directe formule hebt.

Rekenkundige rijen

Bij een rekenkundige rij ontstaat elke term door bij de vorige term een vaste toename a op te tellen.

- recursieformule: $u_n = u_{n-1} + a$ met $u_0 = b$ en $n = 0,1,2,3,\dots$
recursieformule: $u_n = u_{n-1} + a$ met $u_1 = b$ en $n = 1,2,3,\dots$
- directe formule: $u_n = b + a \cdot n$ met $n = 0,1,2,3,\dots$
directe formule: $u_n = b + a \cdot (n - 1)$ met $n = 1,2,3,\dots$

Meetkundige rijen

Bij een meetkundige rij ontstaat elke term door bij de vorige term een vaste factor r (de **reden**) te vermenigvuldigen.

- recursieformule: $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = b$ en $n = 0,1,2,3,\dots$
recursieformule: $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = b$ en $n = 1,2,3,\dots$
- directe formule: $u_n = b \cdot r^n$ met $n = 0,1,2,3,\dots$
directe formule: $u_n = b \cdot r^{n-1}$ met $n = 1,2,3,\dots$

Opgave 6

Bekijk de rij $u : 3, 9, 15, 21, \dots$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a Wat voor soort rij betreft dit? Bereken u_{10}
- b Beschrijf de rij met een recursieformule en een directe formule.

Opgave 7

Bekijk de rij $u : 3, 12, 48, 192, \dots$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a Wat voor soort rij betreft dit? Bereken u_{10}
- b Beschrijf de rij met een recursieformule en een directe formule.

Opgave 8

Gegeven is de rij u_n door de recursieformule $u_n = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_{n-1}}$ met $u_0 = 2$.

Bereken u_3 . Rond af op één decimaal.

Opgave 9

Langs een rivier in de Betuwe leven muskusratten. Zonder invloeden van buitenaf zou de hoeveelheid muskusratten jaarlijks verviervoudigen. Op 1 januari 2020 zijn er 50 muskusratten. Stel dat er geen invloeden zijn van buitenaf.

- a Stel een recursieformule en een directe formule op voor de hoeveelheid muskusratten per jaar m_t , met $t = 0$ op 1 januari 2020.
- b Als er meer dan 50000 muskusratten zijn, is er sprake van een rattenplaag. Aan het begin van welk jaar is er zo'n plaag? Hoeveel muskusratten leven er dan langs de rivier?

Opgave 10

Beatrice en Achmed huren ieder een appartement. In 2020 moesten ze daarvoor allebei € 7350 aan huur betalen. De huur voor Beatrice wordt jaarlijks verhoogd met € 300, die van Achmed wordt jaarlijks verhoogd met 2,75%.

- a Stel directe formules op voor de huur b_n van Beatrice en a_n van Achmed n jaar na 2020 met $n = 0, 1, 2, \dots$
- b Wie betaalt er in 2029 de meeste huur?
- c Stel dat ze beiden 20 jaar in hun appartement blijven wonen en de huurprijzen zich zo blijven ontwikkelen? Wie heeft dan aan het eind van deze periode het meeste aan huur in totaal betaald?

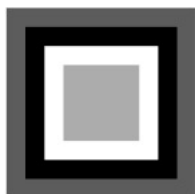
Verwerken

Opgave 11: Vierkanten

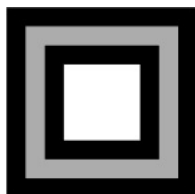
Op de foto zie je een kunstwerk van Margaret Kepner, dat is opgebouwd uit 25 bij 25 vierkanten.

Elk van deze vierkanten bestaat uit een klein vierkant en drie vierkante 'randen' eromheen.

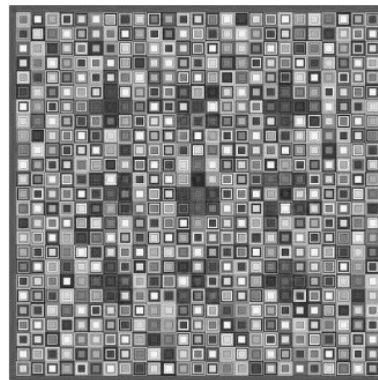
Elk van deze vier onderdelen kan wit, lichtgrijs, middelgrijs, donkergrijs of zwart zijn.



Figuur 7



Figuur 8



Figuur 6

In **figuren 7** en **8** zie je hier voorbeelden van. De vier onderdelen van het vierkant van **figuur 7** zijn van buiten naar binnen respectievelijk donkergrijs, zwart, wit en lichtgrijs. Eenzelfde kleur kan ook meerdere keren voorkomen (zie **figuur 8**). En verder voor de duidelijkheid: twee onderdelen naast elkaar mogen ook dezelfde kleur hebben.

- a** Bereken hoeveel verschillende vierkanten er op deze manier gemaakt kunnen worden.

De vierkanten stellen getallen voor. De kleuren corresponderen met cijfers: wit = 0, lichtgrijs = 1, middelgrijs = 2, donkergrijs = 3 en zwart = 4.

Het cijfer van de buitenste rand moet vermenigvuldigd worden met 125, dat van de rand daarbinnen met 25, dat van de binnenste rand met 5 en dat van het binnenste vierkant met 1. In **figuur 7** is dus het getal $3 \times 125 + 4 \times 25 + 0 \times 5 + 1 \times 1 = 476$ weergegeven.

Figuur 8 bevat behalve de kleuren zwart en wit ook nog de kleur lichtgrijs.

- b** Bereken op dezelfde manier welk getal in **figuur 8** afgebeeld is.

In het kunstwerk komen alle getallen van 0 tot en met 624 precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat, als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het magische getal. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal er uit. In **figuur 9** zie je hiervan een voorbeeld voor een kunstwerk van 3 bij 3 getallen: het magische getal is hier 12.

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Figuur 9

Het magische getal van het kunstwerk kan men berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.

Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:

$$\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

- c** Bereken met behulp van deze formule het magische getal van het grote kunstwerk.

- d** In het algemeen geldt voor een kunstwerk van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal:

$$\text{magisch getal} = 0,5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door te bedenken dat het magische getal gelijk is aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.

Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat de formule voor het magische getal juist is. Gebruik daarbij voor het berekenen van de som van de getallen de formule:

$$\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

naar: pilotexamen vwo wiskunde C in 2013, eerste tijdvak

Opgave 12: Tandpasta

Drogisterijketen Haarsma verkoopt 'Hagelwit' tandpasta. Aan het eind van elke maand koopt Haarsma deze tandpasta in bij de groothandel. Haarsma moet daarvoor elke maand een schatting maken van het aantal tubes dat hij de volgende maand zal verkopen.

In de bedrijfskunde worden verschillende methodes gebruikt om zo'n schatting te maken. Een van die methodes komt in deze opgave aan de orde.

In een bepaald jaar heeft Haarsma in januari 5200 tubes verkocht en in februari 4000. Een eenvoudig model om de verkoop voor de komende maanden te schatten is het volgende: neem het gemiddelde van de verkoop in de twee voorafgaande maanden. In een formule:

$$V_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot V_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot V_n$$

Hierbij is V_n het aantal verkochte tubes tandpasta in maand n waarbij $n = 1$ overeenkomt met januari. Volgens dit model verwacht Haarsma in maart 4600 tubes te verkopen.

Als we aannemen dat de schatting steeds de werkelijke verkoop in die maand is, kunnen we met dit model ook de verkoop van de volgende maanden uitrekenen. Dat betekent hier dat er in maart inderdaad 4600 tubes tandpasta verkocht worden. En met de getallen 4000 van februari en 4600 van maart kun je met de formule weer de verkoop van april berekenen, enzovoort.

- a** Bereken het aantal tubes tandpasta dat volgens dit model in juni wordt verkocht.

Soms besluit men de laatste maand zwaarder te laten meetellen dan de voorlaatste maand. Bij de schatting voor de maand maart telt men bijvoorbeeld februari voor 60% mee en januari voor 40%. De formule wordt dan:

$$V_{n+2} = 0,6V_{n+1} + 0,4V_n \text{ met } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000$$

Als met dit model een groot aantal maanden wordt doorgerekend, komen de waarden van V steeds dichterbij de evenwichtswaarde 4343 te liggen. Dat betekent dat na een aantal maanden de schattingen minder dan 1% van 4343 zullen afwijken.

- b** Bereken in welke maand de schatting voor het eerst minder dan 1% van 4343 afwijkt.

Een algemene vorm van het model ziet er als volgt uit:

$$V_{n+2} = a \cdot V_{n+1} + (1 - a) \cdot V_n \text{ en } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000$$

Hierbij is a een getal tussen 0 en 1.

Wanneer we $a = 0,5$ kiezen, krijgen we het model uit een eerdere opgave.

Als $a = 0,6$ hebben we het model van de vorige opgave.

De schatting van de verkoop voor de maanden na februari hangt nu af van de waarde van a . Zo kunnen we bijvoorbeeld V_4 , de schatting voor april, uitdrukken in a . Dat levert de volgende formule op: $V_4 = -1200a^2 + 1200a + 4000$.

- c** Laat zien hoe deze formule uit de gegevens kan worden afgeleid.

bron: examen vwo wiskunde A1 in 2008, tweede tijdvak

Opgave 13: Zaadjes

Dieren blijken een formidabel geheugen te hebben voor wat betreft hun voedselvoorziening. Zo is er onderzoek gedaan naar de glanskopmees, een vogeltje dat zich voornamelijk voedt met zaadjes. Wanneer zo'n vogeltje ergens wat zaad ontdekt, gaat het de zaadjes stuk voor stuk verstoppen in de omgeving, om ze in de loop van de volgende uren of dagen rustig op te kunnen eten.

Om na te gaan hoe goed het geheugen van deze vogeltjes is, gebruikten onderzoekers een kooi met een aantal gladde takken. De onderzoekers hadden in die takken in totaal 24 gaten geboord, elk precies groot genoeg voor één zaadje. Voor elk gat was een lapje gehangen, dat opgetild moest worden om te zien of het gat een zaadje bevatte.

Een glanskopmees werd in de kooi gelaten met een bakje zaad. Het vogeltje verstopte in 10 gaten een zaadje.

- a** Op hoeveel verschillende manieren kan het vogeltje deze tien gaten kiezen?

Het vogeltje en het bakje werden daarna uit de kooi gehaald. Enige uren later werd het vogeltje weer in de kooi teruggezet, waarna het op zoek ging naar de zaadjes. De onderzoekers vroegen zich af hoeveel verschillende gaten het vogeltje zou inspecteren tot het vier van de tien zaadjes heeft gevonden.

- b** Welke getallen zijn mogelijk als antwoord op de vraag van de onderzoekers?

bron: examen vwo wiskunde A1 in 1998, tweede tijdvak

Opgave 14: Wereldbevolking

Op dit moment leven er op aarde ruim 7 miljard mensen. De groei van de wereldbevolking wordt regelmatig onderzocht.

In 1650 waren er ongeveer 500 miljoen mensen op aarde en in 1850 ongeveer 1,3 miljard. In de periode 1850-2000 steeg de wereldbevolking tot 6,4 miljard.

Men veronderstelt dat in de toekomst de groei van de wereldbevolking zal afnemen.

Iemand heeft een recursief model opgesteld voor de ontwikkeling van de wereldbevolking:

$$N(t+1) = 1,02 \cdot N(t) - 0,0015 \cdot (N(t))^2 \text{ met } N(0) = 7,3$$

Hierin is t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met 31 december in het jaar 2015, en N de wereldbevolking in miljarden.

- a** Onderzoek in welk jaar de wereldbevolking volgens dit model voor het eerst meer dan 7,6 miljard zal zijn.
- b** De ontwikkeling van de wereldbevolking kan ook met een directe formule worden gegeven. Een formule die in de buurt komt van het model dat beschreven is door het recursieve model, is:

$$D(t) = \frac{13,33}{1+0,826 \cdot 0,98^t}$$

Hierin is t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 2015, en D de wereldbevolking in miljarden. Volgens dit model nadert de wereldbevolking op den duur een grenswaarde.

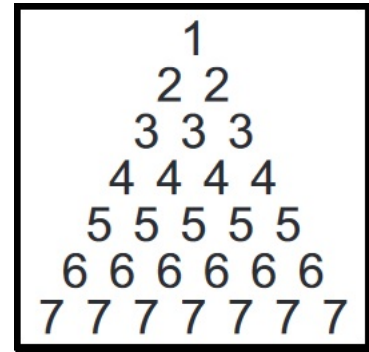
Beredeneer aan de hand van de formule, hoe groot deze grenswaarde is.

naar: pilotexamen wiskunde C in 2016, eerste tijdvak

Opgave 15: Tricoda

Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot speelgoed van het jaar 2010. Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt (zie de figuur).

Elke speler krijgt 3 stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De 3 stenen vormen een cijfertrio. De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet. Bekijk de tekening.



Figuur 10



Figuur 11

Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan.

Bereken het aantal mogelijke verschillende cijfertrio's dat een speler bij de start van het spel kan krijgen.

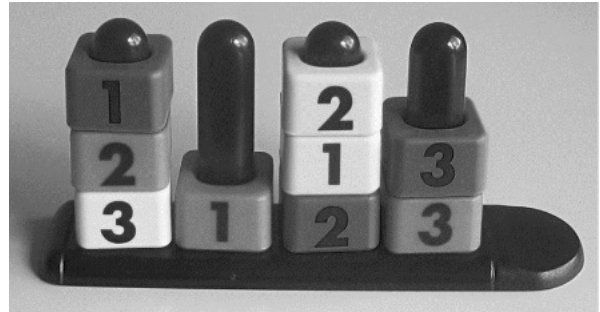
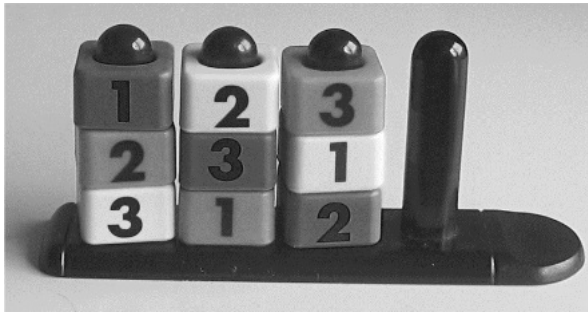
bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2013, tweede tijdvak

Opgave 16: Number Rumba

Het spel Number Rumba kan gespeeld worden met één of twee spelers. Iedere speler heeft een standaard voor zich met vier staven. Verder heeft elke speler 9 verschillende blokjes: 3 blauwe, 3 rode en 3 gele, waarbij de blokjes van elke kleur genummerd zijn van 1 tot en met 3.

Het doel van het spel is om de opstelling van de blokjes op de standaard vanuit een beginopstelling zo snel mogelijk te veranderen in de opstelling die op een opdrachtkaart staat. Hierbij wordt er steeds één blokje verplaatst en mogen niet meer dan drie blokjes tegelijk op een staaf staan.

Bekijk de twee figuren met de twee mogelijke opstellingen tijdens het spel.



Figuur 12

Tijdens het spel kan iedere mogelijke opstelling met de negen blokjes op de vier staven ontstaan. Onderzoek hoeveel opstellingen er in dit spel in totaal mogelijk zijn met de negen blokjes op de vier staven.

naar: pilotexamen vwo wiskunde C in 2015, eerste tijdvak

5 Logica en meetkunde

Inleiding



Figuur 1

Waarheidstabellen worden veel in wiskundige situaties gebruikt, maar deze kunnen ook worden gebruikt in de natuurkunde. Bijvoorbeeld in systeemborden; deze worden voornamelijk gebruikt om simpele elektriciteitscircuits te creëren. Systeemborden berusten op het principe van één zender, een poort en één ontvanger. De zender verzendt een signaal. De poort kan een signaal doorlaten of tegenhouden. De ontvanger ontvangt het signaal dat vanaf de zender is gekomen via de poort. Er zijn twee signalen die kunnen worden uitgezonden, namelijk een 1 of 0.

Verkennen

Opgave V1

Deze systeemborden kunnen in allerlei situaties worden gebruikt; in een fabriek of bij een lichtaansluiting, maar ook in bijvoorbeeld een spelshow. Hierbij kunnen de zoemers, waar deelnemers van de spelshow op drukken, werkend gemaakt worden door middel van een systeembord. We kijken naar de volgende situatie.

In een spelshow spelen twee drietallen tegen elkaar. Er worden telkens vragen gesteld, waarna degene die het antwoord op de vraag weet, op een knop moet drukken. Elk lid van de drietallen heeft een eigen knop. Pas als er twee personen uit hetzelfde drietal hebben gedrukt, gaat er een zoemer af. Er zijn drie knoppen, A, B en C, die ieder apart signaal 0 uitzenden, als de knop niet wordt ingedrukt, en signaal 1, als de knop wordt ingedrukt. Deze signalen van alle drie de knoppen, komen uit in de poort, die de signalen verandert in een signaal dat naar de zoemer wordt gestuurd. Maak een waarheidstabel van deze situatie. Bedenk hierbij bij welk signaal de zoemer afgaat en wanneer de poort welk signaal doorlaat.

Theorie

Om te onthouden

Beweringen en samengestelde beweringen

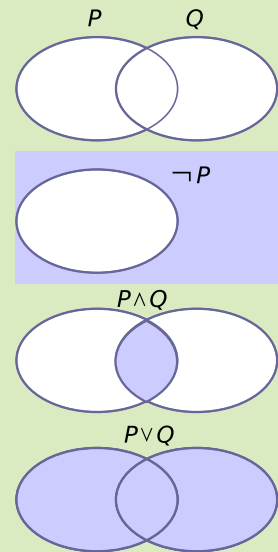
Een **bewering** (of propositie) P is een uitspraak die waar of onwaar is.

Een bewering die waar is, krijgt **waarheidswaarde** 1, een bewering die onwaar is krijgt waarheidswaarde 0.

Je kunt beweringen samenstellen:

- de **ontkenning** (of negatie) van de bewering is $\neg P$ (spreek uit "niet- P ") en is waar als P niet waar is en onwaar als P waar is;
- de **conjunctie** $P \wedge Q$ (spreek uit " P en Q ") is alleen waar als P en Q beide waar zijn;
- de **disjunctie** $P \vee Q$ (spreek uit " P en/of Q ") is alleen onwaar als P en Q beide onwaar zijn;
- de **implicatie** $P \Rightarrow Q$ (spreek uit "als P , dan Q ") is alleen onwaar als P waar is en Q onwaar.

Om te bepalen of een samengestelde bewering waar of onwaar is, kun je een **venndiagram** gebruiken. Een **waarheidstabel** geeft een overzicht van de waarheidswaarden van (samengestelde) beweringen.



Figuur 2

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

Tabel 1

Twee (samengestelde) beweringen heten **logisch gelijkwaardig** als de kolommen in de waarheidstabel identiek zijn.

Een bewering P is een **voldoende voorwaarde** voor Q als geldt $P \Rightarrow Q$.

Een bewering R is een **nodige voorwaarde** voor Q als geldt $Q \Rightarrow R$.

Conclusies trekken

Er zijn twee redeneervormen die tot de juiste **hieruit-volgt-conclusies** leiden:

- Uit $A \Rightarrow B$ is waar en A is waar volgt B is waar.
Deze redeneervorm heet **modus ponens**
- Uit $A \Rightarrow B$ is waar en B is onwaar volgt A is onwaar.
Deze redeneervorm heet **modus tollens**

Met **voorbeelden** kun je iemand proberen te overtuigen dat iets waar is. Maar voorbeelden vormen nog geen wiskundig bewijs. Je hebt aan één **tegenvoorbeeld** genoeg om de onwaarheid aan te tonen.

Altijd waar of nooit waar

Een **tautologie** is een samengestelde bewering die altijd waar is.

Een **contradictie** (of tegenspraak) is een samengestelde bewering die nooit waar is.

Een **paradox** is een bewering leidt tot een tegenstrijdigheid of een logisch onacceptabele conclusie.

Een redenering in de Nederlandse taal is logisch correct als alle elementaire beweringen waarheidswaarde 1 hebben en de conclusie ook waarheidswaarde 1 heeft. In de logica kunnen ook redeneringen die beweringen bevatten die waarheidswaarde 0 of 1 hebben, altijd waarheidswaarde 1 hebben. De redenering is dan een tautologie.

Opgave 1

Splits de uitspraken in twee enkelvoudige beweringen P en Q .

Verbind P en Q met het juiste teken: $\wedge$ of $\vee$.

- a 'Evert is goed in Frans en Duits.'
- b 'Rens mag mee naar het strand als hij het gras maait of de heg snoeit.'

Opgave 2

Gegeven de twee beweringen P : 'Hij is sportief.' en Q : 'Hij is dyslectisch.'

- a Laat met een waarheidstabel zien wanneer de bewering $P \wedge Q$ waar is.
- b Laat met een waarheidstabel zien wanneer de bewering $P \wedge \neg Q$ waar is.
- c Laat met een waarheidstabel zien wanneer de bewering $P \vee \neg Q$ waar is.

Opgave 3

Gegeven is de bewering: 'Als je geen onvoldoendes haalt, dan krijg je een scooter.'

- a Noteer deze samengestelde bewering als implicatie.
- b Wat is er aan de hand als de bewering waar is en je krijgt geen scooter?
- c Leg uit waarom $A \Rightarrow B$ onwaar is als A waar is en B onwaar.
- d Ga met een waarheidstabel na of $A \Rightarrow B$ logisch gelijkwaardig is met $\neg A \vee B$.

Opgave 4

Geef van de beweringen aan of het een tautologie, een contradictie of geen van beide is.

- a Er valt neerslag en het is droog.
- b Er valt neerslag of het is droog.
- c Ik heb een voldoende gehaald en zij hebben onvoldoendes gehaald.
- d Ik heb een voldoende gehaald of ik heb een onvoldoende gehaald.

Opgave 5

Lees het volgende stuk uit de krant:

Slechts 11% van de Nederlanders reist met de bus of trein. Dat is de helft van het gemiddelde in Europa. Logisch! Voor de prijs van een enkeltje Lelystad-Weesp (€ 6,50) maak je in een gebied van 40 km rondom Rome, 24 uur lang gebruik van al het openbaar vervoer (met uitzondering van vliegtuigen en taxi's). En voor die prijs kun je met je gezin de hele dag op een gezinskaart rondtoeren in Dresden. Ik snap het wel.

- a Welke redeneerstappen zitten er in dit krantenartikel?
- b De redenering is strikt genomen niet correct, want onvolledig. Maar de welwillende lezer begrijpt best wat de schrijver bedoelt. Welke redeneerstap ontbreekt eigenlijk?

Opgave 6

Een veelgehoorde redenering is: "90% van de longkankerpatiënten heeft gerookt, dus als je rookt, dan is de kans op longkanker 90%."

Laat zien, dat deze redenering niet correct is.

Theorie

Om te onthouden

Omtrek, oppervlakte, inhoud

De **omtrek** van een vlakke figuur is de som van de lengtes van de zijden en/of gebogen randen. Voor het berekenen van lengtes moet je soms de **stelling van Pythagoras** gebruiken.

De **oppervlakte** van een vlakke figuur is de grootte van het vlak van de figuur. Van een ruimtelijke figuur is de oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van de uitslag ervan.

De **inhoud** van een ruimtelijke figuur is de hoeveelheid die erin past.

Bij berekeningen gebruik je de volgende formules.

vlakke figuur	omtrek	oppervlakte
rechthoeklengte l , breedte b	$2 \cdot l + 2 \cdot b$	$l \cdot b$
driehoek	$a + b + c$	$\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$
cirkel	$\pi \cdot d$ of $2\pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$
ruimtelijke figuur	oppervlakte	inhoud
prisma, balk, cilinder	oppervlakte uitslag	$G \cdot h$
piramide, kegel	oppervlakte uitslag	$\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Tabel 2

Vergroten en verkleinen

Twee figuren zijn **gelijkvormig** als de ene figuur een vergroting of verkleining van de andere is.

Voor veelhoeken betekent dit dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn en de corresponderende zijden een gelijke **verhouding** hebben.

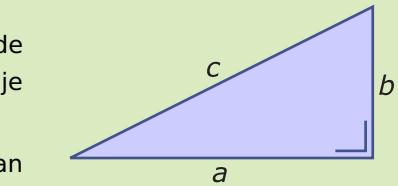
Wanneer van een figuur alle lengtes met eenzelfde factor k worden vermenigvuldigd, dan geldt:

- de **lengtevergrotingsfactor** is k ;
- de **oppervlaktevergrotingsfactor** is k^2 ;
- de **inhoudsvergrotingsfactor** is k^3 .

De **gouden snede** is de verdeling van een lijnstuk in stukken van lengte a en het kleinste lengte met b waarbij:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

De verhouding $\frac{a}{b} = \varphi \approx 1,618$ heet het **gouden getal** genoemd.



Figuur 3 Stelling van Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\text{dus } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{en } a = \sqrt{c^2 - b^2}$$



Figuur 4

Symmetrie

Soms zijn figuren **symmetrisch**. Er zijn verschillende vormen van **symmetrie**:

- lijnsymmetrie of spiegelsymmetrie met een symmetrieas (2D) of symmetrievlak (3D);
- rotatiesymmetrie of draaisymmetrie met een centrum (2D) of een draaias (3D) en een draaihoek;
- puntsymmetrie met een centrum (2D en 3D);
- schuifsymmetrie (2D en 3D).

Opgave 7

Je ziet hier de grote piramide die dient als hoofdingang van het museum het Louvre in Parijs. Deze grote piramide is ongeveer 35 m lang en 35 m breed en heeft een hoogte van ongeveer 21 m. Het grondvlak is een vierkant.



Figuur 5 bron: Wikipedia

- a Bereken de lengte van elk van de vier schuin opstaande ribben van deze piramide in dm nauwkeurig.
- b Bereken de inhoud van de ruimte onder deze piramide.

Neem aan dat de staalconstructie die nodig is om alle glas op zijn plek te houden geen afmetingen heeft en dat de dikte van het glas 8 mm is. Houd ook geen rekening met de openingen die nodig zijn voor de ingang van de piramide. Het soortelijke gewicht van glas is 2500 gram per mm dikte per m² glas.

- c Bereken het gewicht aan glas dat voor deze piramide is gebruikt in kg nauwkeurig.
De drie kleinere piramides zijn even groot en gelijkvormig met de grote piramide. Hun hoogte is éénvijfde deel van de hoogte van de grote piramide. Het glas dat ervoor is gebruikt is even dik als dat van de grote piramide.
- d Bereken het gewicht aan glas dat voor elk van deze kleine piramides is gebruikt in kg nauwkeurig.

Opgave 8

Bekijk de grote piramide die dient als hoofdingang van het museum het Louvre in Parijs uit de vorige opgave. Houd weer geen rekening met de ingang.

- a Hoeveel symmetrievlakken heeft deze piramide?
- b Is deze piramide draaisymmetrisch?
- c Is deze piramide puntsymmetrisch?

Op het oppervlak van de grote piramide zie je een patroon van ruiten, behalve aan de onderrand. Neem aan dat je dit patroon van ruiten naar alle kanten oneindig zou kunnen voortzetten.

- d Welke vormen van symmetrie kom je dan tegen in dit patroon?

Opgave 9

Je ziet hier een watertoren. Neem aan dat het onderste gedeelte een zuiver cilindervorm heeft met een diameter van 12 m en een hoogte van 23 m. Daar bovenop zit een kegel met een hoogte van 4 m.

- a Bereken het totale volume van dit gebouw in m³ nauwkeurig.
- b Bereken de oppervlakte aan dakbedekking in m² nauwkeurig. De oppervlakte van een kegelmantel is $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$ met r de straal en h de hoogte.

Neem aan dat de buitenste laag van de muren van deze toren overal bestaat uit metselstenen met een dikte van 10 cm, waarvan het zichtbare deel een breedte van 21 cm en een hoogte van 5 cm heeft.

- c Hoeveel metselstenen waren er ongeveer nodig om deze toren te bouwen.



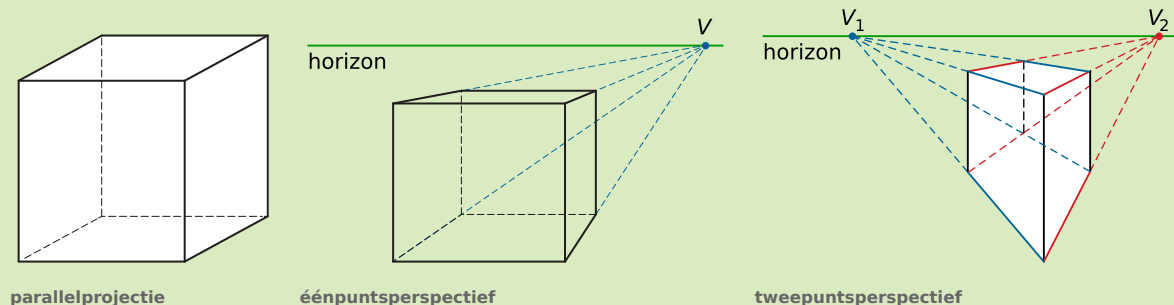
Figuur 6

Theorie

Om te onthouden

Perspectief

Bij een **parallelprojectie** zijn de evenwijdige lijnen in de aanzichten van de 3D-figuur ook evenwijdig. In werkelijkheid is dit niet hoe je ruimtelijke figuren waarneemt.



Figuur 7

Bij waarneming met een oog of lens zijn de kijklijnen daarom niet evenwijdig: Ze lopen immers naar het oog of de lens. Evenwijdige lijnen lopen naar een verdwijnpunt toe. Objecten die verder weg zijn worden kleiner afgebeeld. Deze manier van afbeelden heet **perspectief**.

De vlak waarin de afbeelding ontstaat heet het **tafereel**.

Het punt waar de kijklijnen bij elkaar komen heet het **oog**.

Het snijpunt van de lijn door het oog loodrecht op het tafereel heet het **oogpunt**.

Tekeningen in perspectief hebben de volgende eigenschappen:

- Lijnen die in 3D evenwijdig zijn, snijden elkaar in 2D in één punt, hun **verdwijnpunt** of **vluchtpunt**, behalve als de in 3D evenwijdige lijnen evenwijdig zijn aan het tafereel, dan zijn ze in 2D ook evenwijdig.
- Verdwijnpunten van lijnen die horizontaal zijn in 3D, liggen in 2D op één lijn, de **horizon**, behalve als ze evenwijdig lopen met het tafereel.
- Het **oogpunt** ligt op de horizon.

Éénpuntperspectief

Is er één verdwijnpunt, dan spreek je van **éénpuntperspectief**.

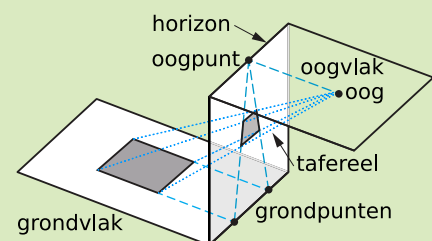
Je ziet in de figuur hoe het tekenen in éénpuntperspectief er uit ziet.

Tweepuntperspectief

Zijn er twee verdwijnpunten, dan spreek je van **tweepuntperspectief** en ga je er van uit dat verticale lijnen loodrecht op het grondvlak staan en dus evenwijdig zijn aan het tafereel. De andere twee richtingen echter niet. Er zijn daarom in eerste instantie twee verdwijnpunten (vluchtpunten). Elke groep evenwijdige lijnen heeft in tweepuntperspectief echter een eigen verdwijnpunt als ze niet evenwijdig zijn met het tafereel.

In tweepuntperspectief is het oogpunt alleen te bepalen als je een grondlijn evenwijdig aan het tafereel hebt met daarop een andere grondlijn die er in werkelijkheid loodrecht op staat. Het snijpunt van die tweede grondlijn met de horizon is het oogpunt.

In tweepuntperspectief bepaal je middens van zijden van een parallellogram door het snijpunt van de diagonalen te verbinden met de verdwijnpunten van de zijden.



Figuur 8

Opgave 10

Bekijk de foto van een roltrap. De foto staat ook op het [werkblad](#).

- a** Is de foto in eenpuntperspectief of tweepuntperspectief gemaakt?
- b** Vind de plaats van het oogpunt en teken de horizon.
- c** De traptreden van de roltrap zijn 20 cm hoog.
Vanaf welke hoogte is de foto ongeveer genomen?



Figuur 9

Opgave 11

Bekijk de foto genomen op de Bund in Shanghai. De foto staat ook op het [werkblad](#). De tegels op de grond zijn vierkant.

Teken de horizon en bepaal de plaats van het oogpunt.

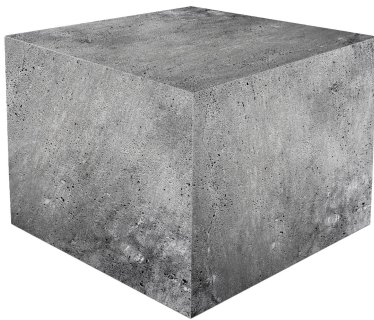


Figuur 10

Opgave 12

Het in tweepuntperspectief getekende betonblok bestaat in werkelijkheid uit acht gelijkvormige kleinere balkjes. Deze figuur staat ook op het [werkblad](#).

Maak de balkjes aan de buitenkant van de balk zichtbaar. Licht je antwoord toe.



Figuur 11

Opgave 13

Bekijk het begin van een tweepuntperspectieftekening van een balk op het [werkblad](#).

Maak de tekening van de balk af.

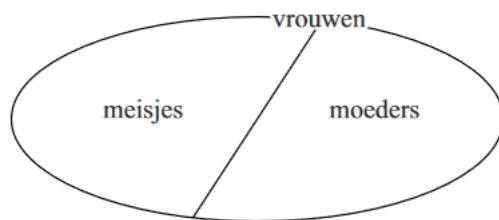
Verwerken

Opgave 14: Schaatskunst

In deze opgave bekijken we de discussie tussen de meisjes. Daarvoor modelleren we deze discussie. Er zijn twee vriendinnen, vriendin 1 en vriendin 2, die de schrijfster van het artikel tegenkomen.

- Citaat 1: vriendin 1 vraagt aan de schrijfster: "Ben jij een moeder?"
- Citaat 2: vriendin 2 zegt: "Ze is een moeder omdat ze geen bochtjes kan."
- Citaat 3: vriendin 1 zegt: "Dat kun je pas zeggen als je alle moeders kent en wanneer alle moeders geen bochtjes kunnen."
- Citaat 4: vriendin 1 zegt bovendien: "Dat kun je niet zeggen want wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes."

Uit het artikel volgt dat er op de schaatsbaan blijkbaar maar twee verschillende soorten vrouwen zijn: moeders en meisjes. Dat is in een venndiagram weergegeven.

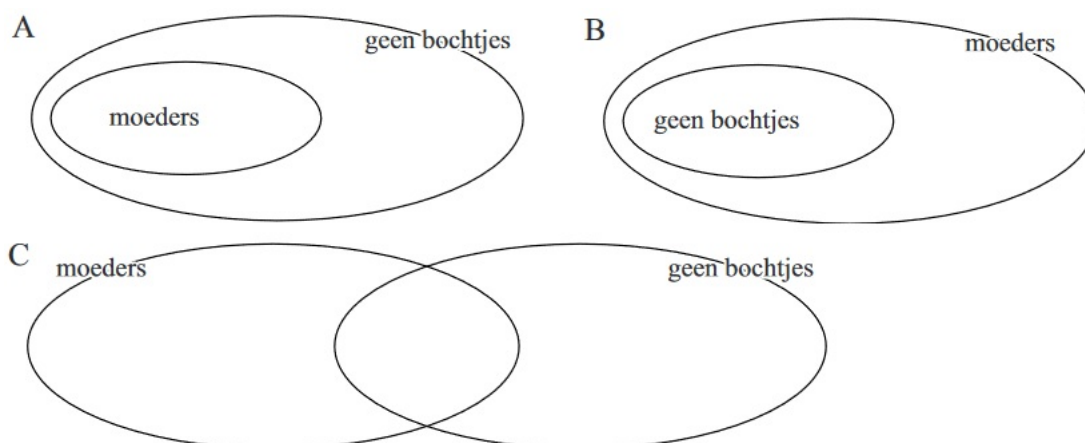


Figuur 13

We gaan er steeds van uit dat iedere vrouw kan schaatsen.

- a Geef de redenering van citaat 2 in de vorm "Als ... dan ...".

Bekijk de drie verschillende venndiagrammen. Eén daarvan past bij citaat 2.



Figuur 14

- b Welke van de venndiagrammen past bij citaat 2? Licht je antwoord toe.

- c In citaat 4 gaat vriendin 1 tegen de uitspraak van citaat 2 in.

Toon aan dat dit argument van citaat 4 voldoende is om de uitspraak van vriendin 2 in citaat 2 te weerleggen.

ik@nrc.nl

Schaatskunst

Het schaatsseizoen is weer begonnen.

Rechtuit gaat wel, bochtjes oefen ik ieder jaar alsof het voor het eerst is. Ik help een meisje met haar veters. Als we elkaar weer tegenkomen vraagt ze of ik een meisje ben of moeder. Haar vriendinnetje onderbreekt haar: "Ze is een moeder. Ze kan wel schaatsen, maar geen bochtjes, net als mijn moeder." Het is even stil. Dan zegt de ander: "Dat kan je pas zeggen wanneer je alle moeders kent en wanneer alle moeders wel kunnen schaatsen, maar geen bochtjes. En trouwens wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes". Vriendinnetje zucht: "Jij maakt ook altijd alles ingewikkeld!"

MARGREET VAN SCHIE

Figuur 12

- d** We kijken nu naar citaat 3 van vriendin 1. Stel dat de volgende bewering geldt: “Alle moeders kunnen geen bochtjes.”
Formuleer deze bewering weer in een “Als ... dan ...”-vorm en onderzoek of deze bewering de uitspraak van citaat 2 bevestigt.

naar: pilotexamen wiskunde C in 2012, eerste tijdvak

Opgave 15: Weekendje Winterberg

Op een toeristische website van de Duitse regio Sauerland staat de volgende tekst:

We hebben een huisje in Winterberg in het Sauerland. Als we geen verplichtingen hebben, gaan we daar - als er sneeuw ligt of als er mooi weer wordt voorspeld - in het weekend naar toe.

De tekst bestaat, afgezien van de eerste zin, uit vier uitspraken die samen een logische redenering vormen. De uitspraken zijn:

A: We hebben verplichtingen.

B: Er ligt sneeuw in Winterberg.

C: Er wordt voor Winterberg mooi weer voorspeld.

D: We gaan in het weekend naar ons huisje in Winterberg.

- a** Schrijf de logische redenering uit de tekst met behulp van de letters *A*, *B*, *C* en *D* en de logische symbolen.
- b** Bekijk de volgende zin:

Als we in het weekend niet naar Winterberg gaan, dan hebben we verplichtingen of er ligt geen sneeuw en er wordt geen mooi weer voorspeld.

Deze zin is op verschillende manieren te schrijven:

$$\neg D \Rightarrow (A \vee \neg B) \wedge \neg C$$

of

$$\neg D \Rightarrow A \vee (\neg B \wedge \neg C)$$

Onderzoek welke van beide manieren in overeenstemming is met de tekst op de website. Licht je antwoord toe.

naar: pilotexamen vwo wiskunde C in 2016, eerste tijdvak

Opgave 16: IQ-test

Bij onderzoeken naar het vermogen tot logisch redeneren, zoals in een IQ-test, worden vaak onzinnige uitspraken gebruikt die de kandidaat als waar aan moet nemen. Dit wordt gedaan, opdat de antwoorden op de vragen niet op basis van de werkelijkheid, maar op basis van logica gegeven worden. De volgende vraag komt uit zo'n test.

Ga ervan uit dat de volgende drie uitspraken waar zijn.

1. Alle vrouwen worden op den duur kaal.
2. Alle vrouwen houden van alle mannen.
3. Alle mannen houden van winkelen.

We gaan er in de hele opgave van uit dat elke persoon óf een man óf een vrouw is.

- a** Geef van elk van de vier beweringen aan of deze wel of niet uit de uitspraken uit het voorbeeld volgt. Licht elk van je antwoorden toe.
- Bewering a: Iemand die kaal is, is geen man.
- Bewering b: Als iemand niet kaal wordt, dan is het geen vrouw.
- Bewering c: Kale vrouwen houden van winkelen.
- Bewering d: Vrouwen houden van mannen die van winkelen houden.
- b** We voeren de volgende afkortingen in:
- M : De persoon is een man.
- W : De persoon houdt van winkelen.
- K : De persoon is kaal.
- Schrijf de bewering 'als een vrouw kaal is, dan houdt ze van winkelen' op in logische symbolen. Gebruik daarbij alleen deze afkortingen.
- c** We bekijken de volgende logische bewering: $\neg K \Rightarrow W$
- Deze bewering volgt niet uit de drie uitspraken aan het begin van de opgave. Bekijk de twee extra uitspraken:

1. Alle mannen hebben haar.
2. Vrouwen die van mannen houden, houden van winkelen.

Als één van deze twee extra uitspraken toegevoegd wordt aan het lijstje uitspraken 1, 2 en 3 dan volgt de bewering $\neg K \Rightarrow W$ wel uit dat lijstje uitspraken.

Beredeneer welke van deze twee uitspraken moet worden toegevoegd aan het lijstje uitspraken.

naar: pilotexamen vwo wiskunde C in 2016, tweede tijdvak

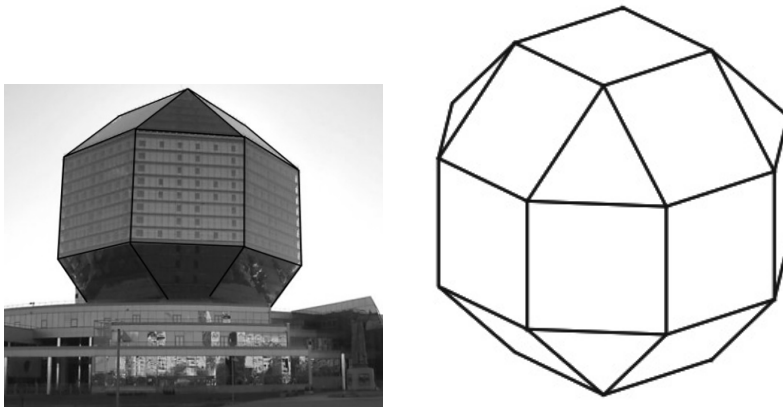
Opgave 17: De Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland

Als je in Google Earth de Wit-Russische stad Minsk bekijkt, is er een opvallend gebouw zichtbaar: de Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland (eerste foto).



Figuur 15

In het midden van het complex staat een gebouw met een bijzondere vorm. De gevel van het gebouw bestaat geheel uit driehoeken en vierkanten. Op de tweede foto en de getekende figuur is dat beter zichtbaar.



Figuur 16

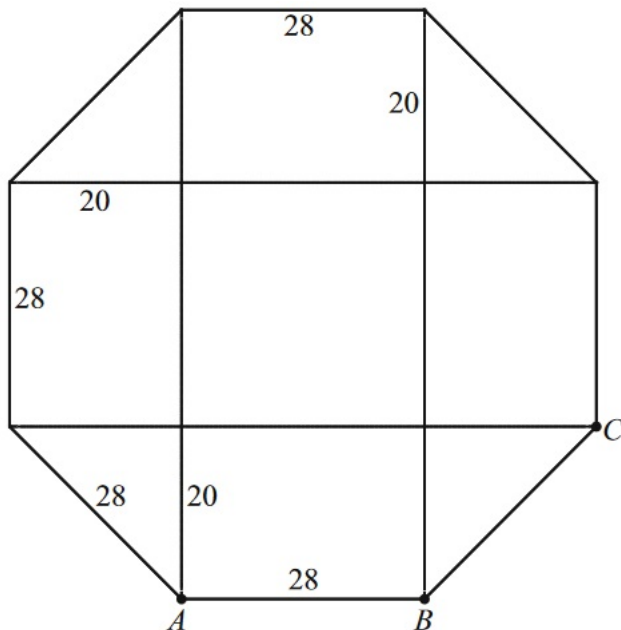
Om erachter te komen op welke hoogte de lens van het fototoestel zich bevond bij het nemen van deze foto kan men de horizon in de tweede foto tekenen.

- a** Gebruik de [uitwerkbijlage](#). Teken de horizon in de tweede foto.

Het gebouw heeft een regelmatige vorm. Zie de ruimtelijke figuur in de getekende figuur. De buitengevel bestaat uit een aantal vierkanten en gelijkzijdige driehoeken. De officiële naam van een dergelijke figuur luidt: romboëdrische kuboctaëder.

In het middelste gedeelte van het gebouw zijn 8 verdiepingen. In deze figuur staat de plattegrond van zo'n verdieping: dit is een regelmatige achthoek. De zijden van alle vierkanten van het gebouw zijn precies 28 meter lang. Hiermee liggen alle afmetingen van het gebouw vast.

In deze figuur wordt, behalve een aantal keren 28, ook nog de afmeting 20 (meter) genoemd. Deze waarde is afgerond. In de volgende vraag moet je deze afmeting nauwkeuriger berekenen.



Figuur 17

- b** Bereken deze afmeting in één decimaal nauwkeurig.
- c** Bereken de vloeroppervlakte van zo'n verdieping.
- d** Op de **uitwerkbijlage** staat een vierkant in perspectief getekend. In dit vierkant kan men de achthoekige plattegrond tekenen, zó dat hij er precies in past. Op de uitwerkbijlage is hiermee een begin gemaakt: de punten *A*, *B* en *C* uit figuur 2 zijn al aangegeven.

bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2012, eerste tijdvak

Opgave 18: Hogeschool voor de Kunsten

Bij de Hogeschool voor de Kunsten in Utrecht stond een kunstwerk in de vorm van een kubus waarvan één hoekpunt is afgezaagd. Er zijn enkele foto's gemaakt met de camera op verschillende hoogte.



foto 1



foto 2

Figuur 18

Voordat het kunstwerk werd gemaakt, is eerst een schaalmodel gemaakt.

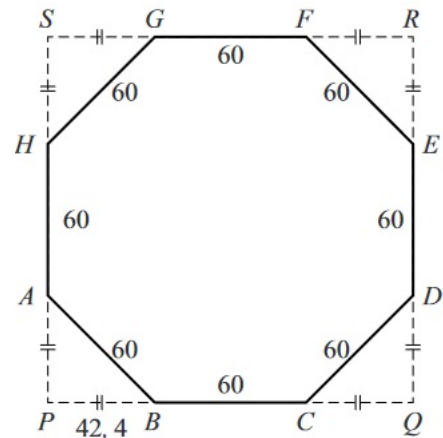
De ribben van het schaalmodel zijn tien keer zo klein als die van het kunstwerk.

- a** Bereken de verhouding tussen de inhoud van het schaalmodel en de inhoud van het kunstwerk.
Zoals je op de foto's 1 en 2 kunt zien, hangt het aantal zijvlakken dat je ziet af van de plek waar je staat.
- b** Noem alle aantallen zijvlakken die mogelijk zijn.
Op foto 1 lijkt het kunstwerk hoger dan de witte deur erachter. Op foto 2 lijkt het kunstwerk ongeveer even hoog als de deur. Foto 2 is op ongeveer 150 cm hoogte genomen. De hoogte van de deur is in werkelijkheid 230 cm.
- c** Leg uit dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de witte deur.
- d** Op de [uitwerkbijlage](#) staat nog een foto van het kunstwerk.
Geef op deze foto op de deur aan op welke hoogte de foto genomen werd en bereken deze hoogte.
Rond je antwoord af op gehele dm.

bron: pilotexamen wiskunde C in 2014, eerste tijdvak

Opgave 19: Plantenbak

In het Belgische Samrée staan de plantenbakken van de foto. De plantenbakken zijn naast elkaar gezet met een aflopende hoogte.



Figuur 19

De vorm van de plantenbakken is een prisma met een regelmatig achthoekig grondvlak. De zijden van de achthoek zijn 60 cm. In de figuur is het vierkant $PQRS$ dat er precies omheen past, getekend. Om de oppervlakte van het achthoekige grondvlak $ABCDEFGH$ te berekenen, is het handig om de lengte PB in de gelijkbenige driehoek PBA te gebruiken.

Deze lengte is 42,4 cm. De houten plankjes zijn 20 cm hoog. De dikte van de bodem en van de houten plankjes mag je hier verwaarlozen.

Een hovenier komt met zijn vrachtwagen met 3 m^3 potgrond om de plantenbakken te vullen.

- a** Bereken of 3 m^3 voldoende is voor de drie plantenbakken.

Op de [uitwerkbijlage](#) moet het achthoekige grondvlak $ABCDEFGH$ (zie de figuur) van de plantenbak in perspectief getekend worden. De zijden AB , BC en het vierkant $PQRS$ zijn al getekend.

- b** Maak de perspectieftekening af.

naar: pilotexamen 2016 - I

6 Naar het examen

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie voor het **vwo-examen wiskunde C** herhaald. Het is tijd om een compleet beeld van een vwo C examen te krijgen door er één te maken.

1. Bij 'Standaardfuncties': hoort de theorie uit het domein 'Functies en grafieken'.
2. Bij 'Vergelijkingen en ongelijkheden': hoort de theorie uit het domein 'Functies en grafieken' en uit **Veranderingen**.
3. Bij 'Formules opstellen': hoort de theorie uit het domein 'Functies en grafieken'.
4. Bij 'Discrete wiskunde': hoort alle theorie uit **Tellen** en **Rijen**.
5. Bij 'Logica en meetkunde': hoort alle theorie uit **Logica**, **Verhoudingen** en **Perspectief**.

Omdat het schriftelijk eindexamen de helft van je totale eindcijfer is, wil je een zo goed mogelijk examen doen. Enkele tips kunnen je daarbij helpen.

10 tips voor het eindexamen wiskunde

1. Vooraf

Je moet vooraf je kennis goed en in samenhang hebben opgebouwd, maar ook gericht examentraining hebben gedaan. Zorg dat je in de examenperiode goed bent uitgerust...

2. Spullen mee

Neem alle benodigde spullen mee: pen, potlood en gum, passer, geodriehoek en grafische rekenmachine. Zorg ervoor dat je grafische rekenmachine is opgeladen of neem extra batterijen mee. Je moet op het examen met pen schrijven, tekenen mag met potlood.

3. Goed beginnen

Begin niet overhaast meteen met de eerste opdracht, maar bekijk eerst het hele examen. Misschien zijn er opgaven waarvan het onderwerp je direct aanspreekt, of waarvan je de bijbehorende wiskunde goed beheerst. Dan begin je daar wellicht liever mee.

Bedenk wel dat vaak de eerste opgave een soort van 'binnenkomer' is. Maar hij kan over iets gaan waar jij nu net niet zoveel van weet.

4. Contexten

Het examen bestaat uit een aantal contexten die elk een eigen titel hebben. De verschillende opdrachten zijn doorgenummerd met 1, 2, 3, ... t/m het laatste nummer. Dus binnen een bepaalde context is de eerste opdracht niet altijd nummer 1. Bekijk zo'n context eerst als geheel, begin niet meteen aan de opdrachten. Markeer **trefwoorden** en **belangrijke formules**. Bijvoorbeeld de gebruikte eenheden kun je maar beter even markeren.

5. De opdrachten

Begin pas met de eerste opdracht binnen een context als je ook echt begrijpt wat er van je gevraagd wordt.

Bij iedere examenvraag staat aangegeven hoeveel punten je voor deze opdracht kunt krijgen. Het aantal punten geeft je een idee uit hoeveel stappen jouw uitwerking moet bestaan. Zorg dat de uitwerking van een opdracht zoveel mogelijk op één pagina staat, dan krijg je geen overschrijffouten bij het doorwerken op de volgende bladzijde.

6. Grafische rekenmachine gebruiken

Bekijk goed of je gebruik kunt maken van de grafische rekenmachine (GR). Vaak mag je met je GR een vergelijking oplossen. Schrijf dan duidelijk op hoe je de GR hebt ingezet. Bijvoorbeeld de ingevoerde formules en het ingestelde venster. Schrijf ook de functies die je gebruikt om snijpunten, maxima/minima te bepalen.

7. **Bijlagen gebruiken**

Veel wiskunde examens bevatten één of meer uitwerkbijlagen met een tabel, een grafiek of een andere (meetkundige) figuur. Als je daar iets uit moet aflezen, geef dit dan op de uitwerkbijlage aan. Bij aflezen uit een tabel kun je de afgelezen waarde markeren. Bij aflezen uit een grafiek teken je stippellijnen evenwijdig aan de assen. Zo verlies je geen punten bij het werken met een uitwerkbijlage.

8. **Opdracht klaar?**

Heb je een opdracht klaar, lees dan de vraag dan nog eens. Ga na of je wel antwoord hebt gegeven op de vraag, of je goed hebt afgerond en of je de juiste eenheid hebt vermeld.

9. **Even geen idee?**

Als je bij een opdracht niet weet wat je moet doen, blijf er dan niet te lang over nadenken. Geef jezelf even de tijd om iets te proberen en als dat niet helpt, ga dan door naar het vervolg. Anders kom je in tijdnood.

10. **Klaar?**

Als je door het examen heen heb gewerkt, ga dan niet meteen weg, maar neem even een paar minuten rust. Gebruik de resterende de tijd om te bekijken of je nog wat kunt aanvullen of verbeteren, loop alles nog een keer langs. Je zult zien dat je er nog fouten uithaalt. Maar bedenk wel: bij twijfel kun je meestal het best je eerste antwoord laten staan!

Examen

Opgave 1: De formule van Riegel en kilometertijden

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. Die formule luidt als volgt:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1,07}$$

T_1 is de tijd, uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2 . De afstanden d_1 en d_2 zijn allebei in meters. De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42195 meter, de marathon.

Harald loopt de 1500 meter in 4 minuten en 52 seconden.

- a** Bereken in minuten en seconden Haralds te verwachten tijd op de 10000 meter.

Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Olaf loopt de 3000 meter in 8 minuten en 29 seconden. Dat is 509 seconden.

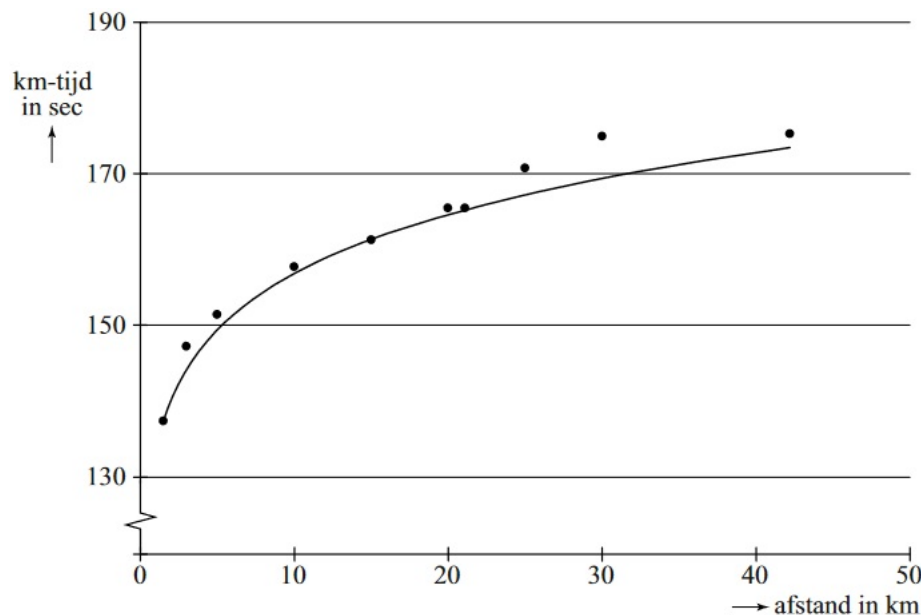
- b** Bereken met behulp van het bovenstaande en de formule van Riegel met hoeveel procent de gemiddelde snelheid van Olaf afneemt als de te lopen afstand verdubbelt

Een andere maat voor de snelheid is de kilometertijd K , het aantal seconden dat een hardloper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In formulevorm:

$$K = \frac{T}{d}$$

Hierbij is T de totale tijd in seconden en d de afstand in kilometers.

In de figuur hieronder zijn de kilometertijden weergegeven van de wereldrecords hardlopen zoals ze waren in november 2013.



De formule van de hier getekende grafiek die zo goed mogelijk bij de verschillende punten past, is van de vorm $K = a \cdot d^{0,07}$. Hierbij is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometers.

Het wereldrecord op de 1,5 km (1500 meter) is in 2016 precies 3 minuten en 26 seconden. Het bijbehorende punt ligt op de grafiek. Op basis hiervan kan berekend worden dat a ongeveer 133 is.

- c** Bereken de waarde van a in twee decimalen nauwkeurig.

De kilometertijd van het wereldrecord op de 30 km ligt boven de kromme.

- d Bereken hoeveel procent de kilometertijd op deze afstand hoger is dan de formule voorspelt.

bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2017, eerste tijdvak, opgave 1

Opgave 2: Zonnepanelen



Zonnepanelen gebaseerd op gegevens uit 2013

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. Op een dergelijke website tref je de volgende tekst aan:

Omdat de elektriciteitsprijs voortdurend stijgt, kan investeren in zonnepanelen interessant zijn. Laten we om te beginnen eens uitgaan van een stijging van de elektriciteitsprijs van 5% per jaar. Verder gaan we uit van een zonnepanelen-installatie met een opbrengst van 1750 kWh (kilowattuur) elektriciteit per jaar en een aanschafprijs van € 2995.

Op de website wordt uitgegaan van een zonnepanelen-installatie met een aanschafprijs van € 2995 en een opbrengst van 1750 kWh elektriciteit per jaar. Om de opbrengst in euro's te berekenen, wordt op diezelfde website gerekend met de prijs die de eigenaar van de zonnepanelen zou moeten betalen als hij de elektriciteit van een elektriciteitsbedrijf zou moeten kopen. Er is gerekend met een prijs van € 0,225 per kWh elektriciteit voor het eerste jaar na aanschaf van de zonnepanelen en een jaarlijkse toename van de elektriciteitsprijs van 5%.

Voor de jaarlijkse opbrengst Z in euro's van de zonnepanelen in jaar t geldt nu de formule:

$$Z = 393,75 \cdot 1,05^t.$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment van aanschaf van de zonnepanelen.

- a Leg uit hoe je deze formule kunt afleiden uit de gegevens.

Om de jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs van 5% te onderbouwen geeft de website elektriciteitsprijzen uit het verleden. Zo was in 1999 de prijs € 0,11 per kWh en in 2011 al € 0,22 per kWh. Als je aanneemt dat de elektriciteitsprijs in deze periode exponentieel gegroeid is, kom je echter niet op een (afgerond) jaarlijks groeipercentage van 5.

- b Bereken het jaarlijks groeipercentage voor de periode 1999-2011. Rond je antwoord af op één decimaal.

Omdat het percentage waarmee de elektriciteitsprijs verandert, niet steeds hetzelfde is, staat er op de website een tool waarmee je dit percentage kunt wijzigen. Bij een lagere stijging van de elektriciteitsprijs zal de opbrengst in euro's per jaar van de zonnepanelen-installatie ook lager zijn.

- c Bereken met welk percentage per jaar de elektriciteitsprijs **minstens** moet toenemen om in jaar 20 een opbrengst van de zonnepanelen-installatie van € 500 of meer te krijgen. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Voor het vervolg van deze opgave gaan we **niet** meer uit van een jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs maar van een **vaste** prijs van € 0,225 per kWh. In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een ander bedrijf.

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

De **terugverdientijd** is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten. In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

- d Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend.

bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2017, eerste tijdvak, opgave 2

Opgave 3: Seine

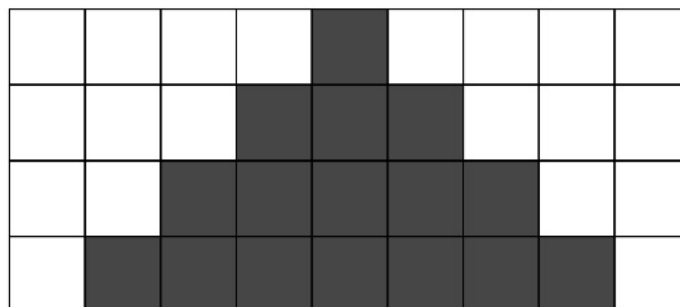
Bekijk de figuur met het kunstwerk 'Seine' van Ellsworth Kelly, waarin de schittering op het water van de rivier de Seine verbeeld is door middel van zwarte en witte vakjes die allemaal even groot zijn.



Het paneel is ingedeeld in 83 (verticale) kolommen en 41 (horizontale) rijen. De meest linkse kolom is helemaal wit. In de kolom direct rechts daarvan bevindt zich 1 zwart vakje, de kolom daarnaast bevat één zwart vakje meer, enzovoort, totdat in de middelste kolom alle 41 vakjes zwart zijn. Er is maar één kolom met allemaal zwarte vakjes. Daarna bevat elke volgende kolom steeds één zwart vakje minder.

De zwarte vakjes in het kunstwerk zijn willekeurig geplaatst in de kolommen. Kelly heeft dit gedaan door te loten. Op deze manier zijn er veel verschillende eindresultaten mogelijk. Zelfs voor een kleiner kunstwerk van 9 kolommen en 4 rijen zijn er al veel verschillende mogelijkheden.

Bekijk de figuur met een voorbeeld van 9 kolommen en 4 rijen die op de manier van Kelly van wit en zwart zijn voorzien: net als in het echte kunstwerk heeft de eerste kolom 0 zwarte vakjes, de tweede kolom één enzovoorts en de laatste kolom weer 0.

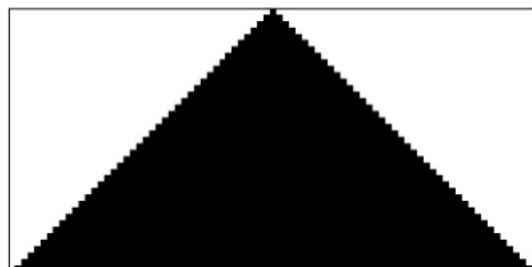


aantal zwarte vakjes: 0 1 2 3 4 3 2 1 0

- a** Bereken hoeveel verschillende ‘kunstwerken’ bestaande uit 9 kolommen en 4 rijen met deze procedure te maken zijn.

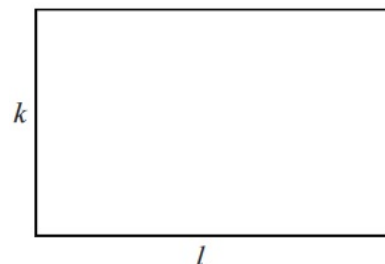
Om te berekenen hoeveel zwarte vakjes het kunstwerk ‘Seine’ van Kelly in totaal bevat, kun je in gedachten alle zwarte vakjes in de kolommen naar beneden schuiven. Bekijk de figuur.

- b** Bereken het totale aantal zwarte vakjes in het kunstwerk ‘Seine’.



Rechthoeken waarvan de zijden een gulden-snedeverhouding hebben, worden vaak mooi gevonden. In figuur 4 zie je een rechthoek met korte zijde k en lange zijde l .

Voor een rechthoek met een gulden-snedeverhouding geldt altijd het volgende: de verhouding van de korte zijde k tot de lange zijde l is gelijk aan de verhouding van de lange zijde tot de korte en de lange zijde samen. In formulevorm: $k : l = l : (k + l)$.



Het kunstwerk ‘Seine’ heeft als afmetingen 41,9 cm bij 114,9 cm.

Kelly heeft de zwarte en witte vakjes waaruit ‘Seine’ is opgebouwd niet vierkant maar rechthoekig gemaakt. In de volgende vraag gaat het erom of de afmetingen van zo’n vakje voldoen aan de gulden-snedeverhouding.

- c** Onderzoek of zo’n vakje van het kunstwerk ‘Seine’ een gulden-snedeverhouding heeft.

bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2017, eerste tijdvak, opgave 3

Opgave 4: Experiment onder rechtenstudenten

Bij een experiment onder 300 eerstejaars rechtenstudenten werd gevraagd zich te buigen over de volgende redenering:

Redenering I:

“Als je stoer bent, dan ga je laat naar bed. Jij bent niet stoer, dus jij gaat niet laat naar bed.”

De bewering in de eerste zin kunnen we met symbolen als volgt weergeven:

$$S \Rightarrow L.$$

- a** Geef de bewering in de tweede zin weer in logische symbolen en leg uit dat deze bewering niet volgt uit de bewering in de eerste zin.
- b** Uit dit experiment bleek dat 70 procent van de 300 eerstejaars rechtenstudenten redenering I ontmaskerde als een ongeldige redenering.

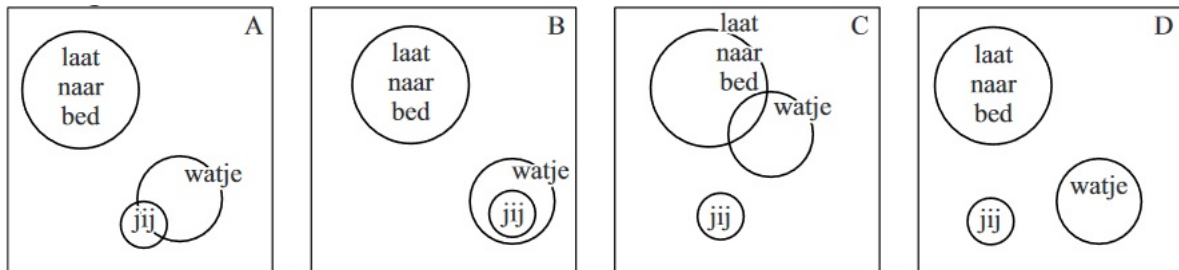
De rechtenstudenten kregen de opdracht om ook bij de volgende redenering te onderzoeken of deze geldig of ongeldig was:

Redenering II:

“Als je een watje bent, dan ga je niet laat naar bed. Jij gaat niet laat naar bed, dus jij bent een watje.”

Slechts 28 procent van de eerstejaars rechtenstudenten gaf het juiste antwoord.

Eén van de volgende venndiagrammen is geschikt om te onderzoeken of redenering II geldig is of niet.



Welk venndiagram is geschikt om te onderzoeken of redenering II geldig is of niet? Licht je antwoord toe.

c Bekijk nu de volgende twee beweringen:

- Als je stoer bent, dan ga je laat naar bed.
- Als je een watje bent, dan ga je niet laat naar bed.

Is uit dit tweetal beweringen de conclusie “Als je een watje bent, dan ben je niet stoer” te trekken? Licht je antwoord toe.

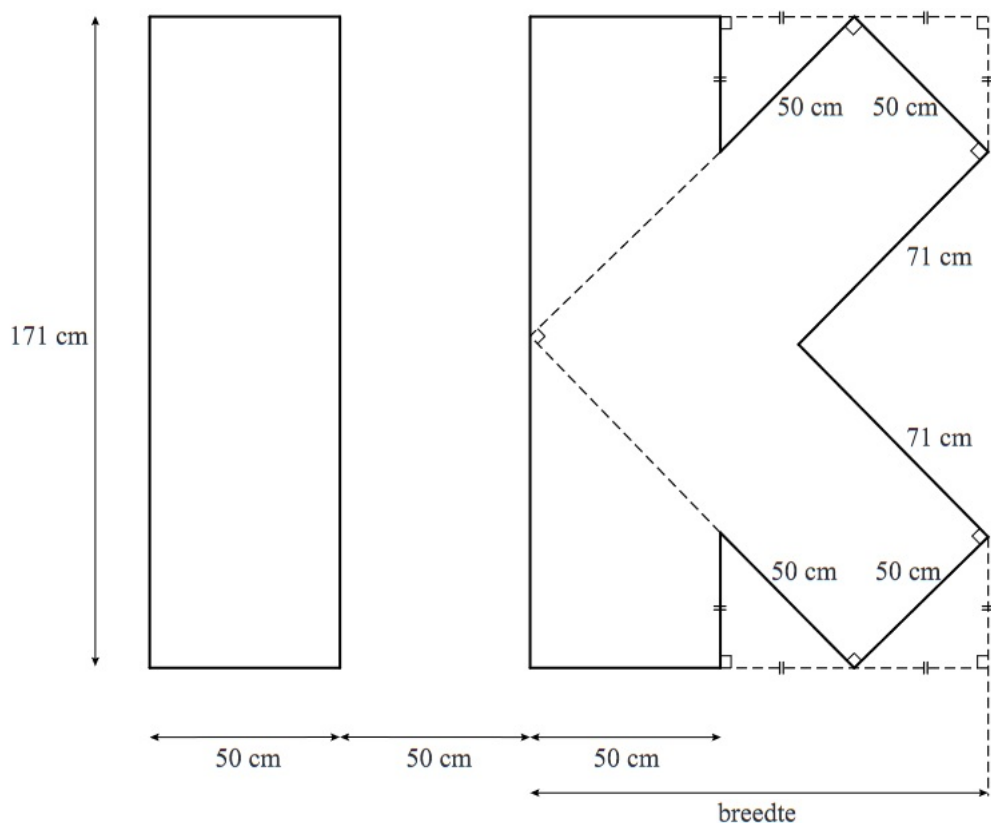
bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2017, eerste tijdvak, opgave 4

Opgave 5: IK-kunstwerk

Op de foto zie je een kunstwerk van Jan van Munster in de vorm van de letters I en K.



Er is ook een bovenaanzicht van dit kunstwerk op schaal 1 : 20 getekend. Het kunstwerk is 50 cm hoog. Je ziet enkele maten in cm staan van het kunstwerk. Die maten mag je gebruiken bij de vragen.



- a** Teken het rechterzijaanzicht van de letter K op schaal 1 : 20.

In het bovenaanzicht is de breedte van de letter K aangegeven. Bovendien zijn in de letter K twee stippellijnen getekend. Deze stippellijnen maken een rechte hoek met elkaar en het snijpunt ligt precies op de linkerrand van de letter K. Er zijn ook nog enkele andere rechte hoeken gegeven. En zoals je ziet, zijn er 8 stukjes van even grote lengte bij de letter K. Je kunt nu aantonen dat elk van deze stukjes ongeveer 35,4 cm is en de breedte van de letter K van het kunstwerk ongeveer 121 cm is.

- b** Laat zien hoe die 35,4 cm en die 121 cm met deze gegevens berekend kunnen worden.

Op de [uitwerkbijlage](#) is de letter K in perspectief getekend.

- c** Teken de letter I op de juiste plaats erbij in deze tekening.

Jan van Munster heeft ook twee IK-paviljoens laten bouwen: twee expositiegebouwen in de vorm van de letters I en K. Bekijk de foto. Neem aan dat deze paviljoens een vergroting zijn van het IK-kunstwerk waarbij alle lengtes 8 maal zo groot zijn en de dikte van de wanden verwaarloosbaar is.

- d Bereken de vloeroppervlakte van het paviljoen van de letter I in m^2 .

bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2017, eerste tijdvak, opgave 5



Opgave 6: Pi in het oude India

Indiase wiskundigen hebben in de loop van de geschiedenis een grote bijdrage geleverd aan de wiskunde. Ze hebben onder andere onderzocht hoe je het getal π kunt benaderen. In de zesde eeuw schreef de grote Indiase wiskundige Aryabhata het volgende:

Tel vier bij honderd op, vermenigvuldig vervolgens met acht en tel er dan tweeënzestigduizend bij op. Het resultaat is bij benadering de omtrek van een cirkel met diameter twintigduizend.

- a Bereken, gebruikmakend van de formule $\text{omtrek cirkel} = \pi \cdot \text{diameter cirkel}$, in vier decimalen nauwkeurig welke waarde hieruit volgt voor het getal π .

Het is niet duidelijk hoe Aryabhata aan deze benadering gekomen is. In de 14^e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.

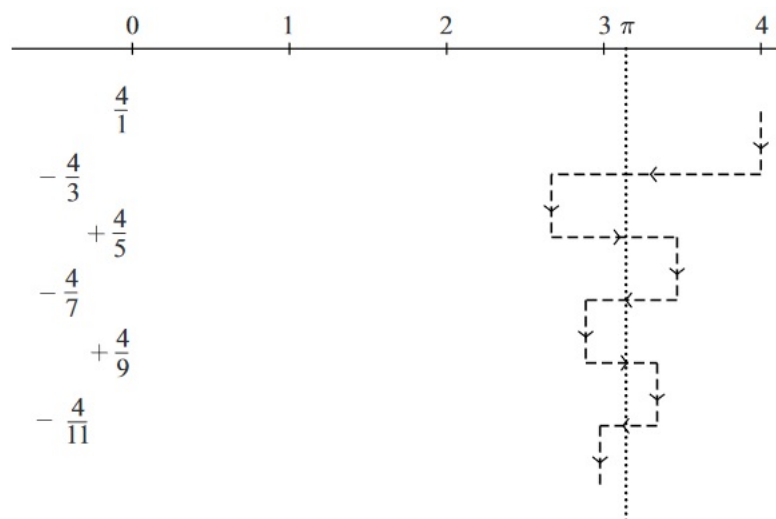
Hij begon met 4. Dat is groter dan π . Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π .

Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π .

Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichterbij het getal π . Bekijk de figuur.



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichterbij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π . Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π .

- b** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}; -\frac{4}{3}; \frac{4}{5}; -\frac{4}{7}; \frac{4}{9}; -\frac{4}{11}; \dots$

Hieronder staan twee mogelijke formules voor deze rij. Van deze formules is er één juist en de andere niet.

$$\text{I: } u_n = \frac{(-4)^{n-1}}{2n-1} \text{ met } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{II: } u_n = \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1} \text{ met } n = 1, 2, 3, \dots$$

- c** Onderzoek welke van deze twee formules de juiste is.

Madhava gaf ook een andere rij, die sneller tot een goede benadering van π leidde. De formule voor deze rij luidt:

$$v_n = \sqrt{12} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} \text{ met } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Hiermee kon hij op soortgelijke wijze als boven een benadering van π vinden die steeds nauwkeuriger wordt naarmate meer termen gebruikt worden.

- d** Geef een benadering van π door de eerste drie termen van deze rij bij elkaar op te tellen en bereken het verschil met de werkelijke waarde van π in twee decimalen nauwkeurig.

bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2017, eerste tijdvak, opgave 5

1 Standaardfuncties

- V1** Eerst reken je de hoeveelheid gas die moet worden opgeslagen om naar m^3 : $1,3 \text{ Mm}^3 = 1,3 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Bereken dan hoeveel m^3 gas er in iedere bol moet worden opgeslagen. Als er honderd tanks zijn, moet er $\frac{1,3 \cdot 10^6}{100} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ m}^3$ gas in elke tank worden opgeslagen. Aangezien de tanks bolvormig zijn, stel je de gevonden hoeveelheid gelijk aan de inhoud I . Daarmee kun je de straal r bepalen.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1,3 \cdot 10^4$$

$$r^3 = 1,3 \cdot 10^4 \cdot \frac{3}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{3103,521\dots} \approx 14,59 \text{ m}$$

- 1 a** Snijpunt x -as: $-2x - 2 = 0$ geeft $x = -1$ en dus $(-1, 0)$.
 Snijpunt y -as: $x = 0$ geeft $y = -2$ en dus $(0, -2)$.
- b** $y_1 = 2(x^2 - 2x) - 6 = 2((x - 1)^2 - 1) - 6 = 2(x - 1)^2 - 8$.
- c** Uit $y = 2(x - 1)^2 - 8$ lees je de coördinaten van de top af: $(1, -8)$.
 Omdat voor het kwadraat een positief getal staat, is dit een dalparabool.
- d** Snijpunt met de y -as: $x = 0$ geeft $y = -6$, dus $(0, -6)$.
 Snijpunten met de x -as: $2(x^2 - 2x - 3) = 2(x - 3)(x + 1) = 0$ geeft $x = 3 \vee x = -1$.
 Dus $(3, 0)$ en $(-1, 0)$.
 Eventueel mag dit met de GR, want er staat niet dat het algebraïsch moet.
- 2 a** $10 \cdot x^3 = 2 \cdot x^4$ geeft $10 \cdot x^3 - 2x^4 = 2x^3(5 - x) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = 5$.
 Dus $(0, 0)$ en $(5, 1250)$.
 Of met de GR:
 Voer in $y_1 = 10 \cdot x^3$ en $y_2 = 2 \cdot x^4$ met venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ bij $-10 \leq y \leq 1500$.
 Snijpunten $(0, 0)$ en $(5, 1250)$.
- b** Alleen g heeft een top: $(0, 0)$.
- c** Van f is het bereik $\mathbb{R}$ (elke uitkomst komt voor).
 De grafiek van g heeft een minimum van 0, dus het bereik is $y \geq 0$.
- 3 a** Voor het domein van f geldt $x \geq 0$.
 Voor het domein van g geldt $-2x > 0$ en dus $x < 0$.
 GR: $y_1 = 3\sqrt{x}$ en $y_2 = \frac{2}{\sqrt{x}}$ met venster $-1 \leq x \leq 5$ bij $-1 \leq y \leq 10$.
- b** $f(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ en $g(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$.
- c** f is r.e. en g is o.e. met $\sqrt{x}$.
- d** $3\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ geeft $3(\sqrt{x})^2 = 2$ en $x = \frac{2}{3}$.
 Het snijpunt is $\left(\frac{2}{3}, 3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
- e** Het beginpunt van $f(x) = -2\sqrt{x}$ is te vinden door de vergelijking $x = 0$ op te lossen.
 $x = 0$ en $y = -2\sqrt{0} = 0$, dit geeft $(0, 0)$.

Het beginpunt van $g(x) = \sqrt{-2x}$ is te vinden door de vergelijking $-2x = 0$ op te lossen.
 $x = 0$ en $y = \sqrt{-2 \cdot 0} = 0$, dit geeft $(0,0)$.

4 a Er is dan in beide gevallen sprake van asymptotisch gedrag. Beide functies hebben een verticale asymptoot $x = 0$, want als je positieve getallen heel dicht in de buurt van 0 (zoals 0,1 en 0,001) invult krijg je grote y -waarden. Vul je negatieve getallen heel dicht bij 0 in, dan worden de functiewaarden van f heel erg negatief, maar die van g worden heel groot positief.

b De grafieken van f en g hebben bij hele grote x -waarden uitkomsten die steeds dichterbij $y = 0$ komen. $y = 0$ is de horizontale asymptoot van hun grafieken.

De grafieken van f en g hebben bij heel erg negatieve x -waarden ook uitkomsten die steeds dichterbij $y = 0$ komen. Weer is $y = 0$ de horizontale asymptoot van hun grafieken. Alleen blijven de functiewaarden van f onder de x -as, terwijl die van g boven de x -as blijven.

c
$$h(x) = \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{12x}{x^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{12x+4}{x^2}$$

d
$$h(x) = \frac{\frac{12}{x}}{\frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{12x}{x^2}}{\frac{4}{x^2}} = \frac{12x}{4} = 3x$$

Dit kun je alleen doen zolang $x \neq 0$, want als $x = 0$ hebben f en g geen functiewaarde.

5 a $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$ geeft $4\pi r^3 - 12\pi r^2 = 4\pi r^2(r - 3) = 0$ en dus $r = 0 \vee r = 3$.

Bij een straal van 3 eenheden hebben volume en oppervlakte dezelfde waarde.

b Uit $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ volgt $r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot V$ en $r = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$.

Dit invullen in $A = 4\pi r^2$ geeft $A = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}} = (36\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$.

Dus $c = (36\pi)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{36\pi}$ en $p = \frac{2}{3}$.

6 a $H = 5200 \cdot 1,003^t$ waarin t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2000.

b Als t negatieve waarden heeft (je gaat dan terug in de tijd) dan nadert H naar 0.

c De verdubbelingstijd kun je vinden met de GR en een tabel: 231 jaar.

De verdubbelingstijd kun je vinden uit $1,003^t = 2$. Om dit op te lossen kun je de GR gebruiken of met logaritmen werken.

7 a $H = 14000 \cdot 0,988^t$ waarin t de tijd in dagen.

b Als t groot wordt, dan nadert H naar 0.

c De halveringstijd kun je vinden met de GR en een tabel: 57 jaar.

De halveringstijd kun je vinden uit $0,988^t = 0,5$. Om dit op te lossen kun je de GR gebruiken of met logaritmen werken.

8 a Door $(1,0)$ want $^g \log(1) = 0$.

b De y -as $x = 0$.

c Voor $0 < g < 1$.

9 a De groeifactor is $10^{0,1} \approx 1,26$ en het groeipercantage is ongeveer 26 %.

b De grafiek wordt een rechte lijn door bijvoorbeeld $(0,40)$ en $(10,400)$.

10 $K(1) = K(10^0) = 20 \cdot 1^{0,914} = 20$ en dan klopt met het beginpunt.

$K(6 \cdot 10^2) = 20 \cdot (9 \cdot 10^2)^{0,914} \approx 100028 \approx 10^4$ en dat klopt met het punt $(900,10000)$.

11 a Periode: 1 uur, amplitude: 20 cm, evenwichtsstand: $h = 190$ cm.

b Periode: 12 uur, amplitude: 12 cm, evenwichtsstand: $h = 190$ cm.

12 Maak eventueel een schets van de grafiek.

Evenwichtswaarde $\frac{6+2}{2} = 2$, amplitude $6 - 2 = 4$.

Tussen $t = 2$ en $t = 6$ zit een halve periode, dus de periode is 8.

13 De periode is 10 minuten.

De evenwichtsstand is $\frac{50-10}{2} = 30$ meter.

De amplitude is $50 - 30 = 20$ meter.

14 a Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 50x - 400 \\ 50x - 400 &= y \\ 50x &= y + 400 \\ x &= \frac{1}{50}y + 8 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 250 \cdot 5^x \\ \frac{1}{250}y &= 5^x \\ x &= {}^5\log\left(\frac{1}{250}y\right) \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 30 \cdot x^{1,5} \\ \frac{1}{30}y &= x^{1,5} \\ x &= \left(\frac{1}{30}y\right)^{\frac{1}{1,5}} \\ x &= \left(\frac{1}{30}y\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= {}^8\log(x) \\ x &= 8^y \end{aligned}$$

e Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{10}{2x} &= \frac{5y}{2} \\ 20 &= 10xy \\ xy &= 2 \\ y &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

f Oplossing:

$$\begin{aligned} \sqrt{2y} &= 6x \\ 2y &= (6x)^2 \\ 2y &= 36x^2 \\ y &= 18x^2 \end{aligned}$$

15 Schrijf $2p - 3q = 6$ in de vorm: $q = \dots$

$$\begin{aligned} 2p - 3q &= 6 \\ -3q &= 6 - 2p \\ q &= -2 + \frac{2}{3}p \end{aligned}$$

Substitueer nu de ontstane uitdrukking voor q in de formule: $A = 5p + 7q - 12$:

$$A = 5p + 7\left(-2 + \frac{2}{3}p\right) - 12 = 5p - 14 + \frac{14}{3}p - 12 = 9\frac{2}{3}p - 26$$

16 a Omdat w de waarde van het aandelenkapitaal is, moet $w \geq 0$.

b De totale stijging van de waarde van de aandelen bedraagt: $150 \cdot (21,44 - 19,18) = 339,00$ euro.

De kosten van de aankoop zijn $4 + 150 \cdot 0,0045 \cdot 19,18 \approx 16,95$ euro.

De kosten van de verkoop zijn $4 + 150 \cdot 0,0045 \cdot 21,44 \approx 18,47$ euro.

De winst bedraagt $339 - 16,95 - 18,47 = 303,58$ euro.

c $0,004 \cdot w + 7 = 46$ geeft $0,004 \cdot w = 39$ en $w = \frac{39}{0,004} = 9750$.

Dus een totale waarde van 9750 euro.

Of gebruik je GR met $y_1 = 0,004 \cdot x + 7$ en $y_2 = 46$ en venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10000$ bij $-10 \leq y \leq 50$.

Snijpunt $x = 9750$ en $y = 46$, dus het antwoord is € 9750,00.

17 a De nieuwe diameter is 0,32 m.

$d = 0,16$ invullen geeft 0,410 en $d = 0,32$ invullen geeft 0,376.

Dat is een afname van $\frac{0,376 - 0,410}{0,410} \approx 8\%$.

b Los de vergelijking $40 = 44 \cdot d^{0,65}$ algebraïsch of met de GR op:

$$40 = 44 \cdot d^{0,65} \text{ geeft } d^{0,65} = \frac{40}{44} \text{ en } d = \left(\frac{40}{44}\right)^{\frac{1}{0,65}} \approx 0,86.$$

Of:

GR: $y_1 = 44 \cdot d^{0,65}$ en $y_2 = 40$ met venster $-5 \leq x \leq 5$ bij $-10 \leq y \leq 50$.

Dit geeft: $x \approx 0,863$ en $y = 40$, dus de bijbehorende diameter is 0,86 m.

De bijbehorende vormfactor is $f = 0,30 \cdot 0,86^2 - 0,36 \cdot 0,86 + 0,46 = 0,37$.

De hoogte is $h = 40$, dus het volume aan hout is $V = 0,37 \cdot 0,86^2 \cdot 40 = 11 \text{ m}^3$.

c $V = f \cdot d^2 \cdot h$ en de formules voor f en h invullen geeft:

$$V = (0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46) \cdot d^2 \cdot 44 \cdot d^{0,65} = 0,30 \cdot 44 \cdot d^{4,65} - 0,36 \cdot 44 \cdot d^{3,65} \cdot d + 0,46 \cdot 44 \cdot d^{2,65}.$$

Dus $a = 13,20$, $b = -15,84$ en $c = 20,24$.

18 a De absolute toenames per week zijn 1246, 1222, 1302 en 1156.

Er is geen sprake van lineaire groei want ze zijn niet gelijk.

De groeifactoren per week zijn 1,001, 1,001, 1,001 en 1,001.

Er is wel sprake van exponentiële groei.

b De groeifactor in deze periode is ongeveer $\frac{1120987}{1038340} \approx 1,0796$.

De groeifactor per 2 jaar is $1,0796^{\frac{104}{23}} \approx 1,4138$.

Op 19 april 2014 zijn er dan $1038340 \cdot 1,4138 \approx 1470000$ artikelen.

19 a De groeifactor in drie dagen is 10, dus de groeifactor per dag is $10^{\frac{1}{3}} \approx 2,2$. Dit is meer dan verdubbeling.

b De bederfgrens in de oude situatie: $100 \cdot 8,3^t = 50 \cdot 10^6$ geeft met de GR: $t \approx 6,2$.

Het duurt (ongeveer) 1 dag langer.

c Als $T = 18^\circ\text{C}$ is $g = 10^{0,0092 \cdot (18+6)^2} \approx 199159$.

Na een dag is het aantal bacteriën 19915900 en dit is nog onder de bederfgrens.

20 a Bij soort A is de werkelijke waarde ongeveer 7 en de waarde volgens de lijn is ongeveer 38.

Bij soort B is de werkelijke waarde ongeveer 15 en de waarde volgens de lijn is ongeveer 8.

Bij soort C is de werkelijke waarde ongeveer 65 en de waarde volgens de lijn is ongeveer 27.

Absoluut gezien is het verschil bij soort C het grootst.

b $\log(N) = 0,1 + 3,4 \cdot \log(4) \approx 2,15$, dus $N \approx 10^{2,15} \approx 140$

c $R = \frac{1006,5}{1251,8 - 1006,5} \approx 4,1$ en $\log(N) = 0,1 + 3,4 \cdot \log(4,1) \approx 2,18$, zodat $N \approx 10^{2,18} \approx 153$.
De conclusie is terecht.

d $N = 10^{0,1 + 3,4 \cdot \log(R)} = 10^{0,1} \cdot 10^{3,4 \cdot \log(R)} \approx 1,3 \cdot (10^{\log(R)})^{3,4} = 1,3 \cdot R^{3,4}$

Dus $c \approx 1,3$.

21 a Lees af uit de figuur: de periode is ongeveer 51 jaar.

In $1913 + 2 \cdot 51 = 2015$ is er een maximum.

In 1989 (of 1990) is er een minimum.

Het crisisjaar 2009 ligt vlak voor de top, 2009 ligt niet in een periode van economische neergang.

b Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Barker maxima voor $t \approx 1981$ en $t \approx 2044$ en een minimum voor $t \approx 2012$.

Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Kondratieff maxima voor $t \approx 1964$ en $t \approx 2015$ en minima voor $t \approx 1989$ en $t \approx 2040$.

Maak een (rudimentaire) schets van beide grafieken.

De gevraagde perioden zijn 1964 tot 1981; 1989 tot 2012; 2015 tot 2040 en 2044 tot 2050.

2 Vergelijkingen en ongelijkheden

V1 Neem x het aantal speakers dat ingezet wordt. Dan geldt:

$$L_d B = 10 \log \left(\frac{x I_s}{I_0} \right) \leq 103$$

Oplossen kan met de GR of algebraïsch:

$$10 \log \left(\frac{x I_s}{I_0} \right) = 103 \text{ geeft } x \frac{I_s}{I_0} = 10^{10,3}$$

$$\text{Dus } x = 10^{10,3} \cdot \frac{I_0}{I_s} = 10^{10,3} \cdot \frac{10^{-12}}{0,0017} \approx 11,7$$

Je rondt hier naar beneden af omdat anders toch de grens van 103 dB wordt overschreden. Er mogen dus maximaal 11 speakers gebruikt worden.

1 a $2x - 3 = 3x + 4$ geeft $-x = 7$ en $x = -7$.

GR: $y_1 = 2x - 3$ en $y_2 = 3x + 4$ met standaardvenster.

Oplossing ongelijkheid: $x > -7$.

b $\frac{1}{4}x + 5 = \frac{1}{5}x + 4$ geeft $5x + 100 = 4x + 80$ en dus $x = -20$.

c $x(x + 4) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = -4$.

$y_1 = x(x + 4)$ is een dalparabool, dus $-4 < x < 0$.

d $x^2(x - 4) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = 4$.

GR: $y_1 = x^3 - 4x^2$ geeft $x < 4$.

2 a GR: $y_1 = x^2 - 2x$ en $y_2 = -2x^2 + 4x$ met standaardvenster.

Snijpunten: $x = 0$ en $y = 0$ en ook $x = 2$ en $y = 0$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x < 0 \vee x > 2$.

b GR: $y_1 = x^3$ en $y_2 = 5 - x$ met standaardvenster.

Snijpunt: $x \approx 1,52$ en $y \approx 3,48$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x < 1,52$.

3 a GR: $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 11$ met standaardvenster.

Snijpunt: $x = 1,765$ en $y = 11$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x \leq 1,765$.

b GR: $y_1 = 3x^4$ en $y_2 = 12$ met standaardvenster.

Snijpunten: $x \approx -1,414$ en $y = 12$ en ook $x \approx 1,414$ en $y = 12$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x < -1,414 \vee x > 1,414$.

c GR: $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 3x^4$ met standaardvenster.

Snijpunten $x = 0$ en $y = 0$ en ook $x \approx 0,667$ en $y \approx 0,593$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $0 < x < 0,667$.

4 a $x^{\frac{4}{3}} = 17$ betekent $x = \pm 17^{\frac{3}{4}} \approx \pm 8,372$ (macht is even).

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $-8,372 < x < 8,372$.

b $\sqrt[4]{x^3} = 8$ geeft $x^3 = 8^4 = 4096$ en $x = 4096^{\frac{1}{3}} = 16$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x \geq 16$.

5 a $x^{-2} = 17$ betekent $x = \pm 17^{-\frac{1}{2}} \approx \pm 0,243$ (macht is even).

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $x < -0,243 \vee x > 0,243$.

b $\frac{30}{x-3} = 5$ geeft $30 = 5(x - 3)$ en $x - 3 = 6$, zodat $x = 9$.

Uit de grafiek blijkt dat de oplossing is: $3 \leq x < 9$.

6 a $2^{2x-1} = 32 = 2^5$ geeft $2x - 1 = 5$ en $x = 3$.

Of:

$2^{2x-1} = 32$ geeft $2x - 1 = {}^2\log(32) = 5$ en $x = 3$.

b $8^x = 10^x$ geeft $\frac{8^x}{10^x} = 1$ en $0,8^x = 1$, dus $x = 0$.

Of:

$2^{3x} = 10^x$ geeft $3x = {}^2\log(10^x) = x \cdot {}^2\log(10)$ en $x = 0$.

c $150 \cdot 10^{-0,1x} = 60$ geeft $10^{-0,1x} = 0,4$, dus $-0,1x = \log(0,4)$ en $x = \frac{\log(0,4)}{-0,1} \approx 3,98$.

d $50 \cdot 2^{0,5x} + 10 = 100$ geeft $2^{0,5x} = \frac{90}{50} = 1,8$ en $0,5x = {}^2\log(1,8)$, zodat $x = \frac{{}^2\log(1,8)}{0,5} \approx 16,96$.

7 De groeifactor per jaar is $g = 1,3$.

$1,3^t = 2$ geeft $t = {}^1,3\log(2) \approx 2,6$.

De verdubbelingstijd is ongeveer 2,6 jaar.

8 a ${}^2\log\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$ geeft $\frac{1}{2}x + 3 = 2^5 = 32$ en $x = 58$.

b $\log(4 - x) = 2$ geeft $4 - x = 10^2 = 100$ en $x = -96$.

9 a $A(t) = 540 - 540 \cdot 0,95^t = 300$ geeft $540 \cdot 0,95^t = 240$ en $0,95^t = \frac{240}{540}$.

Dus $t = {}^{0,95}\log\left(\frac{240}{540}\right) \approx 15,8$ minuten.

b Dit is geen exponentiële groei. Alleen het verschil met 540 neemt exponentieel af.

10 a $h = -19 \log(p) + 57 = 0$ geeft $\log(p) = \frac{57}{19}$ en $p = 10^{\frac{57}{19}} = 1000$ hPa.

b $h = -19 \log(p) + 57 = 2$ geeft $\log(p) = \frac{55}{19}$ en $p = 10^{\frac{55}{19}} \approx 785$ hPa.

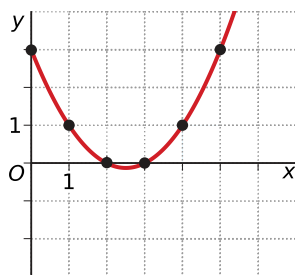
11 a GR: $y_1 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$ en $y_2 = y_1(x) - y_1(x - 1)$.

De tabel van y_2 is de toenametabel. Teken er een toenamediagram bij.

b De grafiek is afnemend stijgend voor $x < 4$.

c De grafiek is toenemend dalend voor $x > 4$.

12 Maak eventueel eerst een tabel met toenames en van daaruit een tabel met y -waarden. De best passende grafiek lijkt een dalparabool.



13 a De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 0}{3 - 0} = 0$.

b Het differentiequotient is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{-2 - 0}{1 - 0} = -2$.

c GR: $y_1 = x^3 - 3x^2$ en bereken $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=1}$.

Je vindt ongeveer $f'(1) = -3$

d De richtingscoëfficiënt is $a = f'(1) = -3$ en de raaklijn gaat door $(1, f(1)) = (1, -2)$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = -3x + 1$.

14 a $\frac{\Delta p}{\Delta h} = \frac{1000 \cdot 10^{-0,053 \cdot 1,5} - 1000 \cdot 10^{-0,053}}{1,5 - 1} \approx -104,8 \text{ hPa.}$

b GR: $y_1 = 1000 \cdot 10^{-0,053x}$ en bereken $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=0}$.

Je vindt $p'(0) \approx -122 \text{ hPa/km.}$

15 a $P(1895) = 185$ en $P(1995) = 219$.

Er zouden $219 - 185 = 34$ soorten zijn ontdekt.

b GR: $y_1 = \frac{264x - 476657}{x - 1767}$ en $y_1 = 200$ met venster bijvoorbeeld $-1800 \leq x \leq 2000$ bij $-10 \leq y \leq 300$.

Snijpunt bij $x = 1925,89...$ en $y = 200$.

In het jaar 1925 zijn er 200 nieuwe soorten ontdekt vanaf het jaar waar de uitkomst nul is.

Dat is als $264t - 476657 = 0$, dus $t = 1805$.

De betekenis is dat er in 1925 200 nieuwe soorten zijn ontdekt gerekend vanaf 1805.

16 a De formule voor de Amerikaanse eik is: $h = 29,026(1 - 0,9790^t)^{0,80820}$.

Het vierde jaar begint op $t = 3$ en eindigt op $t = 4$. Dit betekent dat $t = 3$.

Het invullen van deze twee waarden geeft respectievelijk als hoogte (ongeveer) 305,5 cm en 382,2 cm.

De hoogtes van de zomereik zijn (ongeveer) 171,7 cm en 225,2 cm.

De toenames zijn (ongeveer) 77 cm en 54 cm, het verschil is ruim 20 cm.

b Los de vergelijking $8 = 23,743(1 - 0,9603^t)^{1,22770}$ op.

GR: $y_1 = 23,743(1 - 0,9603^t)^{1,22770}$ en $y_2 = 8$ met venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 20$ bij $-10 \leq y \leq 10$.

Snijpunt bij $x = 13,11...$ en $y = 8$. De boom is 13 jaar oud.

17 a De groeifactor per jaar is $1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$.

De kosten in 2044 zijn $4700 \cdot (1,045)^{40} = 27337,00$ euro.

b De kosten voor levensonderhoud nemen toe tot (ongeveer) € 15500.

De groeifactor per 40 jaar is $\frac{15500}{4700} \approx 3,298$.

Dat betekent een toename van (ongeveer) 230%.

Of:

De groeifactor per jaar is 1,03.

De groeifactor per 40 jaar is $1,03^{40} \approx 3,262$.

Dat betekent een toename van (ongeveer) 226%.

18 a Armen en handen: $\frac{21,0 - 18,15}{16} \approx 0,18$ dus een relatieve toename van 18%.

Benen en voeten: $\frac{38,8 - 31,65}{16} \approx 0,45$ dus een relatieve toename van 45%.

De relatieve toename van het aandeel benen en voeten is groter.

b Er moet gelden: $\sqrt{\frac{1}{3600} \cdot 100 \cdot M} = 0,024265 \cdot 100^{0,3964} \cdot M^{0,5378}$.

Dit betekent: $\frac{1}{6} M^{0,5} \approx 0,1506 \cdot M^{0,5378}$ en $M^{0,0378} \approx 1,107$.

Dus $M \approx 1,107^{\frac{1}{0,0378}} \approx 14,6 \text{ kg.}$

(Je kunt de vergelijking ook met de GR oplossen.)

c $S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}} = \frac{1}{60} \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$.

Dus $c = \frac{1}{60}$.

19 a In 2002 waren er (ongeveer) 17000 nieuwbouwwoningen.

In 2004 waren er (ongeveer) 14800 nieuwbouwwoningen.

De toename is: $\frac{17000-14800}{14800} \approx 1,15$ dus ongeveer 15 % hoger.

b Twee keer zo duur betekent een kostprijs van 2 miljoen euro.

Aflesen dat bij 2 miljoen de controletijd ongeveer 76 uren is.

Dat is $\frac{76}{50} = 1,52$ dus ongeveer 1,5 keer zo groot.

c $C = (1,544 + 0,245 \log(50))^9 \approx 427$ uur.

d $C = (1,544 + 0,245 \log(K))^9 = 950$ geeft $1,544 + 0,245 \log(K) = 950^{\frac{1}{9}} \approx 2,142$.

Dus $\log(K) \approx \frac{2,142-1,544}{0,245} \approx 2,441$ zodat $K \approx 10^{2,441} \approx 276$ miljoen euro.

(Of: werk met de GR.)

e $K = \frac{76}{1,04^4} \approx 53,6$ miljoen euro.

$C = (1,544 + 0,245 \log(53,6))^9 \approx 442$ uur.

20 a De temperatuurverschillen in fase 1, 2 en 3 zijn respectievelijk 580, 500 en 450.

$$\frac{580}{60} = 9\frac{2}{3}, \frac{500}{10} = 5, \frac{450}{150} = 3.$$

In totaal staat de oven $17\frac{2}{3}$ uur aan en dit is 1060 minuten (of 17 uur en 40 minuten).

b GR: $y_1 = 20 + 980 \cdot 0,93^x$ met venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 1000$.

$$\frac{dy}{dx} \approx -71,1.$$

De afkoelsnelheid is 71 °C per minuut.

Met een gemiddelde verandering:

Neem een klein interval met een breedte van hoogstens 1 minuut, bijvoorbeeld $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$t = -\frac{1}{2} \text{ geeft } T = 20 + 980 \cdot 0,93^{-\frac{1}{2}} = 1036,212661.$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ geeft } T = 20 + 980 \cdot 0,93^{\frac{1}{2}} = 965,0777746.$$

$$\text{De gemiddelde verandering is } \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{965,0777746 - 1036,212661}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} \approx -71,1.$$

De afkoelsnelheid is 71 °C per minuut.

3 Formules opstellen

V1 De formule heeft de vorm $N(t) = a \cdot g^t$ met t in jaren na 1950 en N het aantal miljarden mensen.

$$6,5 = 2,5g^{55} \text{ dus } \frac{6,5}{2,5} = g^{55} \text{ en } g = \left(\frac{6,5}{2,5}\right)^{\frac{1}{55}} = 1,0175.$$

$$\text{Dus: } N(t) = 2,5 \cdot 1,0175^t.$$

In 2050 zijn er volgens dit model $N(100) = 2,5 \cdot 1,0175^{100} \approx 14,17$ mld mensen. (Hopelijk klopt dit model niet...)

1 a Richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-4}{0-4} = -0,5$.

Punt B invullen in $y = -0,5x + b$ geeft $b = 6$.

$$\text{Formule: } y = -0,5x + 6.$$

b A invullen in $y = a(x-4)^2 + 6$ geeft $a = -0,25$.

$$\text{Formule: } y = -0,25(x-4)^2 + 6.$$

c GR: $y_1 = -0,5x + 6$ en $y_2 = -0,25(x-4)^2 + 6$ met standaardvenster.

Snijpunten: $x = 2$ en $y = 5$ of $x = 8$ en $y = 2$.

Dus: $(2,5)$ en $(8,2)$.

2 a $(0,2)$ invullen in $y = a(x-6)^2 + 3$ geeft $a = -\frac{1}{36}$.

$$\text{Formule: } y = -\frac{1}{36}(x-6)^2 + 3.$$

b $y = -\frac{1}{36}(x-6)^2 + 3 = 0$ geeft $(x-6)^2 = 108$ en $x = 6 \pm \sqrt{108}$.

De bal komt na $6 + \sqrt{108} \approx 16,4$ m op de grond.

(Dit kan ook met de GR.)

3 a $(4; 3,2)$ invullen geeft $3,2 = a \cdot 4^r$.

$$(9; 10,8) \text{ invullen geeft } 10,8 = a \cdot 9^r.$$

$$\text{Dit geeft } \frac{10,8}{3,2} = \frac{a \cdot 9^r}{a \cdot 4^r} \text{ en } 3,375 = 2,25^r \text{ en } r = \frac{\log(3,375)}{\log(2,25)} = 1,5.$$

En uit $3,2 = a \cdot 4^{1,5}$ volgt $a = 0,4$.

$$\text{Functievoorschrift } N(t) = 0,4 \cdot t^{1,5}.$$

b $N(t) = 0,4 \cdot t^{1,5} = 100$ geeft $t^{1,5} = 250$ en dus $t = 250^{\frac{1}{1,5}} \approx 39,69$.

De grafiek geeft t_{gr40} .

4 a $(-2,0)$ invullen geeft $0 = a\sqrt{-2+b}$.

$$(0,2) \text{ invullen geeft } 2 = a\sqrt{b}.$$

$$\text{Dit geeft } \frac{0}{2} = \frac{a\sqrt{-2+b}}{a\sqrt{b}} \text{ en } 0 = \sqrt{\frac{b-2}{b}} \text{ en } \frac{b-2}{b} = 0, \text{ zodat } b = 2.$$

$$\text{En uit } 2 = a \cdot \sqrt{2} \text{ volgt } a = \sqrt{2}.$$

$$\text{Functievoorschrift } f(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{t+2}.$$

b $f(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{t+2} = \sqrt{2}$ geeft $\sqrt{t+2} = 1$ en dus $t = 1^2 - 2 = -1$.

De grafiek geeft als oplossing $-2 \leq t < -1$.

5 a Richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-0}{1-11} = -0,5$.

Punt $(1,5)$ invullen in $\log(y) = -0,5 \log(x) + b$ geeft $b = 5,5$.

$$\text{Formule: } \log(y) = -0,5 \cdot \log(x) + 5,5.$$

- b** $\log(y) = -0,5 \cdot \log(x) + 5,5$ geeft
 $y = 10^{-0,5 \cdot \log(x) + 5,5} = 10^{5,5} \cdot 10^{\log(x) \cdot -0,5} \approx 316228 \cdot x^{-0,5}$.
- 6 a** Het functievoorschrift heeft de vorm $y = a \cdot g^x$.
 Punt (0,50) invullen geeft $50 = a \cdot g^0$ en $a = 50$.
 Punt (10,40) invullen geeft $40 = a \cdot g^{10}$.
 Met $a = 50$ krijg je $40 = 50 \cdot g^{10}$ en $g = \left(\frac{40}{50}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0,98$.
 Formule: $y = 50 \cdot 0,98^x$.
- b** $50 \cdot 0,98^x = 10$ geeft $x = \frac{0,98 \log\left(\frac{10}{50}\right)}{\log(0,98)} \approx 79,7$.
 De grafiek geeft $x \geq 79,7$.
- 7 a** $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{17-5}{6-0} = 2$
 De lijn gaat door (0,5), dus: $\log(y) = 2x + 5$.
- b** $\log(y) = 2x + 5$ geeft $y = 10^{\log(y)} = 10^{2x+5} = 10^5 \cdot 10^{2x} = 100000 \cdot 100^x$.
- 8** Een rechte lijn opp enkellogaritmisch papier betekent dat $y = a \cdot g^t$.
 Neem twee punten, bijvoorbeeld (1,10) en (6,100).
 De groeifactor is $g = \left(\frac{100}{10}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,6$.
 Een van de twee punten invullen in $y = a \cdot 1,6^x$ geeft $10 = a \cdot 1,6^1$ en $a \approx 6,3$.
 Dit geeft de formule: $y = 6,3 \cdot 1,6^x$.
- 9** Gegeven zijn twee punten (0,30000) en (7,6000).
 De groeifactor per dag is: $g = \left(\frac{6000}{30000}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 0,8$.
 Het functievoorschrift is: $S = 30000 \cdot 0,8^t$.
- 10** $H = 320 \cdot 10^{-0,12t} = 320 \cdot g^t$ geeft $g = 10^{-0,12} \approx 0,76$.
 Dus is $H = 320 \cdot 0,76^t$, dus het vervalpercentage is $(1 - 0,76) \cdot 100 = 24\%$.
- 11 a** De helling tussen (134,65) en (210,46) is $\frac{46-65}{210-134} = -0,25$.
 Dus $a = 65 + (180 - 134) \cdot -0,25 = 53,5$.
- b** De helling tussen (210,46) en (240,31) is $\frac{31-46}{240-210} = -0,5$.
 De uitkomst bij b is 40, dat is $\frac{40-46}{-0,5} = 12$ eenheden verder dan 46.
 Dus $b = 210 + 12 = 222$.
- c** De helling tussen (240,31) en (255,26) is $\frac{26-31}{255-240} = -\frac{1}{3}$.
 Dus $c = 26 + (261 - 255) \cdot -\frac{1}{3} = 24$.
- 12 a** Bij $x = 6$ hoort volgens de grafiek de waarde $y \approx 6,5$.
- b** Aflezen van de punten (4,3) en (7,8) geeft:
 De helling tussen (4,3) en (7,8) is $\frac{8-3}{7-4} = \frac{5}{3}$.
 Dus hoort bij $x = 6$ de waarde $y = 3 + (6 - 4) \cdot \frac{5}{3} = 6\frac{1}{3}$.
- c** Daarvoor is de grafiek te onvoorspelbaar, hij zou net zo goed heel anders door deze meetpunten kunnen lopen en hoe hij zich erbuiten zal gedragen is volkomen onbekend.
- 13 a** De r.c. is $a = \frac{160-70}{4-0} = \frac{90}{4} = 22,5$.
 De formule voor de trendlijn is $F = 22,5t + 70$.
- b** In juni 2020 zit de grafiek op de trendlijn en is $t = 10,5$, dus $F \approx 306$ fazanten.

In september 2020 geldt voor de trendlijn $t = 10,75$, dus $F \approx 312$. Maar de grafiek zelf zit daar nog (net als in de voorgaande jaren) ongeveer 40 fazanten boven. Dus is de schatting in september 2020 ongeveer 352 fazanten.

- 14 a** De voorspelling van 2019 kopiëren en die grafiek naar 2020 verplaatsen, maar dan wel ongeveer 2 ppm omhoog verschuiven.
- b** Elk jaar lijkt de maximale CO₂-concentratie met ruim 2 ppm toe te nemen.
Dus zou in 2021 de hoogste waarde ongeveer $415 + 2 \cdot 2 = 419$ ppm zijn.
- 15 a** Je moet elk van de zeven artikelen met ten minste 100 waardepunten betalen.
De eerste 700 punten zijn € 10,50 waard en 11300 punten zijn € 56,50 waard.
Het kost in totaal $6 \cdot 9,30 + 46,50 = 102,30$ euro.
Marieke moet $(102,30 - 67,00)$ € 35,30 bijbetalen.
- b** Elk punt is € 0,005 waard, de helling is 0,005.
Voor de eerste 100 punten krijg je echter € 1,50, oftewel $1,50 - 100 \cdot 0,005 = 1,00$ euro extra.
Hieruit volgt dat het startgetal 1 is, zodat de formule $W = 1 + 0,005p$ is.
- 16 a** Lees af uit de grafiek: het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken in 1995 is 165000 en in 2013 is dit 130000.
Het aantal volgens de trendlijn in 1995 is 111000 en in 2013 is dit 86000.
In 1995 is het gemiddeld aantal in de drie beste zomerweken $\frac{165000 - 111000}{111000} \cdot 100 \approx 49\%$ meer dan het door de trendlijn voorspelde aantal. In 2013 is het gemiddeld aantal in de drie beste zomerweken $\frac{130000 - 86000}{86000} \cdot 100 \approx 51\%$ meer dan het voorspelde aantal.
In procent verschilde het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken in 1995 minder dan in 2013.
- b** Lees twee punten af op de lijn. Bijvoorbeeld bij $t = 0$ (in 1995) hoort 111000 en bij $t = 18$ hoort 86000 en $\frac{86000 - 111000}{18} \approx -1389$.
Neem A het aantal vlinders en t de tijd in jaar met $t = 0$ in 1995. Dan wordt de formule:
 $A = -1389t + 111000$.
 $-1389t + 111000 = 60000$ geeft $-1389t = -51000$, dus $t \approx 36,7$.
In het jaar 2032 of 2031 zijn er voor het eerst minder dan 60000 vlinders.
- 17** Twee punten (6,10) en (40,300) invullen geeft: $10 = a \cdot 6^n$ en $300 = a \cdot 40^n$.
Dit geeft $\frac{300}{10} = \frac{a \cdot 40^n}{a \cdot 6^n}$ en $\frac{300}{10} = 30 = \left(\frac{40}{6}\right)^n$, dus $n = \frac{40}{6} \log(30) \approx 1,8$.
Het invullen van de waarde van n en de coördinaten van een van de punten in $y = a \cdot x^n$ geeft:
 $10 = a \cdot 6^{1,8}$ en hieruit volgt: $a \approx 0,4$.
De vergelijking is: $B = 0,4 \cdot x^{1,8}$.
- 18 a** Teken de grafiek op enkellogpapier.
De groeifactor per per jaar is: $\left(\frac{178}{20}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 1,20$.
- b** De groeifactor is 1,2 en het beginaantal is 20.
De formule is: $a = 20 \cdot 1,2^t$.
- 19 a** 4e tot 8e verjaardag ongeveer: $\frac{6000 - 3000}{4} = 750$ woorden per jaar.
8e tot 12e verjaardag ongeveer: $\frac{17000 - 6000}{4} = 2750$ woorden per jaar.
Dus met ongeveer 2000 woorden meer per jaar.

b Op $t = 0$: $W_h = 17000$

Op $t = 9$: $W_h = 150000$

De groeifactor is $\left(\frac{150000}{17000}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,274$.

c $a = \frac{45000-17000}{9} \approx 3111$ en $b = 17000$ betekent $W_l \approx 3111t + 17000$.

Op de 18e verjaardag is $t = 6$ en dus $W_l \approx 35667$ en $W_h \approx 72688$.

Het verschil is dan $72688 - 35667 \approx 37000$ woorden.

d $t = L - 12$ dus $W_h = 17000 \cdot 1,27^{L-12} = 17000 \cdot 1,27^L \cdot 1,27^{-12} \approx 966 \cdot 1,27^L$.

Dus $b \approx 970$ woorden.

4 Discrete wiskunde

- V1** Voer de rij van Fibonacci op je rekenmachine in. Gebruik de twee startwaarden 1 en 1 en de recursieformule: $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$.
Je vindt: $u(20) = 6765$ en $u(21) = 10946$.
De benadering wordt: $\frac{u(21)}{u(20)} = 1,618034$.
De afwijking wordt: $\left| \frac{u(21)}{u(20)} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| 9,7719 \cdot 10^{-9}$.
- 1 a** Teken eventueel een wegendiaagram of een boomdiaagram.
Dan blijkt dat er $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ keuzemogelijkheden zijn.
- b** Streep de mogelijkheden die Jannes niet wil weg uit het wegendiaagram of boomdiaagram.
Je houdt dan $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ keuzemogelijkheden over.
- 2 a** $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$ mogelijkheden.
- b** Voor het eerste en derde cijfer heb je dan vijf en voor de overige cijfers tien mogelijkheden. In totaal zijn er $5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 250000$ codes.
- c** Mogelijke codes zijn 3333AB, A3333B en AB3333, waarbij A en B twee verschillende cijfers zijn, maar niet het cijfer 3.
Voor de code 3333AB zijn er $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ mogelijkheden.
Voor de code A3333B zijn er net zo veel mogelijkheden: $9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 72$.
Voor de code AB3333 zijn er ook 72 mogelijkheden.
In totaal zijn er $3 \cdot 72 = 216$ codes mogelijk.
- 3** Stel je een wegendiaagram voor. Voor de eerste positie zijn acht mogelijke kandidaten, voor de tweede dan nog zeven en voor de derde nog zes.
Er zijn $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ mogelijke uitslagen. Dit is het aantal mogelijke permutaties van drie elementen uit acht elementen waarbij de volgorde van belang is. De grafische rekenmachine kent hiervoor een speciale functie: ${}_8P_3 = 336$.
De acht zwemmers kunnen op $8! = 40320$ manieren op de ranglijst komen, er zijn dan 40320 uitslagen mogelijk.
- 4 a** Dit kan op $\binom{9}{3} = 84$ manieren.
- Je tekent bijvoorbeeld een "ja/nee"-rooster van 3 hokjes (ja) horizontaal en 6 hokjes (nee) verticaal.
- b** Er zijn in totaal $2^9 = 512$ mogelijkheden.
- c** Dit kan op $\binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 36 + 9 + 1 = 46$ manieren.
- d** In totaal zijn er 512 mogelijkheden.
- Er zijn $\binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 9 + 1 = 10$ manieren om meer dan zeven keer "kop" te gooien.
Er zijn dus $512 - 10 = 502$ manieren om hoogstens zeven keer "kop" te gooien.
- 5** Elk veld kan worden bereikt vanuit het veld linksonder, onder en rechtsonder. Dan is het aantal mogelijke manieren om in een bepaald veld te komen gelijk aan het aantal manieren om bij het veld linksonder te komen plus het aantal manieren om het veld eronder te komen plus het aantal manieren om in het veld rechtsonder te komen.

70	160	266	357	393	356	259	133
20	50	90	126	141	126	89	44
5	15	30	45	51	45	30	14
1	4	10	16	19	16	10	4
	1	3	6	7	6	3	1
		1	2	3	2	1	
			1	1	1		
				1			

Tel de getallen in de bovenste rij op. Dat geeft 1994 manieren.

- 6 a** Rekenkundige rij, er komt telkens 6 bij: $u_{10} = 3 + 9 \cdot 6 = 45$.
- b** Recursieformule $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 3$ en $n = 0, 1, 2, \dots$
Directe formule $u_n = 3 + 6n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
- 7 a** Meetkundige rij, er wordt telkens met 4 vermenigvuldigd: $u_{10} = 3 \cdot 4^9 = 786432$.
- b** Recursieformule $u_n = 4 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 3$ en $n = 0, 1, 2, \dots$
Directe formule $u_n = 3 \cdot 4^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
- 8** $u_n = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_{n-1}}$ met $u_0 = 2$.
 $u_1 = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_0} = 3 + 4 \cdot \sqrt{2}$
 $u_2 = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_1} \approx 3 + 4 \cdot \sqrt{8,66} \approx 14,77$
 $u_3 = 3 + 4 \cdot \sqrt{u_2} \approx 3 + 4 \cdot \sqrt{14,77} \approx 18,4$
- 9 a** Recursieformule: $m_t = 4 \cdot m_{t-1}$ met $m_0 = 50$.
Directe formule: $m_t = 50 \cdot 4^t$ met $t = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- b** GR: de zesde term is de eerste die hoger is dan 50000, dat is m_5 .
Aan het begin van jaartal $2020 + 5 = 2025$ is er een rattenplaag.
- 10 a** $b_n = 7350 + 300 \cdot n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
 $a_n = 7350 \cdot 1,0275^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
- b** $b_9 = 7350 + 300 \cdot 9 = 100050$ euro en $a_9 = 7350 \cdot 1,0275^9 \approx 9382,61$ euro.
Beatrice betaalt in 2029 de meeste huur.
- c** Beatrice: $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (7350 + 7350 + 300 \cdot 19) = 204000$ euro.

$$\text{Achmed: } 7350 \cdot \frac{1 - 0,0275^{20}}{1 - 0,0275} = 192550,87 \text{ euro.}$$

Dus ook in totaal is Beatrice dan het meest kwijt.

- 11 a** Voor elk onderdeel zijn er 5 mogelijkheden. In totaal zijn er $5^4 = 625$ verschillende vierkanten mogelijk.
- b** $4 \times 125 + 2 \times 25 + 4 \times 5 + 0 \times 1 = 570$
- c** Het kunstwerk is een vierkant en bestaat uit 25 rijen. In totaal zijn er dan 625 termen in het kunstwerk.
0 is de eerste en 624 is de laatste.
De som is dan $0,5 \cdot 625 \cdot (0 + 624) = 195000$.
Het magische getal is dus $\frac{195000}{25} = 7800$.
- d** Een kunstwerk van p bij p getallen kent p^2 termen.
De som s is dan $s = 0,5 \cdot p^2 \cdot (0 + p^2 - 1)$.
Er zijn p rijen en het magische getal is dan $\frac{0,5 \cdot p^2 \cdot (p^2 - 1)}{p}$.
Herleid dit tot: $0,5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$.
- 12 a** Voer de recursieve formule in op de rekenmachine. Voor de maand juni vind je het aantal tubes tandpasta bij $n = 6$, dat zijn 4375 tubes tandpasta.

- b** De schattingen moeten liggen tussen (ongeveer) 4300 en 4386. Schat V_3 op 4480 en $V_4 = 4288$. De volgende schatting voor V_5 wordt dan 4365 en wijkt minder dan 1% af van 4343. Het antwoord is de maand mei.

c $V_3 = a \cdot 4000 + (1 - a) \cdot 5200 = 5200 - 1200a$
 $V_4 = a \cdot (5200 - 1200a) + (1 - a) \cdot 4000 = 5200a - 1200a^2 + 4000 - 4000a = -1200a^2 + 1200a + 4000$

13 a $\binom{24}{10} = \frac{24!}{10! \cdot 14!} = 1961256$ mogelijkheden.

- b** Houd rekening met het minimale en maximale aantal noodzakelijke inspecties.
 Minimaal: in elk gat dat wordt geïnspecteerd zit een zaadje. Minimaal zijn er 4 inspecties nodig.
 Maximaal: eerst inspecteert het vogeltje alle gaten zonder zaadje. Dit zijn er 14. En dan inspecteert hij vier gaten met zaadje. Er zijn maximaal 18 inspecties noodzakelijk.

- 14 a** Bereken met de hand of met de grafische rekenmachine de waarden van $N(1)$, $N(2)$ en $N(3)$ en verder. Je vindt dan $N(4) \approx 7,56$ en $N(5) \approx 7,63$.
 $t = 5$ komt overeen met het jaar 2020.

- b** Als de waarde van t heel groot wordt, dan gaat de uitdrukking $0,98^t$ naar 0.

De noemer van de breuk wordt dan ongeveer 1.

De wereldbevolking wordt dan 13,33 miljard.

- 15** Er zijn 5 trio's van het type xxx (omdat x geen 1 of 2 kan zijn).

Er zijn verder $\binom{7}{3} = 35$ trio's van het type xyz.

Bij trio's van het type xxy zijn er 6 keuzes voor x (omdat x geen 1 kan zijn).

Bij trio's van het type xxy zijn er bij elke keuze vervolgens nog 6 keuzes voor y en dan zijn er $6 \cdot 6 = 36$ trio's van het type xxy.

In totaal zijn er $5 + 35 + 36 = 76$ verschillende cijfertrio's mogelijk.

- 16** Stel vast dat $3 - 3 - 3 - 0$, $3 - 2 - 2 - 2$ en $3 - 3 - 2 - 1$ de mogelijke verdelingen van de aantallen blokjes over de staven zijn.

Voor de verdelingen $3 - 3 - 3 - 0$ en $3 - 2 - 2 - 2$ zijn er elk $\binom{4}{1} = 4$ mogelijkheden.

Voor de verdeling $3 - 3 - 2 - 1$ zijn er $\frac{4!}{2!} = 12$ mogelijkheden.

Bij elke verdeling van de blokjes over de staven zijn er 9 verschillende posities voor de 9 verschillende blokjes en dit geeft dan $9! = 362880$ mogelijkheden.

In totaal heb je dan $362880 \cdot (4 + 4 + 12) = 7257600$ verschillende opstellingen.

5 Logica en meetkunde

- V1** Elke knop kan twee signalen uitzenden: 0 en 1. Dit geldt dus voor knoppen A, B en C. Hieruit volgen acht verschillende combinaties die in onderstaande tabel staan weergegeven.

Het signaal dat de zoemer ontvangt is 0 als geen of slechts één knop wordt ingedrukt en er dus twee of drie maal signaal 0 wordt uitgezonden. Als echter twee of drie knoppen worden ingedrukt, zenden deze signaal 1 uit en ontvangt de zoemer ook signaal 1. Bekijk het schema.

A	B	C	Z
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

- 1 a** P : 'Evert is goed is Frans.'
 Q : 'Evert is goed in Duits.'
 $P \wedge Q$
- b** P : 'Rens mag mee naar het strand als hij het gras maait.'
 Q : 'Rens mag mee naar het strand als hij de heg snoeit.'
 $P \vee Q$
- 2 a** Zie de tabel.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Als P en Q beide waar zijn, is $P \wedge Q$ waar.

- b** Zie de tabel.

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Als P waar is en Q niet waar is, is $P \wedge \neg Q$ waar.

c Zie de tabel.

P	Q	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Als P waar is en/of Q niet waar is, is $P \vee \neg Q$ waar.

3 a A: 'Je haalt geen onvoldoendes.'

B: 'Je krijgt een scooter.'

De samengestelde bewering is $A \Rightarrow B$.

b Dan heb je wel onvoldoendes gehaald.

c Als A waar is en B onwaar dan is de implicatie $A \Rightarrow B$ onwaar. Je haalt geen onvoldoendes en je krijgt geen scooter, dan is de implicatie onwaar.

d Zie de tabel.

A	$\neg A$	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1

Ze zijn logisch gelijkwaardig.

4 a Een contradictie.

b Een tautologie.

c Geen van beide.

d Een tautologie.

5 a Rome en Dresden hebben goedkoop openbaar vervoer. In Nederland is het openbaar vervoer duur, dus in Nederland wordt veel minder van het openbaar vervoer gebruikgemaakt dan elders in Europa.

b Aanvulling bijvoorbeeld: 'Bovendien zijn de Nederlanders dol op de auto en is in Nederland de auto een relatief goedkoop vervoersmiddel.'

Of: 'Als het openbaar vervoer ergens duurder is, dan zullen minder mensen er gebruik van maken.'

6 Gebruik bijvoorbeeld als tegenvoorbeeld een venndiagram waarin je de verzameling longkankerpatiënten verdeelt in 10 niet-rokers en 90 rokers en je die 90 rokers ook een deel laat zijn van een groep van bijvoorbeeld 200 rokers. Dan is inderdaad 90% van de longkankerpatiënten een roker, maar "slechts" $\frac{90}{200} \cdot 100 = 45\%$ van de rokers longkankerpatiënt.

7 a Een diagonaal van het grondvlak is $\sqrt{35^2 + 35^2} \approx 49,50$ m en de helft daarvan is $\approx 24,75$ m.

Een schuin opstaande ribbe heeft een lengte van $\sqrt{24,75^2 + 21^2} \approx 32,46$.

In dm nauwkeurig is dat ongeveer 32,5 m.

b $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 35^2 \cdot 21 \approx 8575$ m³.

c De hoogte van de vier driehoeken aan glas is $\sqrt{21^2 + 17,5^2} \approx 27,34$ m.

De totale oppervlakte aan glas is $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 27,34 \approx 1913,5$ m².

Het gewicht aan glas is ongeveer $1913,5 \cdot 8 \cdot 2,5 \approx 38270$ kg.

- d** De totale oppervlakte aan glas van een kleine piramide is $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 1913,5 \approx 76,5 \text{ m}^2$.

Het gewicht aan glas is ongeveer $76,5 \cdot 8 \cdot 2,5 \approx 1531 \text{ kg}$.

- 8 a** In totaal vier: twee verticale symmetrievlakken door de top en de middens van twee tegenover elkaar liggende zijden van het grondvlak en twee verticale symmetrievlakken door de top en twee tegenover elkaar liggen hoekpunten van het grondvlak.

b Ja, de draaias is de verticale lijn door de top van de piramide en het midden van het grondvlak.

c Nee, de top heeft geen spiegelbeeld.

d Lijnsymmetrie met verticale symmetrieassen door twee boven elkaar liggende hoekpunten van zo'n ruit.

Lijnsymmetrie met horizontale symmetrieassen door twee naast elkaar liggende hoekpunten van zo'n ruit.

Puntsymmetrie (draaisymmetrie over 180°) met centrum het snijpunt van de diagonalen van zo'n ruit.

Schuifsymmetrie van de één ruit naar de andere ruit.

- 9 a** Cilindrische deel $G \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 23 \approx 2106 \text{ m}^3$.

Kegelvormige punt $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 4 \approx 151 \text{ m}^3$.

In totaal dus ongeveer 2752 m^3 .

- b** $\pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2 + 4^2} \approx 136 \text{ m}^2$.

c De totale oppervlakte van het cilindrische deel is $2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 6 \cdot 23 \approx 867,08 \text{ m}^2$.

Het zichtbare oppervlak van elke steen is $0,1 \cdot 0,21 = 0,021 \text{ m}^2$.

Er waren dus ongeveer $867,08/0,021 \approx 41290$ stenen nodig.

- 10 a** In eenpuntperspectief.

b Zie de figuur.

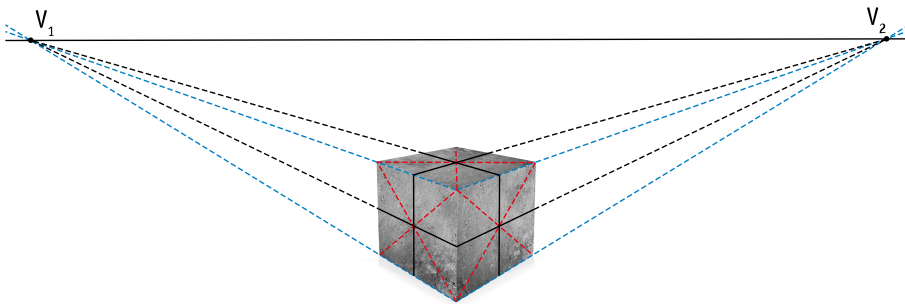


- c** De horizon zit op de hoogte van ongeveer 3,5 traptrede. De foto is genomen op ongeveer $3,50 \cdot 20 = 70$ cm hoogte.

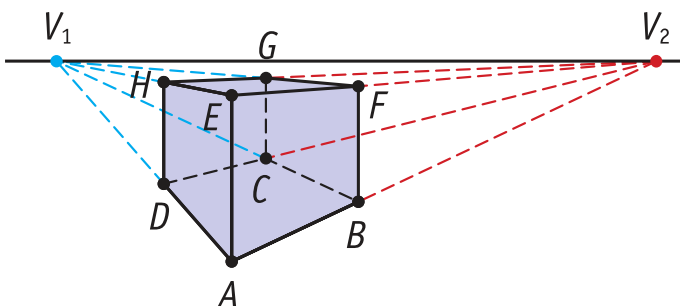
- 11** Zie de figuur.



- 12** Teken de verdwijnpunten en de horizon. Teken de diagonalen van de bovenkant en de zijkanten. Gebruik het snijpunt van de diagonalen en de verdwijnpunten om de middens van de zijkanten te bepalen. Maak de tekening af.



- 13** Verleng AD en EH , het snijpunt is verdwijnpunt V_1 .
Teken de horizon horizontaal door V_1 .
Verleng AB , dit geeft verdwijnpunt V_2 op de horizon.
Teken EV_2 .
Teken BF evenwijdig met AE en snijd deze met EV_2 .
Snijd FV_1 met HV_2 , dit geeft G .
Snijd BV_1 en DV_2 , dit geeft C .



- 14 a** Als ze (of een vrouw) geen bochtjes kan, dan is ze een moeder.
b Venndiagram B past bij citaat 2.
Alleen bij venndiagram B zie je: alle vrouwen die geen bochtjes kunnen, zitten ook in de verzameling moeders.

- c** In citaat 4 wordt expliciet geconstateerd dat er ook meisjes zijn die geen bochtjes kunnen. Daarmee wordt citaat 2 weerlegd dat een vrouw die geen bochtjes kan, automatisch een moeder is, want je kunt ook een meisje zijn.
- d** De bewering: “Alle moeders kunnen geen bochtjes” komt overeen met: “Als een vrouw een moeder is, dan kan ze geen bochtjes”.
Dat is net het omgekeerde van het citaat van vriendin 2: “Als een vrouw geen bochtjes kan, dan is ze een moeder”.
Nee, deze bewering bevestigt de uitspraak niet.

15 a Nodig zijn ‘niet A’ en ‘B of C’, dus: $\neg A \wedge (B \vee C) \Rightarrow D$.

- b** Volgens de tekst op de website zijn er twee voorwaarden om in het weekend naar het huisje in Winterberg te gaan:

- geen verplichtingen hebben
- sneeuw of mooi weer

Niet naar Winterberg gaan in het weekend betekent dat aan één of aan beide voorwaarden niet is voldaan.

Dat betekent dat er:

- verplichtingen zijn (A) of dat er
- en geen sneeuw, en geen mooi weer is ($\neg B \wedge \neg C$).

Hierbij hoort $\neg D \Rightarrow A \vee (\neg B \wedge \neg C)$.

16 a Bewering a volgt niet uit de aannames, want de uitspraken vertellen ons niets over het al dan niet kaal worden van mannen.

Bewering b volgt wel uit de aannames, want uitspraak 1 zegt dat alle vrouwen kaal worden, dus iemand die niet kaal wordt, kan geen vrouw zijn.

Bewering c volgt niet uit de aannames, want er is geen enkele uitspraak die iets zegt over het al dan niet van winkelen houden van (kale) vrouwen.

Bewering d volgt wel uit de aannames, want vrouwen houden namelijk van alle mannen (uitspraak 2) en aangezien alle mannen van winkelen houden (uitspraak 3), houden vrouwen dus van mannen die van winkelen houden.

- b** $(\neg M \wedge K) \Rightarrow W$

- c** De bewering $\neg K \Rightarrow W$ vertalen we met: ‘iemand die niet kaal is, houdt van winkelen’ (of een vergelijkbare zin).

Omdat alle vrouwen van alle mannen houden, zegt aanname 5 eigenlijk ‘alle vrouwen houden van winkelen’.

Volgens bewering 3 houden alle mannen van winkelen, dus als aanname 5 toegevoegd wordt, houdt iedereen (dus ook mensen die niet kaal zijn) van winkelen, dus moet bewering 5 worden toegevoegd.

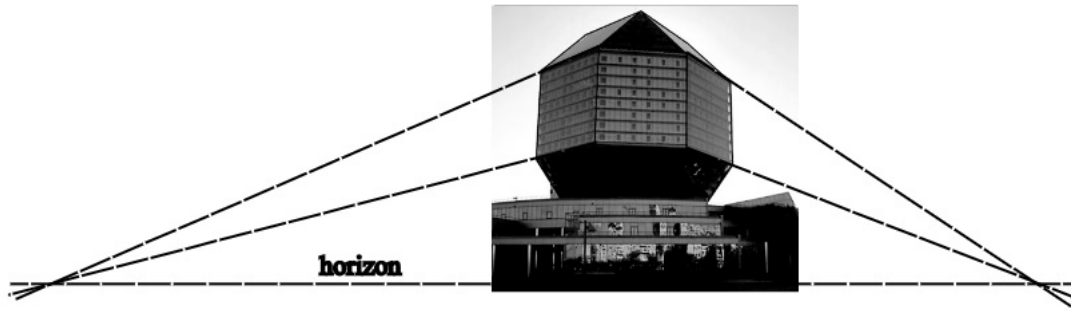
of

De bewering $\neg K \Rightarrow W$ vertalen naar ‘iemand die niet kaal is, houdt van winkelen’ (of een vergelijkbare zin).

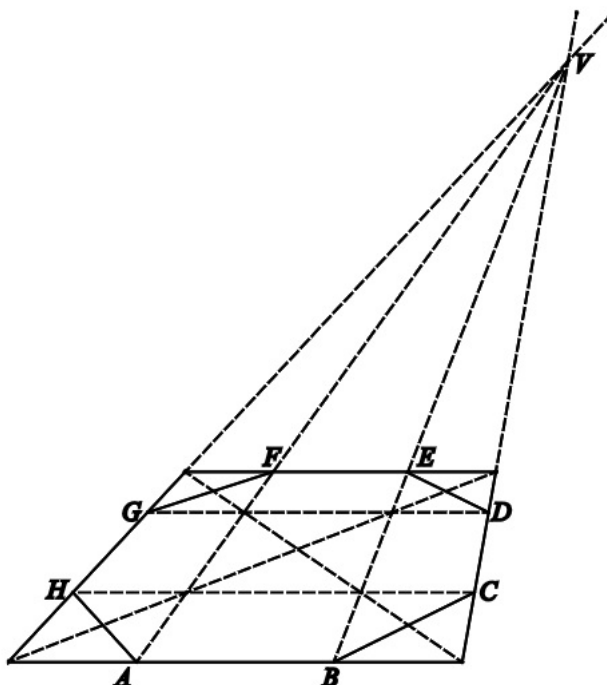
Bewering 4 geeft niet voldoende informatie, want er is dan nog steeds niet bekend of niet-kale vrouwen van winkelen houden.

Dus moet bewering 5 worden toegevoegd.

17 a Zie de figuur.



- b** De regelmatige achthoek is vanwege symmetrie onder te verdelen in (onder andere) vier dezelfde gelijkbenige rechthoekige driehoeken (en verder een vierkant en vier dezelfde rechthoeken). De langste zijde van zo'n gelijkbenige rechthoekige driehoek heeft lengte 28 m. Voor de rechthoekszijde a in zo'n driehoek geldt volgens de stelling van Pythagoras: $a^2 + a^2 = 28^2$. Dus $2a^2 = 28^2 = 784$ zodat $a^2 = 392$ en $a = \sqrt{392}$ v $a \approx \sqrt{392}$. De negatieve oplossing voldoet niet, dus $a = \sqrt{392} \approx 19,8$ m.
- c** De oppervlakte van de vier rechthoekige stukken is: $4 \cdot 28 \cdot 20 = 2240 \text{ m}^2$. De oppervlakte van het vierkant in het midden is: $28^2 = 784 \text{ m}^2$. De oppervlakte van de vier driehoekige stukken is: $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20^2 = 800 \text{ m}^2$. De oppervlakte is $2240 + 784 + 800 = 3824 \text{ m}^2$.
- d** Teken het verdwijnpunt V door de zijden van het vierkant te verlengen. Teken AV en BV en de punten E en F . Teken een diagonaal van het vierkant. Teken de horizontale lijnen GD en HC op de juiste hoogte en de punten D , G en H . Maak de achthoek verder af.



- 18 a** Als de ribben 10 keer zo klein zijn, is de inhoud 10^3 keer zo klein.
De verhouding is 1: 1000.
- b** De mogelijke aantallen zijden zijn 1, 2 en 3.
- c** Op foto 2 is de bovenkant van de deur nog net zichtbaar achter het hoogste punt van de kubus. De positie van de camera is lager dan het hoogste punt van de deur. Omdat het kunstwerk zich tussen de camera en de deur bevindt, is het kunstwerk lager dan de deur.
of
Maak een schets van een zijaanzicht met daarin ten minste aangegeven de positie van de camera, de bovenkant van het kunstwerk en de bovenkant van de deur.
Geef met behulp van een kijklijn in de schets aan dat de hoogte van het kunstwerk lager is dan de hoogte van de deur.
- d** Teken een verdwijnpunt, bijvoorbeeld met behulp van de stoeptegels en/of een raamkozijn.
Teken de horizon.
Geef een punt aan op bijvoorbeeld het midden tussen de twee deuren op de hoogte van de horizon (ongeveer 22 mm vanaf de onderzijde van de deur).
De hoogte van de deur op de foto is op dat punt (ongeveer) 37 mm, dus de hoogte waarop de foto is genomen, is $\frac{22}{37} \cdot 23 \approx 14$ dm (of 1,4 m).
- 19 a** $PQ = 0,60 + 2 \cdot 0,424 \approx 1,45$ m.
De oppervlakte van driehoek PBA is: $0,5 \cdot (0,424)^2 \approx 0,09$ m².
De oppervlakte van de achthoek is: $(1,45)^2 - 4 \cdot 0,09 \approx 1,74$ m²
De totale inhoud van de plantenbakken is (van rechts naar links): $0,4 \cdot 1,74 + 0,6 \cdot 1,74 + 0,8 \cdot 1,74 \approx 3,1$ m³.
 3 m³ is niet voldoende om de drie plantenbakken helemaal te vullen, maar komt wel dicht in de buurt.
- b** Teken verdwijnpunt V door PS en QR te verlengen.
Snijd BV en CV met SR , dit geeft G respectievelijk F .
Teken punt D , door een lijn door A evenwijdig met BC te trekken.
Teken PR en QS , dit geeft snijpunt M .
Verleng AM en snijd deze met QR , dit geeft punt E .
Maak de tekening af.

6 Naar het examen

1 a $T_2 = 292 \cdot \left(\frac{10000}{15000}\right)^{1,07} \approx 2223,13$ seconden en dat is ongeveer 37 minuten en 3 seconden.

b $v_1 = \frac{3000}{509} \approx 5,89$ m/s.

$T_2 = 509 \cdot \left(\frac{6000}{3000}\right)^{1,07} \approx 1067$, dus $v_2 \approx \frac{6000}{1067} \approx 5,61$ m/s.

De snelheid neemt met ongeveer 4,7% af.

c $K = \frac{206}{1,5} = a \cdot 1,5^{0,07}$ geeft $a \approx 133,49$.

d Volgens de grafiek is de kilometertijd 175 (seconden).

Volgens de formule $K = 133 \cdot 30^{0,07} \approx 169$ (seconden).

Dus $\frac{175-169}{169} \cdot 100 \approx 4\%$ hoger.

2 a Omdat de elektriciteitsprijs elk jaar met 5% stijgt, stijgt de opbrengst ook elk jaar met 5%.

Hierbij hoort een groeifactor van 1,05.

De opbrengst in jaar 1 is $1750 \cdot 0,225 = 393,75$ (euro).

In jaar t is de opbrengstformule dan $Z = 393,75 \cdot 1,05^{t-1}$.

b $g = \left(\frac{0,22}{0,11}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 1,059$, dus een groeipercentage van ongeveer 5,9%.

c $393,75 \cdot g^{19} = 500$ geeft $g = \left(\frac{500}{393,75}\right)^{\frac{1}{19}} \approx 1,0127$, dus een groeipercentage van ongeveer 1,3%.

d De opbrengst per jaar is $0,225 \cdot 2500 = 562,50$ (euro).

$6299 \cdot 0,15 = 944,85$; dit is meer dan 650 (euro) dus 650 (euro) subsidie.

Het aankoopbedrag is $6299 - 650 = 5649$ (euro).

De terugverdientijd is $\frac{5649}{562,50} \approx 10,04$ (jaar) dus in 2023 is het volledig terugverdiend.

3 a Voor de eerste kolom is er $\binom{4}{0} = 1$ mogelijkheid.

Voor de tweede kolom zijn er $\binom{4}{1} = 4$ mogelijkheden.

In totaal zijn er $1 \cdot 4 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 9216$ mogelijkheden.

b Kolom 1 tot en met 42 vormen een rechthoek waarin precies de helft van de vakjes zwart is.

Het aantal zwarte vakjes in deze rechthoek is: $\frac{1}{2}(42 \cdot 41) = 861$.

Kolom 42 tot en met 83 vormen ook een rechthoek waarvan de helft van de vakjes zwart is, maar in totaal is dan kolom 42 dubbel geteld.

Het totale aantal zwarte vakjes is: $861 + 861 - 41 = 1681$.

c De korte zijde van een rechthoekje in 'Seine' is $\frac{41,9}{41} \approx 1,0$ (cm) (of nauwkeuriger) en de lange zijde is $\frac{114,9}{83} \approx 1,4$ (cm) (of nauwkeuriger).

De verhouding $k : l \approx 1 : 1,4$ ($\approx 0,7$).

De verhouding $l : (k + l) \approx 1,4 : 2,4$ ($\approx 0,6$).

Deze verhoudingen zijn niet gelijk. Een vakje heeft dus niet de gulden-snede-verhouding.

4 a $\neg S \Rightarrow \neg L$

De eerste bewering geeft alleen informatie over stoere mensen en zegt niets over het slaapgedrag van niet-stoere mensen (niet-stoere mensen kunnen dus wel of niet laat naar bed gaan).

b Als je niet laat naar bed gaat, dan ben je niet per definitie een watje dus 'jij' uit de tweede bewering kan wel of niet in de verzameling 'watje' zitten. Hieruit volgt dat venndiagram A past bij die bewering.

c Als je een watje bent, dan volgt uit bewering 2 dat je niet laat naar bed gaat.

Als je niet laat naar bed gaat, dan volgt uit bewering 1 dat je niet stoer bent.

Het antwoord: ja, die conclusie is te trekken.

5 a Teken een rechthoek van $\frac{1710}{20} = 85,5$ mm bij $\frac{500}{20} = 25$ mm.

Teken een lijn in het midden van deze rechthoek.

Teken twee lijnen op een afstand van $\frac{354}{20} \approx 18$ mm vanaf de buitenkanten van de rechthoek.

b Bij de K is rechtsonder een rechthoekige gelijkbenige driehoek met langste zijde 50 cm.

Voor de rechthoekszijde a in die driehoek geldt volgens de stelling van Pythagoras: $a^2 + a^2 = 2500$.

Dus $2a^2 = 2500$ en $a = \sqrt{1250} \vee a = -\sqrt{1250}$.

De negatieve oplossing voldoet niet, dus $a = \sqrt{1250} \approx 35,4$.

De totale breedte is $50 + 35,4 + 35,4 \approx 121$ cm

c Teken voor de voorkant van de I een vierkant op de juiste afstand van de K.

Teken het verdwijnpunt V met behulp van de K.

Teken uitgaande van de bovenkant van het 'achtervlak' van de K een horizontale lijn.

Verbind het voorste vierkant van de I met V .

Maak de tekening af.

d De oppervlakte van de letter I is: $1,71 \cdot 0,50 = 0,855$ m².

De vloeroppervlakte van het I-paviljoen is: $0,855 \cdot 8^2 \approx 55$ m².

6 a $104 \cdot 8 + 62000 = \pi \cdot 20000$ geeft $\pi \approx 3,1416$.

b $\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} \approx 3,25$

Dit verschilt meer dan 0,1 van π .

$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19} \approx 3,042$

Dit verschilt minder dan 0,1 van π .

Er zijn minimaal 10 termen nodig.

c $n = 1$ invullen in formule II geeft $\frac{4 \cdot (-1)^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$ en dat klopt niet.

Formule I is dus juist.

d $S_0 = \sqrt{12} \cdot 1 = \sqrt{12}$, $S_1 = \sqrt{12} \cdot \frac{-1}{3 \cdot 3} = -\frac{1}{9}\sqrt{12}$ en $S_2 = \sqrt{12} \cdot \frac{1}{5 \cdot 9} = \frac{1}{45}\sqrt{12}$.

$S_0 + S_1 + S_2 \approx 3,156$ en dat is 0,01 meer dan de werkelijke waarde van π .

a

afnemende daling 20
afnemende stijging 20
amplitude 8
asymptotisch gedrag 4

b

balansmethode 8, 16
bereik 4
boomdiagram 42

c

combinatie 42
conjunctie 52
contradictie 52

d

dalend 20
differentiaalquotiënt 20
differentiequotiënt 20
directe formule 44
disjunctie 52
domein 4

e

éénpuntperspectief 56
evenwichtsstand 8
exponentieel verband 6, 32
extremen 4

f

faculteit 42
functie, karakteristieken van 4

g

gebroken functie 4
gelijkvormigheid 54
gemiddelde verandering 20
grafisch extrapoleren 34
grafisch interpoleren 34
gulden getal 54
gulden snede 54

h

halveringstijd 6, 18
herschrijven 8
hieruit-volgt-conclusie 52
(hogere machts) wortelfunctie 4
horizon 56

i

implicatie 52
inhoudsvergrotingsfactor 54
inklemmen 16

k

kwadratisch verband 30
kwadratische functie 4

l

lengtevergrotingsfactor 54
lineair extrapoleren 34
lineair interpoleren 34
lineair verband 30
lineaire functie 4
logaritmisch verband 6
logaritmische schaalverdeling 6
logisch gelijkwaardig 52

m

machtsverband 30
modus ponens 52
modus tollens 52

n

negatie 52
nodige voorwaarde 52

o

omgekeerd evenredig 4
omtrek 54
ongelijkheid oplossen 16
oog 56
oogpunt 56
oppervlakte 54
oppervlaktevergrotingsfactor 54

p

pythagoras, stelling van 54
paradox 52
parallelprojectie 56
periode 8
periodiek verband 34
periodieke functie 8
permutatie 42
perspectief 56
propositie 52

r

raaklijn 20
recht evenredig 4
recursie 44
recursieformule 44
reden 44
rekenregels logaritmen 18
rekenregels machten 16, 18
rij getallen 44

rooster 42

s

snijpunten met de x-as 4

snijpunten met de y-as 4

standaardfuncties 4

stijgend 20

substitueren 8

symmetrie 54

t

tafereel 56

tautologie 52

tegenvoorbeeld 52

terugrekenen 8, 16

toenamediaqram 20

toenemende daling 20

toenemende stijging 20

trend 34

trendlijn 34

tweepuntsperspectief 56

u

uitschrijven 42

v

venndiagram 52

verdubbelingstijd 6, 18

verdwijnpunt 56

vergelijking oplossen 16

verhouding 54

vluchtpunt 56

voldoende voorwaarde 52

volume 54

voorbeeld 52

w

waarheidstabel 52

waarheidswaarde 52

wegendiagram 42

Deze examentraining bereidt je voor op het VWO Wiskunde C examen. De complete examenstof is daarvoor opgedeeld in overzichtelijke onderwerpen. Ieder onderwerp begint met een verkenningsopgave. Die opgave laat zien waar je het onderwerp in de praktijk kunt tegenkomen.

Een onderwerp bevat meerdere theorieblokken. Naast ieder theorieblok staan oefenopgaven om de theorie weer even op te halen. Een onderwerp wordt afgesloten met verwerkingsopgaven die gebaseerd zijn op vraagstukken uit de officiële wiskundeexamens.

Probeer bij het maken van opgaven niet te snel naar de antwoorden achter in deze reader te kijken.

Deze examentraining wordt afgesloten met een echt examen. Als je dat examen gaat maken, probeer dan de examenomstandigheden een beetje na te bootsen. Dit is natuurlijk maar één examen. Er zijn veel meer oude examens. Die vindt je op de [Math4All website](http://www.math4all.nl).

Veel succes gewenst namens Math4All.



Werkblad bij opgave 10 op pagina 57.



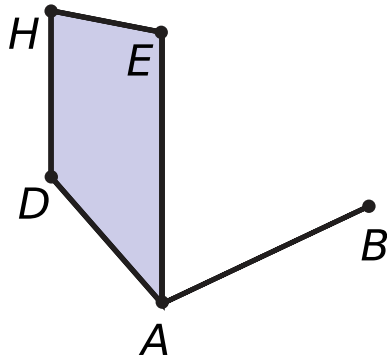
Werkblad bij opgave 11 op pagina 57.



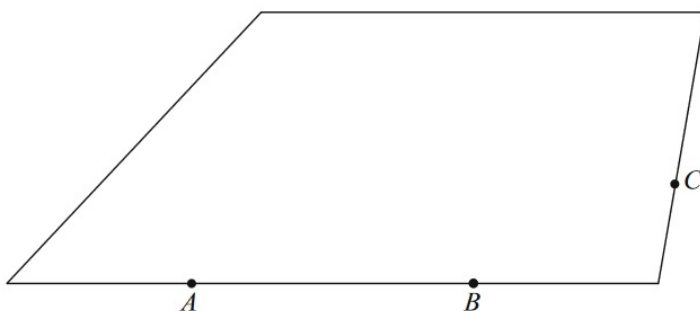
Werkblad bij opgave 12 op pagina 57.



Werkblad bij opgave 13 op pagina 57.



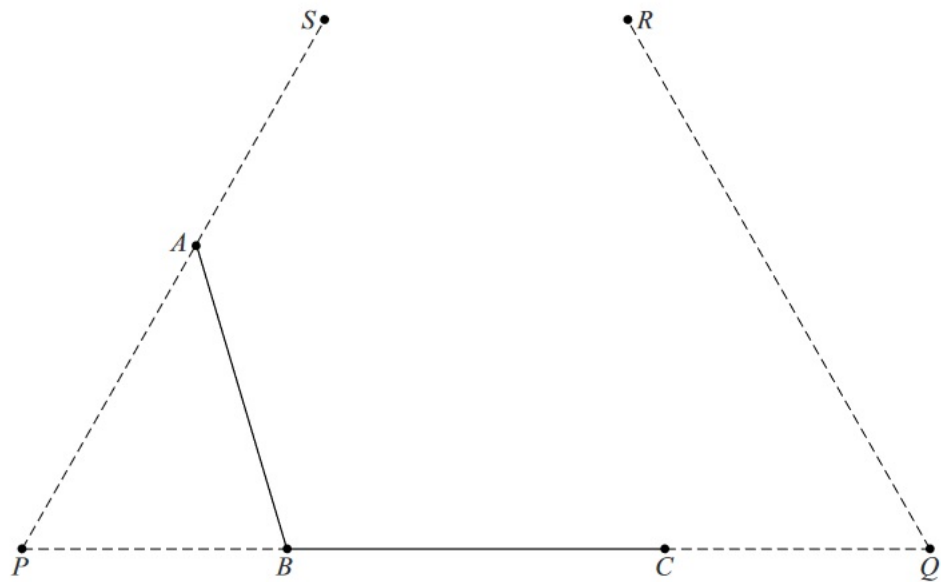
Werkblad bij opgave 17 op pagina 61.



Werkblad bij opgave 18 op pagina 63.



Werkblad bij opgave 19 op pagina 64.



Werkblad bij opgave 5 op pagina 72.

