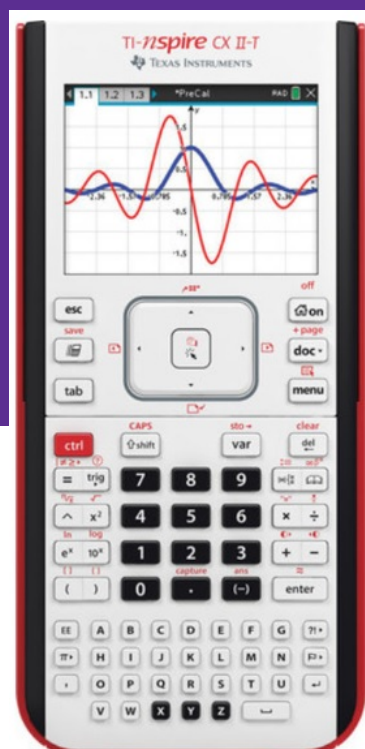


Math4All Practicum GR

TI Nspire



Inhoud

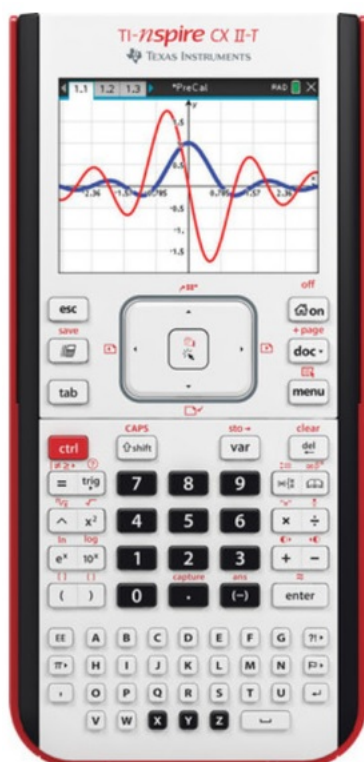
Basistechnieken TI Nspire	3
Functies en de TI Nspire	13
Integralen en de TI Nspire	21
Kansverdelingen en de TI Nspire	25
Matrixrekening en de TI Nspire	35
Parameterkrommen en de TI Nspire	39
Regressie en de TI Nspire	43
Rijen en de TI Nspire	47
Simulaties en tellen en de TI Nspire	53
Statistiek en de TI Nspire	57
Veranderingen en de TI Nspire	61

Basistechnieken TI Nspire

Als je dit practicum doorwerkt, weet je de eerste beginselen van het werken met de grafische rekenmachine TI Nspire van Texas Instruments.

Inhoud

1	De rekenmachine aanzetten	4
2	Rekenen	5
3	Doorrekenen met tussenresultaten	7
4	Grafieken maken	8
5	Vergelijkingen oplossen	10
6	Snijpunten van twee grafieken	11



1 De rekenmachine aanzetten

Je zet de machine **aan** door  te drukken. Deze knop zit aan de rechterkant direct onder je scherm.

Het scherm licht nu op. Als je de rekenmachine voor het eerst aanzet, kan het opstarten een tijdje duren.

CTRL activeert de "blauwe functie" van een toets.

Met **CTRL**  kun je de machine weer **uit** zetten.

Met **CTRL** **+** en **CTRL** **-** regel je de helderheid van het scherm.

Als de rekenmachine is opgestart kom je bij het hoofdscherm terecht. Hiernaast zie je hoe dat eruit ziet. Als je een ander scherm voor je ziet, kun je op  drukken om naar het hoofdscherm te komen.



Je kunt eenvoudig alle eventueel **aanwezige programma's en gegevens wissen**:

- Druk op **2** om naar "Mijn documenten" te gaan.
- Druk op **MENU**, linksboven zal nu een menu openen.
- Druk op **C**, de rekenmachine vraagt nu of je alle bestanden en mappen wilt wissen.
- Gebruik de pijltjestoets naar links en druk op **ENTER** om het verwijderen te bevestigen.



2 Rekenen

Om met de TI-Nspire te rekenen, kies je in het hoofdscherm voor "Berekenen". Dit doe je door op **A** te drukken, of door met je pijltjestoetsen op A: Berekenen te gaan staan en **ENTER** te toetsen. Hiernaast zie je hoe je scherm er dan uit komt te zien.

Rekenen gaat nu in grote lijnen hetzelfde als met de rekenmachine die je tot nu toe gebruikt hebt, maar er zullen waarschijnlijk wel wat verschillen zijn in de manier van invoeren van de berekening.

Bijvoorbeeld de wortel van 25 bereken je zo:

CTRL **x²** **2** **5** **ENTER**.

Je ziet dat het scherm een soort kladblok is: je schrijft de berekening gewoon op en met **ENTER** wordt hij uitgevoerd. De toets waarmee je van teken wisselt (en dus een negatief getal invoert) is **(-)**. Er zijn dus **twee verschillende mintekens**! Veel wiskundige berekeningen zijn op te roepen via de knop **int_u**.

Alle wiskundige berekeningen (ook de meer bijzondere) zijn op te roepen via de knop **int_u**. Als je die intoetst, krijg je meerdere menu's. Je loopt er met de pijltjestoetsen van boven naar beneden doorheen.

Je kunt door de verschillende tabbladen navigeren door op het bijbehorende cijfer te drukken.

Het **omzetten van breuken** doe je via het menu.

Een breuk voer je eerst in via **CTRL** **÷**.

Druk daarna op **MENU** en op **2** (Getal). Kies **1** (Converteren naar decimaal) om een breuk om te zetten in een getal.

Kies **2** (Benaderen als een breuk) om een getal om te zetten in een breuk. Denk er weer aan dat je eerst het getal invult, voor je de optie selecteert.

Een breuk vereenvoudigen is heel simpel. Vul een breuk in en druk op **ENTER**, de machine zal de breuk nu zo ver mogelijk vereenvoudigen.

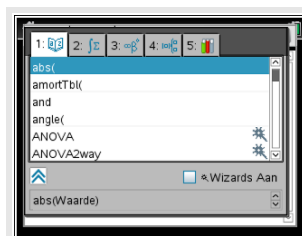
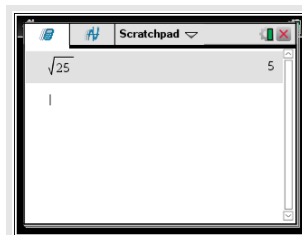
Bij berekeningen met sin, cos en tan, moet je erom denken dat je (voorlopig) in graden moet werken. Je kunt dat instellen door op **DOC** te drukken en dan op **7** (Instellingen & status) en vervolgens op **2** (Documentinstellingen...). Dat is een keuzemenu waar je met behulp van de pijltjestoetsen doorheen kunt lopen. Loop naar "Hoek:" en kies "Graden" en **ENTER** en nog eens **ENTER**.

Je kunt nu sin(30°) berekenen door:

- Toets **trig**.
- Ga met de pijltjestoetsen naar sin en **ENTER**.
- Voer 30 in en **ENTER**. Antwoord: 0.5.

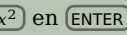
Voor terugrekenen kies je $\sin^{-1}$ in plaats van sin. Vervolgens ga je met de pijltjestoetsen omhoog, zodat je het antwoord van de vorige berekening selecteert. Druk nu twee keer op **ENTER** om terug te rekenen.

Je kunt achter $\sin^{-1}$ ook **CTRL** **(-)** invoeren. Er komt nu $\sin^{-1}(\text{Ans})$ te staan. "Ans" (answer) betekent dat het antwoord van de vorige berekening wordt gebruikt.



Als je een opgave fout hebt ingevoerd en daarna berekend, kun je die opgave met behulp van    nog eens in je scherm krijgen. Je kunt vervolgens met de pijltjestoetsen door die opgave lopen. Je kunt nu iets anders invoeren en met  ingevoerde tekens verwijderen.

Bekijk nu de rekenvoorbeelden.

Rekenvoorbeelden		
Opgave	Intoetsen	Uitkomst
0,625 schrijven als breuk	        	$\frac{5}{8}$
6^2 berekenen	  en 	36
de wortel van 36 met 0,1 vermenigvuldigen	         en  (de pijltjestoets naar rechts is nodig om buiten de wortel te komen)	0.6
6^3 berekenen	   en 	216
6 delen door $2^3 - 5$; bereken dus $\frac{6}{2^3-5}$	         en 	2
bereken $4\frac{1}{6} - 1\frac{2}{3}$	             en 	$\frac{5}{2}$
bereken $2,6 \times 10^6 \times -1,14 \times 10^{-5}$	                      en 	-29.64

Zelf narekenen

- $(-4)^3 + 6^2 = -28$
- $3\sqrt{6} + \sqrt[3]{30} \approx 10,4557$
- $\frac{3}{4}\pi \cdot 12^3 \approx 4071,504$
- $\frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 3}}{2 \cdot 0,5} \approx -0,6411011$
- $\frac{-5 - \sqrt{5^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 3}}{2 \cdot 0,5} \approx -9,358899$
- $-1,42 \cdot 10^6 + 0,92 \cdot 10^7 = 7780000$
- $6\frac{5}{7} - 4\frac{7}{8} = \frac{103}{56} \approx 1,839286$
- $\frac{5-12}{8-1} = -1$



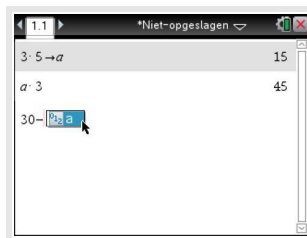
3 Doorrekenen met tussenresultaten

Soms heb je een berekening uitgevoerd, waarvan je het resultaat in een andere berekening nodig hebt. Het resultaat van de oude berekening opnieuw intypen bij de nieuwe berekening is vaak onnauwkeurig en kost veel moeite.

Bij heb je al ontdekt dat je met met **CTRL** **(-)** (ANS) je meest recente antwoord (answer) gemakkelijk terug kunt halen. Voor het doorrekenen met oude tussenresultaten heb je de volgende mogelijkheden:

1. Druk in je rekenscherf herhaaldelijk op **▲** totdat je het gewenste oude resultaat hebt geselecteerd. Druk nu op **ENTER**. Het resultaat komt nu achteraan je nieuwe berekening te staan.
2. Soms wil je niet dat het resultaat achteraan je nieuwe berekening komt te staan, maar ergens middenin. Kopieer in dat geval het oude resultaat door het te selecteren en vervolgens op **CTRL** **C** te drukken. Vervolgens ga je naar je huidige berekening en ga je in de berekening staan op de plek waar je het tussenresultaat wilt hebben. Nu druk je op **CTRL** **V** om het resultaat te plakken. Dit werkt dus net zoals op je computer!
- 3.

Als je bij het berekenen van een tussenresultaat al weet dat je het later weer nodig gaat hebben, kun je het resultaat opslaan in je rekenmachine. Dit doe je door aan het eind van je berekening **CTRL** **VAR** (sto →) in te toetsen. Er komt nu een pijltje achter de berekening. Achter deze pijl geef je aan welke naam je de opgeslagen berekening wilt geven, bijvoorbeeld **A**. Voer de berekening nu uit met **ENTER**.



Als je het opgeslagen resultaat weer ergens wilt gebruiken, druk je op **VAR** en kies je het gewenste opgeslagen resultaat. Je kunt overigens ook gewoon de naam van je opgeslagen resultaat in je nieuwe berekening typen, dus zonder de knop **VAR**.



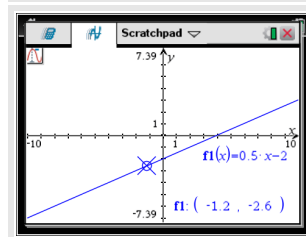
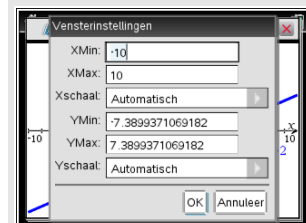
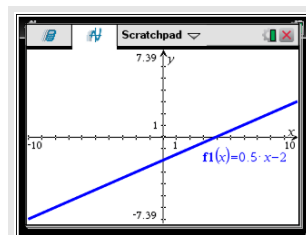
4 Grafieken maken

Hét sterke punt van de grafische rekenmachine is het tekenen van grafieken bij een ingevoerde formule.

Om met de TI-Nspire te grafieken te maken toets je  en kies je in je hoofdscherm voor "Grafiek" door **B** te drukken, of door er met je pijltjestoetsen op te gaan staan en op **ENTER** te drukken. Je ziet nu een leeg assenstelsel.

Zo kun je een grafiek tekenen bij de formule $y = 0,5x - 2$:

- Toets **MENU** **3** (Grafiek invoeren/bewerken) en **1** (Functie) en je ziet in een balk bovenaan het grafiekenvenster $f1(x) =$ staan.
(Het kan zijn dat dit al meteen in beeld komt als je het grafiekenvenster voor de eerste keer opent.)
- Toets achter $f1(x) = 0.5$ **(X)** **-** **2** en je hebt de formule ingevoerd.
- Toets daarna **ENTER** en in principe krijg je de grafiek in beeld (Dat hoeft echter niet, want het kan zijn dat de grafiek buiten het schermgebied ligt. Toets dan **ZOOM** en kies met behulp van de pijltjestoetsen ZStandard en **ENTER**). De grafiek is nu normaal gesproken te zien).



Als je nu op **MENU** drukt en vervolgens op **4** (Venster) en **1** (Vensterinstellingen...), verschijnen de vensterinstellingen. Hier kun je bepalen wat de maximale en minimale waarden van x en y moeten zijn.

Ook kun je de schaal van de x- en de y-as veranderen.

Deze staat standaard op automatisch. Vaak is het handig om deze daarop te laten staan.

Experimenteer er maar even mee...

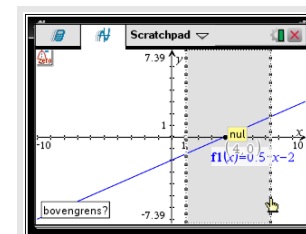
Als je op **MENU** drukt en vervolgens op **5** (Spoor) en **1** (Grafiekspoor) zie je een rondje met een kruis erdoor op je grafiek verschijnen. De coördinaten van dat punt staan ook op je scherm. Met de pijltjestoetsen kun je het punt verplaatsen op de grafiek. Zo kun je van verschillende plaatsen op de grafiek gemakkelijk de coördinaten aflezen.

Als je snel naar een bepaald punt wilt, kun je de x-coördinaat intypen en op **ENTER** drukken. Heb je meerdere grafieken, dan kun je met de pijltjestoetsen van de ene naar de andere grafiek springen. Kies je in plaats van **1** (Grafiekspoor) voor **2** (Alles volgen), kun je de coördinaten van alle grafieken tegelijk aflezen. Om te stoppen met aflezen, druk je op **ESC**.

Als je geïnteresseerd bent in de coördinaten van een specifiek punt, zoals een nulpunt, minimum of maximum, druk je op **MENU** en vervolgens op **6** (Grafiek analyseren). In dit submenu zie je die specifieke punten staan.

Als je het **nulpunt** wilt weten, druk je dus op **1** (Nulpunt).

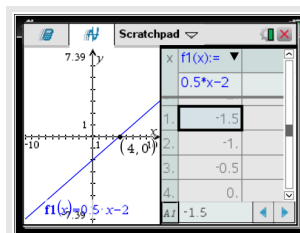
Als je meerdere grafieken heb, kies je eerst van welke grafiek je het nulpunt wilt weten. Vervolgens moet je een onder- en bovengrens instellen, oftewel: het gebied waarin je het nulpunt wilt aflezen. Met de pijltjestoetsen ga je naar de goede positie en met **ENTER** bevestig je de grens. Als je beide grenzen hebt ingesteld, zet de machine de coördinaten bij het nulpunt neer.



Tenslotte nog dit:

Je kunt het beeldscherm van de TI Nspire splitsen. Als je bij **MENU** kiest voor **7** (Tabel) en **1** (Tabel met gesplitst scherm), dan krijg je in de rechterhelft van het grafiekenscherf een tabel te zien. Dit gaat sneller via **CTRL T**.

Toets je in dat gesplitste scherm **MENU** dan vind je allerlei mogelijkheden om de tabel aan te passen, onder andere de stapgrootte. En ook kun je hier de tabel verwijderen, hoewel dat weer sneller gaat via **CTRL T**.



Oefenen

Teken grafieken bij de volgende formules. Kies de beste beeldscherm instellingen om de grafieken in beeld te brengen. Zoek snijpunten met de assen en onderlinge snijpunten op, maak een tabel bij elke formule.

- $y = -0,5x^2 + 8$
- $y = 20 - x$
- $y = 10x^2(x - 10)$
- $y = x^4 - 16$

Experimenteer vervolgens een tijdje met iemand samen: geef elkaar verschillende formules op die de ander dan zo mooi mogelijk in beeld moet brengen. Laat elkaar snijpunten met de assen, onderlinge snijpunten en dergelijke opzoeken.



5 Vergelijkingen oplossen

Met de TI Nspire machine kun je op diverse manieren vergelijkingen oplossen. Een heel rechtstreekse manier is het gebruiken van de nSolve (de oplosser). Andere manieren hebben vaak met grafieken te maken. Daarover meer in het practicum: Functies.

Zo kun je deze vergelijking oplossen: $0,5x - 2 = 12$.

- Toets  en kies je in het hoofdscherm voor "Berekenen".
- Typ in "nSolve(" (zonder aanhalingstekens), of druk op  en zoek in tabblad 1 "nSolve(" op en druk op **ENTER**.
- Vul achter het haakje je vergelijking in.
- Druk op  en vul dan de naam van de variabele in die je wilt weten. In dit geval is dat dus .
- Sluit af met  en druk op **ENTER**. Je rekenmachine geeft nu de oplossing van de vergelijking.



Deze oplosser zal je goede diensten kunnen bewijzen. Er zijn echter wel een paar haken en ogen:

1. Je krijgt zo maar één oplossing, terwijl vergelijkingen wel meerdere oplossingen kunnen hebben.
2. Bij een vergelijking met meerdere oplossingen krijg je misschien niet de oplossing(en) die voor jouw probleem nodig is (zijn).

Gedeeltelijk zijn deze problemen gelukkig op te lossen. Je bij de nSolve namelijk een schatting maken. In plaats van simpelweg X achter de komma te zetten, kun je X=... achter de komma zetten. Je rekenmachine zoekt nu een oplossing zo dicht mogelijk in de buurt van het ingevulde getal.

Oefenen

Los de volgende vergelijkingen volledig op (d.w.z. dat je alle oplossingen moet vinden):

Vergelijking		Uitkomst
a	$0,05x + 50 = 0,25x + 20$	$x = 150$
b	$x^2 - 4x = 12$	$x = 6$ en/of $x = -2$
c	$8x - x^3 = 0$	$x = 0$ en/of $x \approx -2,828427$ en/of $x \approx 2,828427$
d	$210x^{1,23} = 400$	$x \approx 1,688545$



6 Snijpunten van twee grafieken

Voor het bepalen van de snijpunten van de grafieken kun je de tabel of het grafiekspoor gebruiken. Dit gaat echter sneller met een speciale functie uit het menu.

Gebruik de formules

$$y_1 = x^3 - 4x \text{ en } y_2 = 0,5x + 3$$

Als je beide invoert als $f_1(x) = x^3 - 4x$ en $f_2(x) = 0,5x + 3$ met de standaard instellingen van het grafiekenvenster, krijg je de drie snijpunten keurig in beeld. Via het menu kun je de snijpunten nu bepalen:

- Toets **MENU** en **6** (Grafiek analyseren).
- Kies nu voor **4** (Snijpunt).
- Als je meer dan twee grafieken hebt ingevoerd, vraagt je rekenmachine nu van welke grafieken je het snijpunt wilt weten. Ga met de pijltjestoetsen naar de ene grafiek en druk op **ENTER**. Ga dan naar de andere en druk weer op **ENTER**. Als je maar twee grafieken hebt ingevoerd, gebruikt je rekenmachine automatisch deze grafieken.
- Stel de onder- en bovengrens in. Zet ze (net als bij de nulpunten en toppen) vlak voor en na het punt dat je wilt weten en **ENTER**. Het snijpunt wordt nu gemarkeerd en de coördinaten worden erbij gezet.

Bereken de snijpunten van de grafieken van f_1 en f_2 .

Als het goed is vind je (in vier decimalen nauwkeurig):

$(-1,6312; 2,1844)$, $(-0,7669; 2,6166)$ en $(2,3981; 4,1991)$.

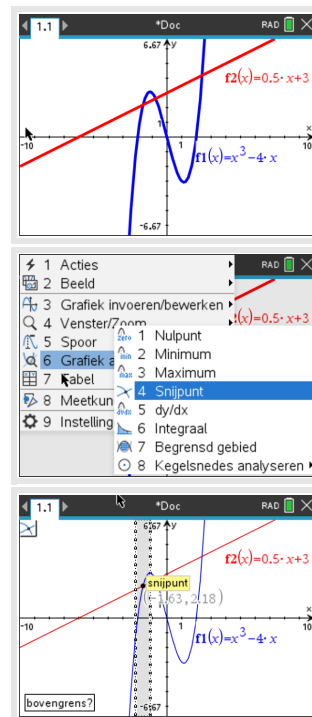
Opmerking:

De TI-Nspire rondt in het grafiekenscherm af op het ingestelde aantal decimalen.

Meestal moet je meer decimalen bekijken. Je doet dat als volgt:

MENU **9** (Instellingen), zet "Cijfers weergeven" op bijvoorbeeld "Drijvend 6" en **ENTER**.

Rond daarna passend af.



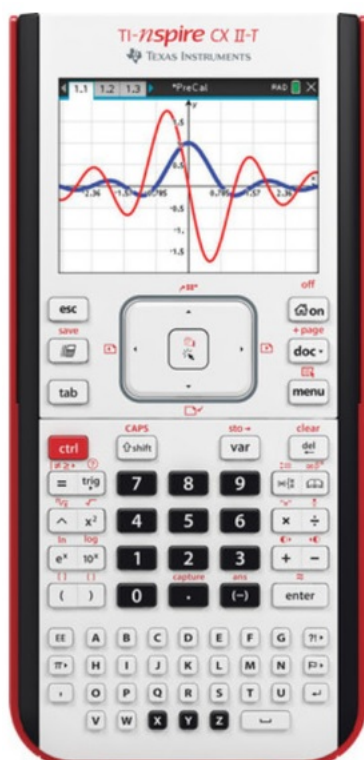
Functies en de TI Nspire

De TI Nspire rekenmachine kan je behulpzaam zijn bij het werken met functies. Bijvoorbeeld kun je gemakkelijk nulpunten, snijpunten, oppervlakte onder een grafiek, de helling van een grafiek bepalen. Verder kun je functies eenvoudig combineren, zelfs schakelen.

Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI Nspire** door.

Inhoud

1	Functiewaarden, nulpunten en toppen	14
2	Snijpunten van twee grafieken	15
3	Functies combineren	16
4	Families van functies	17
5	Hellingen van functies	18
6	Oppervlakte onder de grafiek	19
7	Functies die uit meerdere delen bestaan	20



1 Functiewaarden, nulpunten en toppen

Je weet hoe je een functie kunt invoeren als je in het hoofdmenu via **[B]** Grafieken. Als je eenmaal een functie hebt ingevoerd, kun je er met de verschillende toetsen direct onder het beeldscherm van alles mee doen. Denk aan het maken van een tabel en het lopen over de grafiek met de functie Grafiekspoor. Er zijn echter meer mogelijkheden.

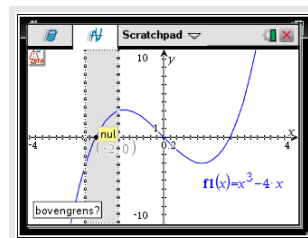
Bekijk de grafiek van de functie: $f_1(x) = x^3 - 4x$.

Breng hem netjes in beeld, kies zodanige vensterinstellingen dat x loopt vanaf -4 t/m 4 en y loopt vanaf -10 t/m 10.

Je gaat nu de karakteristieken van de grafiek (de nulpunten en toppen) van deze formule bepalen.

Je gebruikt hiervoor weer het menu. Druk daarom op **[MENU]** en daarna op **[6]** (Grafiek analyseren). Je hebt nu zeven opties. Voor nulpunten en toppen heb je alleen de eerste drie opties nodig:

- Met **[1]** Nulpunt kun je nulpunten berekenen. Dat gaat zo:
 - Je rekenmachine vraagt eerst om een ondergrens. Plaats deze grens met je mousepad of pijltjestoetsen vlak voor je nulpunt. Je kunt ook een getal intypen. De ondergrens springt nu naar die x -waarde en **[ENTER]**.
 - Vervolgens wordt er om een bovengrens gevraagd. Zet de bovengrens vlak achter het nulpunt en **[ENTER]**.
 - Het nulpunt wordt gemarkeerd en de coördinaten worden erbij gezet.



Controleer dat $(-2,0)$, $(0,0)$ en $(2,0)$ de nulpunten van y_1 zijn.

- Met **[2]** (Minimum) en **[3]** (Maximum) kun je toppen berekenen. Dat gaat vrijwel net zo als bij nulpunten. Controleer dat $(1,155; -3,079)$ en $(-1,155; 3,079)$ de toppen van de grafiek van y_1 zijn.



2 Snijpunten van twee grafieken

Voor het bepalen van de snijpunten van de grafieken kun je de tabel of het grafiekspoor gebruiken. Dit gaat echter sneller met een speciale functie uit het menu.

Gebruik de functies

$$f_1(x) = x^3 - 4x \text{ en } f_2(x) = 0,5x + 3$$

Als je beide invoert met de standaard instellingen van het grafiekenvenster, krijg je de drie snijpunten keurig in beeld. Via het menu kun je de snijpunten nu bepalen:

- Toets **MENU** en **6** (Grafiek analyseren).
- Kies nu voor **4** (Snijpunt).
- Als je meer dan twee grafieken hebt ingevoerd, vraagt je rekenmachine nu van welke grafieken je het snijpunt wilt weten. Ga met de pijltjestoetsen naar de ene grafiek en druk op **ENTER**. Ga dan naar de andere en druk weer op **ENTER**. Als je maar twee grafieken hebt ingevoerd, gebruikt je rekenmachine automatisch deze grafieken.
- Stel de onder- en bovengrens in. Zet ze (net als bij de nulpunten en toppen) vlak voor en na het punt dat je wilt weten en **ENTER**. Het snijpunt wordt nu gemarkeerd en de coördinaten worden erbij gezet.

Bereken de snijpunten van de grafieken van f_1 en f_2 .

Als het goed is vind je (in vier decimalen nauwkeurig):

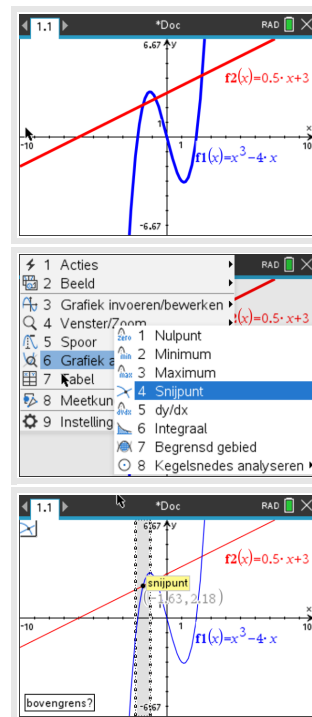
$(-1,6312; 2,1844)$, $(-0,7669; 2,6166)$ en $(2,3981; 4,1991)$.

Opmerking:

De TI-Nspire rondt in het grafiekenscherm af op het ingestelde aantal decimalen.

Meestal moet je meer decimalen bekijken. Je doet dat als volgt:

MENU **9** (Instellingen), zet "Cijfers weergeven" op bijvoorbeeld "Drijvend 6" en **ENTER**. Rond daarna passend af.

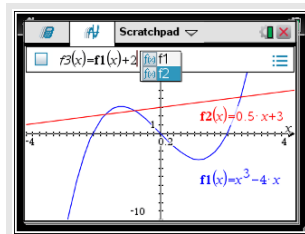


3 Functies combineren

Je kunt met de TI-Nspire eenmaal ingevoerde functies ook bij andere functies weer oproepen. Gebruik de reeds ingevoerde functie f_1 en f_2 .

Als je de grafiek van $f_3(x) = f_1(x) + 2f_2(x)$ dan doe je het volgende:

- Toets **MENU** en ga naar 3: Grafiek invoeren/bewerken en 1: Functie.
- Toets achter $f_3(x) =$ **VAR** en kies f_1 en vul aan tot $f_1(x) + 2\cdot$.
- Toets opnieuw **VAR** en kies f_2 en vul aan tot $f_1(x) + 2 \cdot f_2(x)$ en **ENTER**.
- (Overigens werkt het simpelweg overtypen van de formule zoals hij hierboven staat ook. Gewoon met de letter- en de cijfertoetsen.)



Bekijk de grafiek van f_3 maar eens.

Wil je de grafiek van $f_4(x) = f_1(x + 1)$ bekijken, dan voer je in: $f_4(x) = f_1(x + 1)$ en **ENTER**.

Als je daarbij de grafiek van f_2 maar lastig vindt, dan zet je die even uit door **MENU** te toetsen, 1: Acties en 3: Verbergen/weergeven te kiezen. Je krijgt een oogje linksboven in het scherm. Selecteer met de pijltjestoetsen de grafiek van f_2 en **ENTER**. Met **ESC** gaat het oogje weg en zie je de grafiek van f_2 niet meer. (Je kunt op dezelfde manier die grafiek later weer zichtbaar maken.)

Vergelijk de grafieken van f_1 en f_4 . Probeer te bedenken wat het verband tussen beide is.

Tenslotte kun je functies schakelen. Bijvoorbeeld vind je de grafiek van $f_5(x) = f_1(f_2(x))$ door in te voeren: $f_5(x) = f_1(f_2(x))$. Bekijk de grafiek van f_5 maar eens.

Even oefenen

Bepaal de karakteristieken van de volgende functies:

- $f(x) = 0,5x^4 - 2x^2$
- $g(x) = f(x - 2)$
- $h(x) = 4 - x^2$
- $k(x) = f(x) + h(x)$
- $l(x) = k(0,5x) + 4$



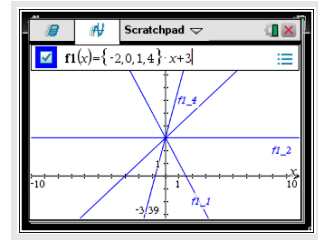
4 Families van functies

Je kunt ook functies invoeren die ongeveer hetzelfde functievoorschrift hebben.

Alle rechte lijnen door (0,3) bijvoorbeeld hebben het functievoorschrift: $f(x) = ax + 3$.

Stel je voor dat je van deze rechte lijnen de grafieken wilt zien voor $a = -2$, $a = 1$, $a = 2$ en $a = 4$.

Dan gebruik je in het functievoorschrift deze haken: { en }. Je krijgt deze haken door op **CTRL** **)** te drukken. Zet deze haken neer op de plaats van de a en zet je waarden ertussen, gescheiden door een komma. Hiernaast zie je hoe dat eruit ziet. Toets **ENTER** en je ziet de vier grafieken.



Je kunt ook in het rekenscherf eerst $\{-2, 1, 2, 4\}$ invoeren en dit via **CTRL** **VAR** (Sto →) **A** opslaan als variabele a . Dan voer je in het functiescherf $f1(x) = a \cdot x + 3$ in en **ENTER**.

Op dezelfde manier kun je grafieken bij andere families van functies tekenen.



5 Hellingen van functies

Je kunt met de TI Nspire op een aantal manieren de helling van een grafiek in een bepaald punt berekenen. Je spreekt wel van het hellingsgetal of de hellingwaarde van een functie $f_1(x)$ voor een bepaalde waarde van x .

Gebruik weer $f_1(x) = x^3 - 4x$ met venster $-4 \leq x \leq 4$ en $-10 \leq y \leq 20$.

Het hellingsgetal krijg je via **MENU** **6** (Grafiek analyseren).

Kies voor **5** (dy/dx).

Nu kun je met de pijltjestoetsen of het touchpad een punt kiezen.

Je kunt ook een getal intypen.

Vul bijvoorbeeld het getal 3 in en **ENTER**.

De rekenmachine geeft dan het bijbehorende hellingsgetal 23.

Let op: deze waarde is vaak een benadering van het werkelijke hellingsgetal.

Je kunt ook een stukje van de bijbehorende raaklijn tekenen.

Toets **MENU** **8** (Meekunde) **1** (Punten en lijnen) **8** Raaklijn en je krijgt linksboven in het scherm het raaklijnsymbool. Selecteer het punt op de grafiek waar de helling 23 bij staat en **ENTER**. Er

komt dan een klein stukje raaklijn in beeld en de vergelijking ervan staat er naast. Als je het punt verplaatst over de grafiek zie je op meer plaatsen de raaklijn aan de grafiek.

Met **ESC** is het raaklijnsymbool weg.

Door het punt met de raaklijn te selecteren en **del** te drukken zijn punt en raaklijn weer weg.

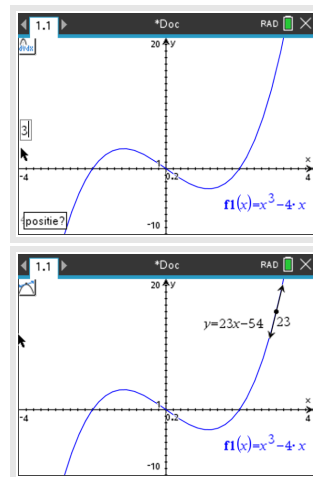
Bepaal zo zelf het hellingsgetal van f_1 voor $x = -1$ en teken de bijbehorende raaklijn.

Ook een **complete hellingsgrafiek** is mogelijk. Als je intoetst:

$$f_2(x) = \frac{f_1(x+0.0001) - f_1(x)}{0.0001}$$

dan is de grafiek van f_2 een goede benadering voor de hellingsgrafiek van de gegeven functie f_1 .

Breng zelf deze hellingsgrafiek van f_1 in beeld.



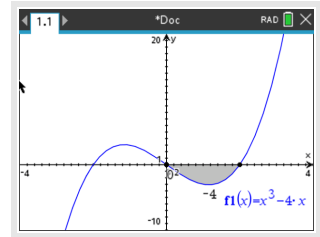
6 Oppervlakte onder de grafiek

Tenslotte kun je met het CALC-menu de **oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as** bepalen.

Je gebruikt daarvoor de integraal van $f(x)$ tussen twee grenzen voor x .

Neem weer de grafiek van $f_1(x) = x^3 - 4x$.

- Toets **MENU** **6** (Grafiek analyseren) en kies voor **6** (Integraal).
- Je krijgt dan de grafiek en een vraag naar de linkergrens (ondergrens?) van het gebied onder de grafiek waarvan je de oppervlakte wilt bepalen. Loop met je cursor naar het gewenste punt, of toets de gewenste x -waarde. Toets vervolgens **ENTER**.
- Vervolgens wordt de rechtergrens (bovengrens?) gevraagd. Voer de gewenste waarde in en **ENTER**.
- Het bedoelde gebied wordt nu 'ingekleurd' en de integraal komt onderaan het scherm in beeld.



Bepaal zelf de integraal tussen de grafiek van y_1 en de x -as tussen $x = 0$ en $x = 2$.

Je vindt als alles goed gaat -4.

Let wel: dit is **niet** de oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as, maar de integraal. Dat betekent dat het gebied tussen $x = 0$ en $x = 2$ als negatief wordt geteld! De oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as tussen $x = 0$ en $x = 2$ is dus 4.

Als het gebied waarvan je de oppervlakte wilt weten zowel boven als onder de x -as ligt, moet je het bij nulpunten opsplitsen!



7 Functies die uit meerdere delen bestaan

Soms bestaat een functie uit meerdere delen. Stel je voor dat het voorschrift van een functie f luidt:

$$f(x) = -2x \text{ als } x < 1$$

$$f(x) = 2x \text{ als } x \geq 1$$

Om zo'n functie te kunnen invoeren in je grafische rekenmachine gebruik je .

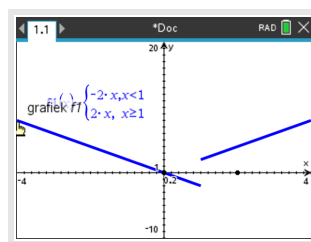
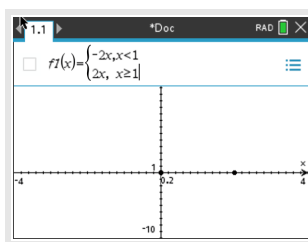
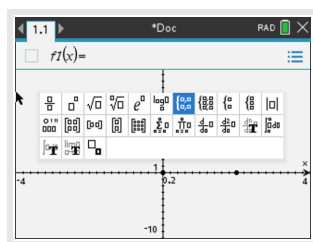
Je krijgt nu een flink aantal mogelijkheden.

Kies hier voor $\begin{cases} [.] & , [.] \\ [.] & , [.] \end{cases}$.

Als je een formule van meer dan twee delen hebt, kies je voor $\begin{cases} [.] & , [.] \\ [.] & , [.] \\ [.] & , [.] \end{cases}$.

In de linker vakjes zet je de formules en in het vakje erachter de voorwaarde die geldt voor die formule.

Na **ENTER** krijg je de grafiek te zien.



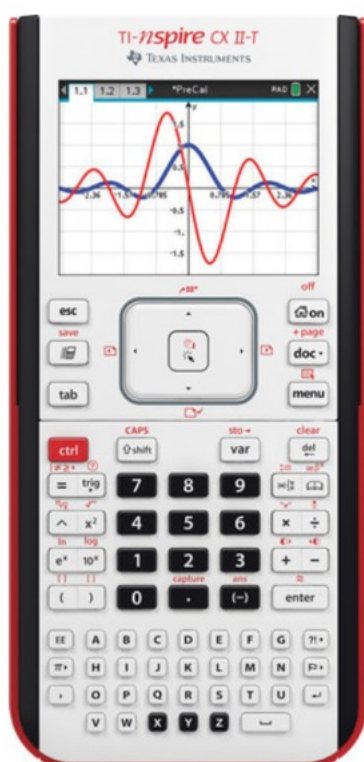
Integralen en de TI Nspire

Met de TI Nspire kun je eenvoudig integralen berekenen. Je kunt echter ook Riemannsommen laten berekenen.

Loop eerst de practica: **Functionies en de TI Nspire** en **Rijen en de TI Nspire** door.

Inhoud

1	Integralen benaderen	22
2	Ondersom en bovensom	23



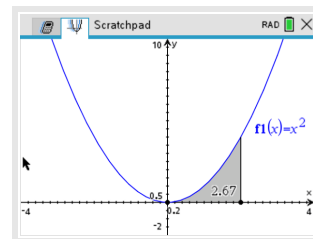
1 Integralen benaderen

Met de TI Nspire kun je integralen rechtstreeks berekenen (benaderen) vanuit het functievoorschrift.

Neem de functie $f(x) = x^2$.

Stel je voor dat je de integraal van deze functie over het interval $[0,2]$ wilt weten. Je wilt dus berekenen: $\int_0^2 x^2 dx$.

- Voer $f1(x) = x^2$ in.
- Stel als venster bijvoorbeeld $-4 \leq x \leq 4$ bij $-2 \leq y \leq 10$ in en bekijk de grafiek.
- Toets **MENU**, **6** (Grafiek analyseren) en **6** (Integraal).
- Je krijgt dan de grafiek te zien en een vraag naar de linkergrens (ondergrens?) van het gebied onder de grafiek waarvan je de integraal wilt bepalen. Toets de gewenste x -waarde en **ENTER**.
- Vervolgens wordt de rechtergrens (bovengrens?) gevraagd. Voer de gewenste waarde in en **ENTER**.



Het bedoelde gebied wordt nu ingekleurd en de benadering van de integraal komt onderaan het scherm in beeld.

Je vindt als alles goed gaat 2,67 (Wat je natuurlijk net zo eenvoudig door primitiveren had kunnen vinden.)

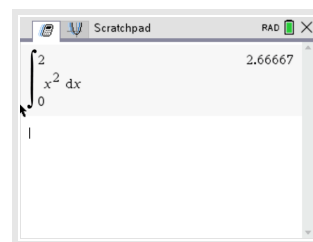
Door het punt op de x -as bij de bovengrens te selecteren en **DEL** te drukken, haal je de inkleuring weer weg.

Oefen jezelf met lastiger functies, met name met functies die je moeilijk of niet kunt primitiveren. Bekijk ook nog eens het verschil tussen de oppervlakte tussen de grafiek en de x -as op een bepaald interval en de bijbehorende integraal.

Een andere manier om deze integraal te berekenen is via het rekenscherm:

- Kies **Int** en dan het sjabloon.
- Vul nu de integraal in zoals hij in de figuur hiernaast staat.
- Toets **ENTER** om de benadering uit te voeren.

Ga na, dat je ook nu 2,666... vindt.



2 Ondersom en bovensom

De integraal van de grafiek van $f(x) = x^2$ op het interval $[0,2]$ kun je benaderen door dit interval per eenheid in n gelijke deelintervallen te verdelen (in totaal zijn er op $[0,2]$ dus $2n$ deelintervallen).

Omdat deze functie op dit interval overal stijgend is, is de **ondersom** gelijk aan:

$$\underline{S}_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

De **bovensom** is:

$$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

Het gaat hierbij dus om sommen van de rij t_k met directe formule:

$$t_k = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

Voor n worden steeds verschillende getallen gekozen, afhankelijk van het aantal deelintervallen waarin je per eenheid $[0,2]$ verdeelt.

De ondersom en de bovensom kunnen als rijen getallen worden ingevoerd:

- Voer in het menu **FUNCTIONS** de rij die hoort bij de ondersom:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{ en de bovensom: } v(n) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{ in.}$$

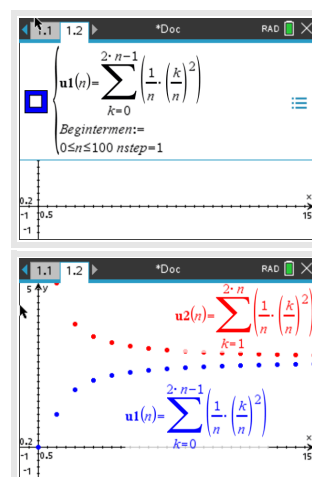
- Voer achter $u1(n)$ = de sommatie in die je kunt vinden via  en het symbool met het Σ -teken en **ENTER**.
- Vul dit vervolgens in zoals je in de figuur ziet, de k krijg je via **K**.
- Doe hetzelfde voor de bovensom $v(n)$ bij $u2(n)$.
- Bekijk de grafieken en de tabellen van beide rijen.

Je ziet, dat ondersom en bovensom elkaar naderen naarmate n groter wordt.

Denk er om dat deze werkwijze alleen opgaat bij functies die op het hele integratieinterval stijgend zijn of op het hele integratieinterval dalend zijn! Is dit niet het geval dan kun je niet met rijen werken.

Even oefenen

Oefen het benaderen van integralen met onder- en bovensommen.



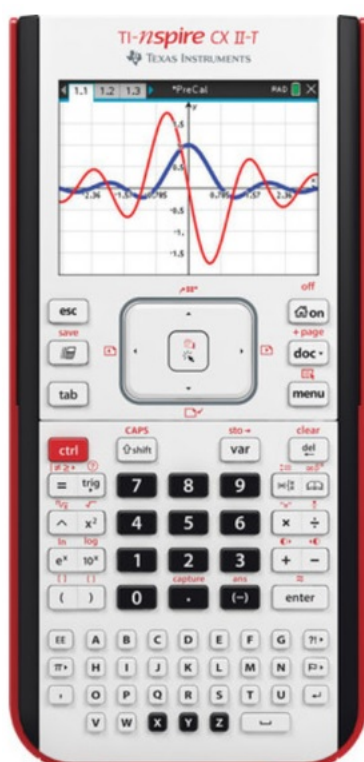
Kansverdelingen en de TI Nspire

Met de TI Nspire kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de TI Nspire en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.

Loop (ook) eerst het practicum: **Simulaties en telsystemen** door.

Inhoud

1	De binomiale kansverdeling	26
2	Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen	27
3	Kanshistogrammen	28
4	Betrouwbaarheidsinterval bij proporties	29
5	De normale kansverdeling	30
6	Grenswaarden bij normale kansverdelingen	31
7	Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden	32
8	Gemiddelde of standaardafwijking berekenen	33



1 De binomiale kansverdeling

Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0,23 = 0,77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$P(X = k) = \binom{100}{k} \cdot 0,23^k \cdot 0,77^{100-k}$$

hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(100-k)!}$ wat er op de TI Nspire uit ziet als nCr(100,k).

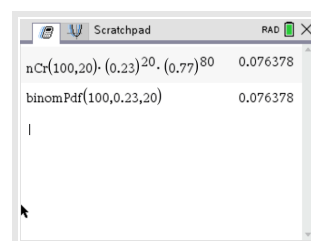
De kans $P(X = 20)$ is dan gewoon in je rekenvenster te bepalen:

- Kies eerst: **MENU** **5** **3** (Combinaties). Zet tussen de haakjes: 100,20.
- Vervolg met $\cdot 0,23^{20} \cdot 0,77^{80}$ en **ENTER**.

Het antwoord zie je in het venster hiernaast.

Dit kan echter gemakkelijker. De TI Nspire kent namelijk de functie "binompdf" (binomial probability distribution function) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

- Druk op **MENU** **5** (Kansen) **5** (Verdelingen) en **D** (Binomiale Pdf). Een venstertje verschijnt.
- Voer bij Aantal pogingen, n: 100 in, bij Kans op succes p: 0.23 en bij X-waarde: 20 en [OK].
- Je ziet nu binomPdf(100,0.23,20) en het antwoord 0.076378.
(Je kunt ook gewoon in het rekenscherm binomPdf(100,0.23,20) typen en **ENTER**.)



Op deze manier kun je ook $P(X \leq 20)$ berekenen door binomcdf(te kiezen.

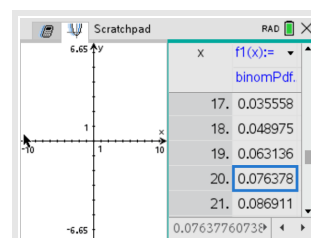
Voor andere varianten moet je vervolgens omrekenen.

Ga na:

- $P(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2810...$
2ND **VAR** en kies B: binomcdf(en vul de juiste waarden voor trials, p en x value in en voer de berekening uit.
- $P(X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 19) = 0,2046...$
- $P(X \geq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 19) = 0,7953...$
- $P(X > 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7189...$
- $P(10 \leq X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9) = 0,2808...$
- $P(10 < X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2040...$

Een **complete kansverdeling** is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele x in het menu **FUNCTIONS** als functie $f1(x) = \text{binomPdf}(100,0.23,x)$ in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken.

In de figuur hiernaast zie je hoe dat er uit ziet. Een grafiek is hierbij niet te maken.



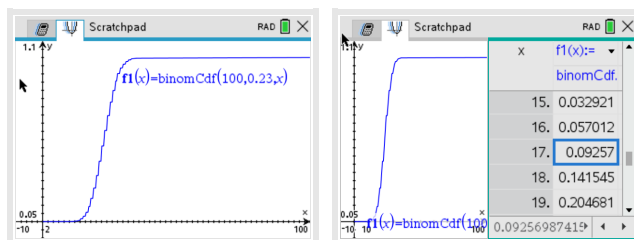
2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen

Vooraf bij het toetsen van hypothesen wil je **grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen**.

Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele x met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als $f1(x) = \text{binomCdf}(100,0.23,x)$ in het menu **FUNCTIES** en dan de tabel van die functie (stapgrootte 1) in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. Je ziet ook een bijpassende grafiek als je de goede vensterinstellingen kiest. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.



Er zijn weer varianten mogelijk, bijvoorbeeld:

- Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X < g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
In dit geval gebruik je dat $P(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
De waarde 17 die je krijgt is dan dus $g - 1$, zodat nu $g = 18$.
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X \geq g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
In dit geval gebruik je dat $P(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) > 0,90$.
Ga na, dat nu $g = 29$.



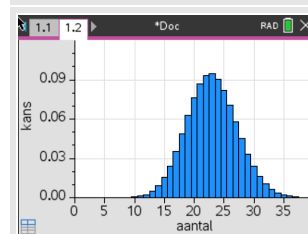
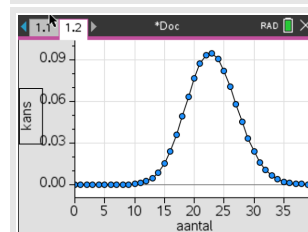
3 Kanshistogrammen

Bij een binomiale kansverdeling kun je een kanshistogram maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat kun je zo doen:

- Ga naar **LIJST & SPREADSHEET...** en maak eventueel eerst de eerste twee lijsten leeg.
- Geef kolom A een naam, bijvoorbeeld "aantal". In deze kolom komt de rij getallen van 0 t/m 100.
- Ga ergens in kolom A staan en druk op **MENU**, **3** (Gegevens) en **1** (Getallenrij genereren). Er opent een venster.
Je wilt gewoon een rij getallen 0 t/m 100, dus de formule is: $u(n) = n$.
Vul dat in. Zet "n0" op 0 en de "nMax" op 100. Laat "nStap" op 1 staan. Druk vervolgens op [OK].
- Geef kolom B ook een naam, bijvoorbeeld "kans". In deze kolom komt de bijbehorende binomiale kansen.
- Ga ergens in kolom B staan en druk op **MENU**, **3** (Gegevens) en **1** (Getallenrij genereren). Er opent een venster.
- Je wilt gewoon de kansen bij 0 t/m 100 hebben, dus de formule is: $u(n) = \text{binomPdf}(100, 0.23, n)$.
Vul dat in. "n0" blijft op 0 en "nMax" op 100. Ook "nStap" blijft op 1 staan. Druk vervolgens op [OK].
- Nu je de kolommen A en B hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken met het menu **STATISTIEK**.
- Zet "aantal" op de x-as en "kans" op de y-as.
Pas eventueel de vensterinstellingen aan.
Doe dit via **MENU**, **5** (Venster/Zoom), **1** (Vensterinstellingen). Laat de x dan bijvoorbeeld van 0 t/m 40 lopen laat y automatisch bepalen.
- Je kunt ook een echt kanshistogram maken. In het practicum "Statistiek" zie je hoe dat gaat.

A	B	C	D
=seqgen(=seqgen(			
1	0	4.45731...	
2	1	1.3314e...	
3	2	1.96857...	
4	3	1.92085...	
5	4	1.39137...	

B: kans:=seqgen(binompdf(100,0.23,n)



Oefen jezelf door zo een paar kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken. Cumulatieve kanshistogrammen lukken ook.

Als je een kansverdeling in de TI Nspire hebt ingevoerd, dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- Het centrum van de kansverdeling van X is de **verwachting** μ_X of $\bar{X}$.
- De spreiding van de kansverdeling van X is de **standaardafwijking** σ_X .

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je weer naar tabblad 1.1 en ga je in één van beide eerste kolommen staan. Via **MENU** **1** (Statistieken) **1** (Statistiekberekeningen) **1** (Statistieken voor één variabele) kies je voor Aantal lijsten: 1 en [OK]. Je X1-lijst is "aantal" en de frequentie is "kans". Laat het resultaat in kolom C zetten. Druk [OK] en je krijgt alle waarden van de verdeling.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. De verwachting is 23 en de standaarddeviatie is ongeveer 4,21.



4 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

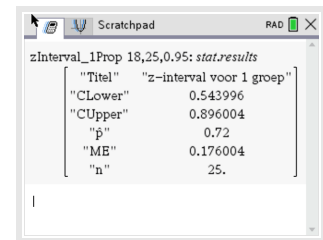
Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.

Het aantal successen in deze steekproef is 18

Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie.

- Ga naar het rekenscherf en toets **MENU** **6** (Statistieken) **6** (Betrouwbaarheidsintervallen) **5** (z-Interval met 1 prop...)
- Voer vervolgens in Successen, x: 18 en n: 25 en C-niveau: 0.95 (C van confidence) en [OK].
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval $[0,544; 0,896]$ en ook zie je de proportie $\hat{p} = 0,72 = \frac{18}{25}$. Zie de figuur.



In drie decimalen nauwkeurig ligt het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie tussen 0,544 en 0,896.



5 De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de TI Nspire.

- $P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,4282...$
Toets in het rekenscherf **MENU** **5**(Kansen) **5**(Verdelingen).
Kies **2** Normale Cdf en vul bij Ondergrens: 95 in, bij Bovengrens: 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar [OK].
- $P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,2023...$
Toets **MENU** **5**(Kansen) **5**(Verdelingen).
Kies **2** Normale Cdf en vul bij Ondergrens: -1000 in, bij Bovengrens: 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar [OK].
- $P(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 1 - P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,7976...$
Toets **MENU** **5**(Kansen) **5**(Verdelingen).
Kies **2** Normale Cdf en vul bij Ondergrens: 95 in, bij Bovengrens: 1000 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar [OK].

Loop al deze berekeningen zelf na!

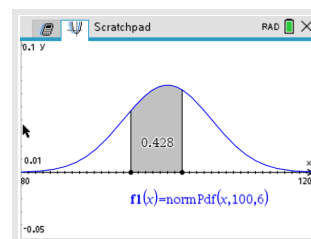
Bij een normale kansverdeling kun je op de TI Nspire de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je het menu DISTR.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

$$P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,4282...$$

Je gaat naar het menu **FUNCTIONS** en je zorgt ervoor dat er geen functies meer zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens:

- Vul $f1(x) = \text{normPdf}(x, 100, 6)$ in als functie.
Je kunt normPdf(vinden via  bij "Kans", "Verdelingen", Normale Pdf (of door het in te typen).
- Stel het venster zo in dat x loopt van 80 t/m 120 en y (de kansen) loopt van -0,05 t/m 0,1.
- Bepaal nu de oppervlakte onder de grafiek van $x = 95$ tot $x = 102$.



- In het practicum "Functies" heb je gezien hoe je oppervlaktes onder de grafiek bepaalt.
- De figuur hiernaast komt dan in beeld.



6 Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de TI Nspire. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

- $P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$
Toets in het rekenschermblok **MENU**, **5** (Kansen), **5** (Verdelingen) en **3** (Inverse-normaal).
Vul in: Oppervlakte: 0.20, μ : 100 en σ : 6 en [OK];
Je vindt $g = 94,9503$ dus $g \approx 95$.
- $P(X > g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$ geeft $P(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,80$
Dit doe je dan op een vergelijkbare wijze, nu krijg je $g \approx 105$.

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!



7 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Dat bereken je met een speciale functie: z-interval.

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma_X = 4$.

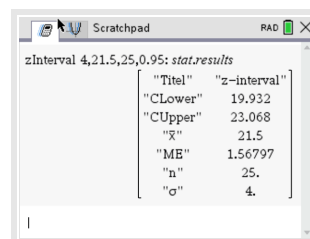
Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.

Het gemiddelde van deze steekproef $\bar{X} = 21,5$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is en dus de z -verdeling gebruiken.

- Ga naar het rekenschermb en toets **MENU** **6** (Statistieken) **6** (Betrouwbaarheidsintervallen) **1** (z-Interval).
- Kies bij Invoermethode: Stats en [OK].
- Vul in σ : 4, $\bar{X}$ -staaf: 21.5, n : 25 en C-level: 0.95 en [OK].
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval [19,932; 23,068]. Zie de figuur.



"Titel"	"z-interval"
"CLower"	19.932
"CUpper"	23.068
"x"	21.5
"ME"	1.56797
"n"	25.
"sigma"	4.

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1.



8 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen

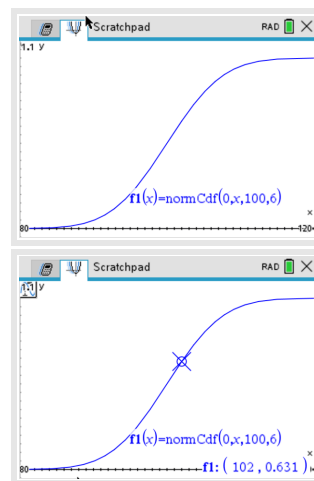
Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met normalcdf. Je kunt in het Y= scherm de cumulatieve normale verdeling normalcdf invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$$P(X < 102 | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6)$$

Je voorziet in het menu **FUNCTIONS** eerst je grafiekscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld laat je x lopen tussen 80 en 120 en laat je y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaal-kromme) tussen -0,1 en 1,1. Zorg dat er geen andere functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld.

- Voer $f1(x) = \text{normCdf}(0,x,100,6)$ in en **(ENTER)**.
- Ga nu naar **(MENU)**, **(5)** (Spoor) en **(1)** (Grafiekspoor) om met de cursor over de grafiek te lopen en kansen te bepalen. Dit is echter nogal grof. Typ daarom gewoon 102 in om de kans bij $x = 102$ te bepalen. Zie de tweede figuur.



Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans. Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$$P(X < g | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$$

Je voert dan bij $f1(x)$ = de cumulatieve normaal-kromme in (net als hiervoor) en bij $f2(x)$ = de gegeven kans 0,2. Met behulp **(MENU)** **(6)** (Grafiek analyseren) en **(4)** (Snijpunt) vind je $g = 94,95027\dots$, dus $g \approx 95$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X de **standaardafwijking** bepalen als gegeven:

$$P(X < 102 | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??) = 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij $f1(x) = \text{normCdf}$ in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\mu = 100$ en $\sigma = x$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 7,8943\dots$

Dus is de standaarddeviatie in dit geval $\sigma \approx 7,9$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X het **gemiddelde** bepalen als gegeven:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij $f1(x) = \text{normCdf}$ in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\mu = x$ en $\sigma = 6$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu gemiddelde!) loopt van 80 tot zeg 120 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 100,4799\dots$

Dus is het gemiddelde in dit geval $\sigma \approx 100,5$.

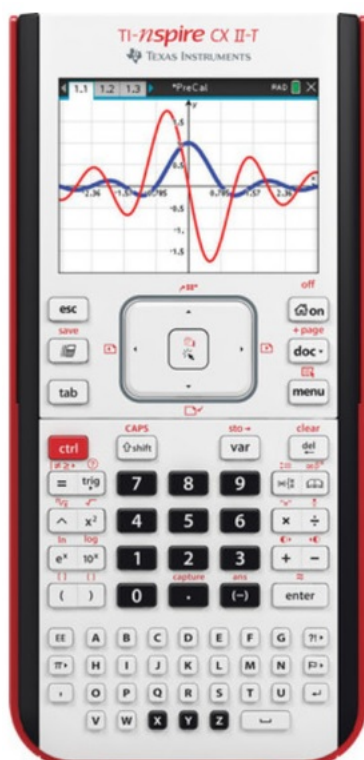


Matrixrekening en de TI Nspire

De TI Nspire kan je behulpzaam zijn bij het rekenen met matrices. Hij kent daarvoor het menu MATRIX. Vooral bij machten van matrices is deze rekenmachine erg handig. Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI Nspire** door.

Inhoud

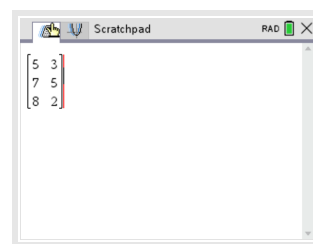
1	Matrices invoeren	36
2	Matrices oproepen en ermee rekenen	37
3	De elementen van een matrix afronden	38



1 Matrices invoeren

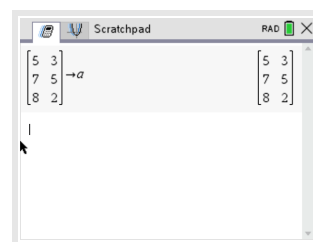
Een matrix invoeren doe je als volgt

- Ga naar het rekenscherf en toets .
- Ga met je pijltjestoetsen naar het icoontje van een 3×3 -matrix en **ENTER**.
- Kies het aantal rijen en het aantal kolommen en **[OK]**. Je ziet een lege matrix met de juiste afmetingen die je kunt invullen, gebruik de pijltjestoetsen.



Je hebt je matrix ingevoerd, maar je wilt er natuurlijk iets mee doen. Daarvoor is het handig om de matrix een naam te geven. Dat doe je zo:

- Toets achter de matrix **CTRL** **VAR**. Er verschijnt een pijltje achter de matrix.
- Typ nu de naam die je de matrix wilt geven. Een logische naam is bijvoorbeeld a .



Voer zelf een matrix a in.

Opmerking:

Het is gebruikelijk om matrices met hoofdletters aan te duiden, maar op de TI Nspire is dat zinloos.



2 Matrices oproepen en ermee rekenen

Elke matrix die je hebt ingevoerd en opgeslagen kun je oproepen in het rekenscherf. Toets daarvoor **(VAR)**, selecteer m.b.v. de pijltjestoetsen de matrix die je op wilt roepen en **(ENTER)**. Je kunt ook gewoon de naam van de matrix in het rekenscherf typen.

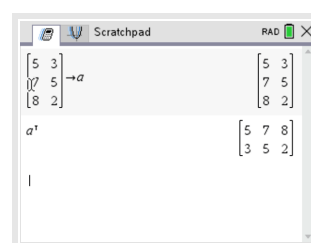
Onthoud wel goed bij welke letter je een bepaalde matrix hebt ingevoerd!

Je kunt een matrix een nieuwe naam geven door de matrix op te roepen en hem onder een nieuwe naam op te slaan. Je verwijdt de oude naam hiermee niet, je geeft je matrix alleen een extra naam. Je matrix heeft nu dus twee verschillende namen waarmee je hem op kunt roepen.

Om met matrices te kunnen **rekenen**, moet je de juiste matrixletter(s) oproepen in het rekenscherf. Je kunt dan de normale matrixbewerkingen uitvoeren, namelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een getal, vermenigvuldigen, machtsverheffen.

Uiteraard gelden dan wel de gebruikelijke rekenregels voor het vermenigvuldigen van matrices.

Soms moet je juist de getransponeerde matrix gebruiken om mee te rekenen. Zet dan eerst de naam van de matrix die je wilt transponeren in je rekenscherf. Toets **(MENU)** en kies **(7)** (Matrix en vector) en **(2)** (Transponeren) en **(ENTER)**. Je krijgt dan de getransponeerde van de gekozen matrix.



Even oefenen

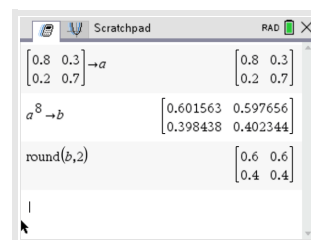
Oefen het rekenen met matrices en controleer nog eens dat je grafische rekenmachine alle rekenregels voor matrices kent.



3 De elementen van een matrix afronden

Soms verschijnen er decimalen, vooral bij overgangsmatrices kan dit het geval zijn. Het is dan mogelijk om de elementen van de matrix af te ronden:

- Voer eerst een matrix in met veel decimalen en geef die een naam, of kijk of er al zo'n matrix is ingevoerd.
- Druk op  en zorg dat je in tabblad 1 zit.
- Druk op **R**, ga met je pijltjestoetsen naar "round(" en **ENTER**. (Je kunt ook gewoon "round(" intypen.)
- Vul achter het haakje de naam van je matrix **[]** en het aantal decimalen in waarop je de matrix wilt afronden, sluit af met een haakje en **ENTER**.
- Je krijgt nu de afgeronde matrix in beeld.



Even oefenen

Voer dit zelf een paar keer uit.



Parameterkrommen en de TI Nspire

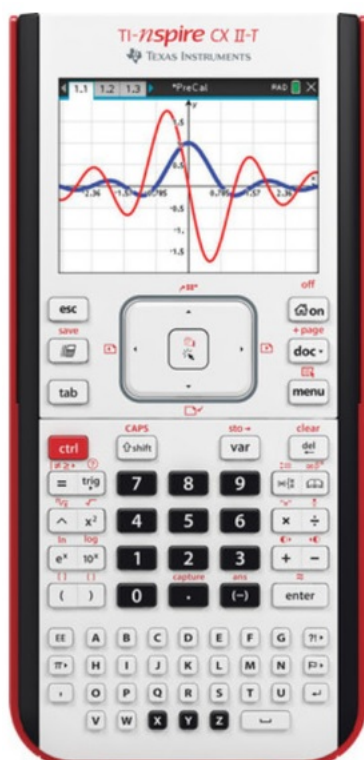
De TI Nspire kan krommen tekenen die worden gegeven door x als functie van t en y als functie van t . De variabele t heet de **parameter** van de kromme, je kunt hem opvatten als de "tijd". Op elk tijdstip t kun je met behulp van de functies $x(t)$ en $y(t)$ berekenen op welke plaats (x,y) het punt dat de kromme doorloopt zich bevindt. Ook kan deze rekenmachine hellingsgetallen berekenen in elk punt van de kromme.

Een andere manier om krommen te beschrijven is met behulp van poolcoördinaten. Daarover gaat het laatste deel van dit practicum.

Loop eerst het practicum: **Functionies en de TI Nspire** door.

Inhoud

1	Een parameterkromme tekenen	40
2	Hellingsgetallen bij parameterkrommen	41
3	Krommen in poolcoördinaten	42



1 Een parameterkromme tekenen

Stel je voor dat je de kromme K wilt tekenen gegeven door:

$$x(t) = 5 \sin(t) \text{ en } y(t) = 5 \sin(2t), \text{ met } t \text{ lopend van } 0 \text{ tot en met } 2\pi.$$

Eerst moet je zeker weten dat je rekenmachine bij het tekenen van grafieken uitgaat van radialen. Ga in het grafiekscherm naar **[MENU]** en **[8]** (Instellingen). In het scherm dat nu opent zorg je ervoor dat de "Grafiektekenhoek" ingesteld staat op radialen en **[OK]**.

Net als bij het invoeren van een normale functie ga je via **[MENU]** en **[3]** (Grafiek invoeren/bewerken) naar **[4]** (Parametervoorstelling). Dan verschijnt de invoerbalk waar je het voorschrift van de kromme in kunt vullen.

In de figuur zie je de kromme op de juiste wijze ingevoerd.

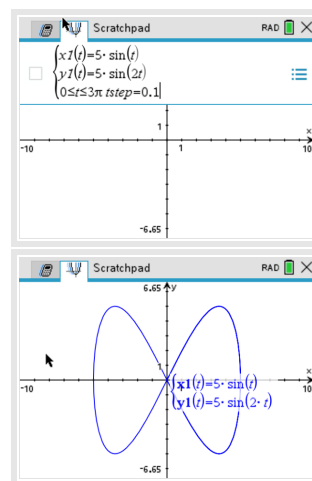
Op de onderste regel van de balk kun je instellingen voor t veranderen. Eerst de waarden van t en vervolgens de stapgrootte die je wilt gebruiken. Standaard loopt t van 0 tot 6,28 (2π). Verander 6,28 in 3π (π vind je linksonder op je toetsenbord). Je kunt ook kleinere stappen maken, maar dan duurt het tekenen van de kromme langer. Maak je daarentegen hele grote stappen, dan worden er maar weinig punten van de kromme berekend, die dan worden verbonden op een zodanige manier dat je de kromme niet herkent!

Na **[ENTER]** wordt de kromme getekend. Er ontstaat een mooie "liggende acht".

Met **[MENU]**, **[5]** (Spoor) en **[1]** (Grafiekspoor) kun je over de kromme lopen. Je gaat er dan met "tijdstappen" van 0,1 overheen. De bijbehorende waarden van t , x en y komen in beeld. Als je naar een precieze waarde van t wilt, type die waarde dan gewoon in, bijvoorbeeld p of 1.5

Experimenteer maar eens even met andere instellingen voor t .

Oefen het tekenen van krommen met de TI Nspire. Zoek voorbeelden van krommen in je wiskundeboek.



2 Hellingsgetallen bij parameterkrommen

Je hebt de kromme $K: (x,y) = (5 \cdot \sin(t), 5 \cdot \sin(2t))$ met t lopend van 0 tot en met 10 bekeken in het voorgaande deel. Zorg ervoor dat deze kromme weer in beeld komt.

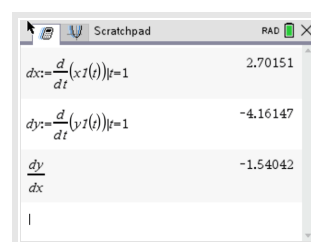
Bij elk punt van deze kromme kun je je afvragen welke **helling** de raaklijn aan de kromme heeft.

Deze helling wordt voorgesteld door $\frac{dy}{dx}$.

Helaas kan de TI Nspire bij parameterkrommen niet op dezelfde wijze als bij functies de helling in een punt bepalen. Maar je kunt die helling wel uitrekenen in het rekenschermb door $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ te gebruiken.

Zo bereken je $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = \frac{y'(1)}{x'(1)}$:

- toets in het rekenschermb $dx := (=$ staat voor "wordt" en bereik je via **CTRL** **[=]**) en vul dit aan via **MENU** **4** (Analyse) en **1** (Numerieke afgeleide in één punt).
- Vul in het dialoogschermb dat je krijgt Variabele: t , Waarde: 1 en Afgeleide: Eerste afgeleide en **[OK]**.
- Vul binnen de haakjes van de uitdrukking in je rekenschermb $x1(t)$ in en **[ENTER]**. Je krijgt nu $x'(1)$ met als naam dx .
- Maak op dezelfde manier $y'(1)$ met als naam dy .
- Voer vervolgens in dy/dx en **[ENTER]**



$dx := \frac{d}{dt}(x1(t)) _{t=1}$	2.70151
$dy := \frac{d}{dt}(y1(t)) _{t=1}$	-4.16147
$\frac{dy}{dx}$	-1.54042

Je hebt nu $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = \frac{y'(1)}{x'(1)}$ gevonden, zie figuur.

Wil je dit voor meer waarden van t doen, dan kun je beter $dx1$ en $dy1$ gebruiken bij de berekening van de helling voor $t = 1$.

Ook kun je je afvragen met welke **snelheid** v de kromme wordt doorlopen in het punt met $t = 1$. Daarvoor gebruik je de verandering van x en die van y in dat punt, dus $x'(1)$ en $y'(1)$: $v(1) = \sqrt{(x'(1))^2 + (y'(1))^2}$.

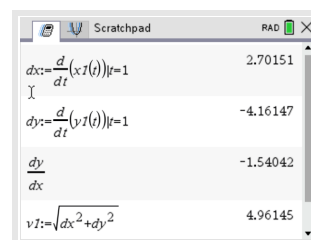
Deze veranderingen heb je zojuist uitgerekend.

De snelheid waarmee het punt de kromme doorloopt voor $t = 1$ bereken je zo:

- Voer onder het voorgaande in: $v1 := \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en **[ENTER]**.

Je vindt bij de gegeven kromme: $v(1) \approx 4,96$ eenheden per tijdseenheid (afgerond op twee decimalen).

Bekijk ook de hellingsgetallen en bereken de doorloopsnelheid in andere punten van deze kromme. Waar gaat het doorlopen het snelst?



$dx := \frac{d}{dt}(x1(t)) _{t=1}$	2.70151
$dy := \frac{d}{dt}(y1(t)) _{t=1}$	-4.16147
$\frac{dy}{dx}$	-1.54042
$v1 := \sqrt{dx^2 + dy^2}$	4.96145



3 Krommen in poolcoördinaten

Een andere manier om een kromme te beschrijven is met zogenaamde **poolcoördinaten**. Daarbij werk je in een x, y -assenstelsel, maar geef je een punt P van een kromme weer door een functie van de vorm $r = f(\theta)$, waarin θ de hoek is die het lijnstuk OP met de positieve x -as maakt.

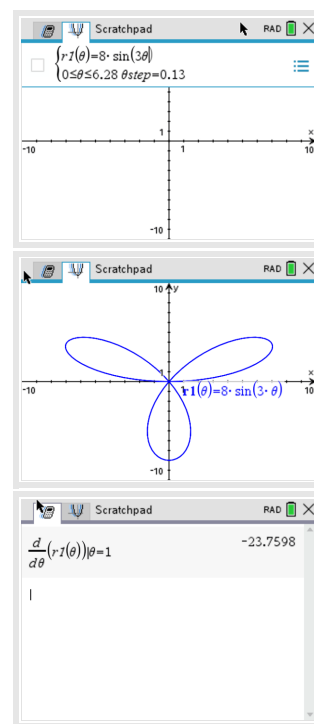
Een driebladige bloem krijg je met $r = 8 \sin(3\theta)$.

Je voert die formule zo in:

- Ga via **MENU** en **3** (Grafiek invoeren/bewerken) naar **5** (Polaire). Dan verschijnt de invoerbalk waar je het voorschrift van de kromme in kunt vullen.
Gebruik **π** voor de variabele. Je kunt dan het teken θ kiezen. In de figuur zie je de kromme op de juiste wijze ingevoerd, hier is $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- Met **ENTER** krijg je de kromme te zien.
- Stel het venster goed in. In dit geval is gekozen voor $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$.

Ook nu kun je met **MENU** **5** (Spoor) **1** (Grafiekspoor) over de kromme lopen, met **MENU** **4** (Venster/Zoom) inzoomen en uitzoomen. Hellingsgetallen kun je niet eenvoudig bepalen. Wel kun je in het rekenscherf $\frac{dr_1}{d\theta}$ berekenen voor verschillende waarden van θ . Maar dat is niet de helling van een raaklijn aan de kromme...

Experimenteer met krommen in poolcoördinaten. Hoe maak je bijvoorbeeld een achtbladige bloem?



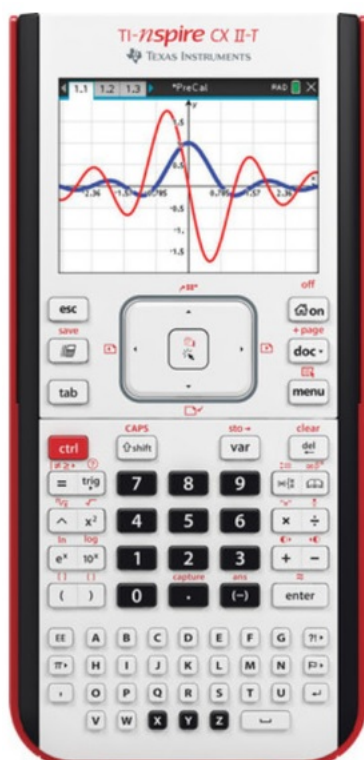
Regressie en de TI Nspire

De TI Nspire kan bij bepaalde soorten verbanden bij een gegeven tabel een formule maken. Als je bijvoorbeeld denkt dat de grafiek bij een gegeven tabel bij benadering een rechte lijn is, dan past daar een lineair verband bij. Deze rekenmachine kan dan een formule voor dat lineaire verband opstellen.

Loop eerst het practicum **Basistechnieken TI Nspire** door.

Inhoud

- | | | |
|---|------------------------------------|----|
| 1 | Een trendlijn bepalen | 44 |
| 2 | De correlatiecoëfficiënt berekenen | 45 |



1 Een trendlijn bepalen

Stel je voor dat je de volgende statistische gegevens hebt:

Lengte vader (cm)	173	168	178	180	165
Lengte zoon (cm)	180	175	180	183	175

Je kunt bij deze waarden een **puntenwolk** maken. Soms liggen die punten ongeveer op een rechte lijn, de zogenaamde **trendlijn** of **regressielijn**. Je kunt dat als volgt nagaan:

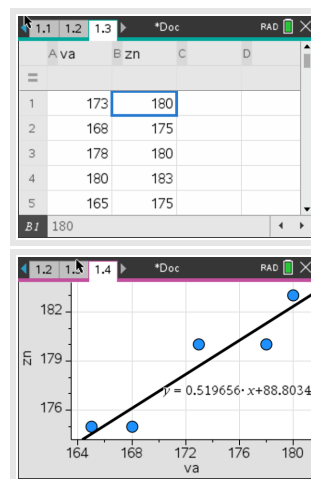
- Ga naar het menu **LIJSTEN & SPREADSHEET...** en geef de kolom A de naam "va" en kolom B de naam "zn".
- Voor de gegevens van de vaders in kolom A en die van de zoons in kolom B in.
- Ga nu naar het menu **GEGEVENSVERWERKING & STATISTIEK** en zet op de x-as de variabele "va" en op de y-as de variabele "zn". Je krijgt nu een assenstelsel met de coördinaten uit je tabel
- Toets **MENU**, **4**(Analyseren) en **6**(Regressie) en kies 1: Lin.regressie weergegeven (mx+b).

Het resultaat is de regressielijn met de bijbehorende vergelijking, in dit geval: $y \approx 0,52 \cdot x + 88,8$.

Probeer zelf het resultaat te krijgen dat je in de figuur ziet.

Opmerking:

Je ziet, dat er veel verschillende regressievormen zijn. Je kunt een kwadratisch, exponentieel, ..., verband kiezen. Afhankelijk van je gegevens past zo iets beter of juist minder goed dan een rechte trendlijn.



2 De correlatiecoëfficiënt berekenen

Gebruik weer de gegevens die eerder in dit practicum zijn ingevoerd.

Ga naar het menu **LIJSTEN & SPREADSHEET...**.

Toets **MENU**, **4** (Statistiek), **1** (Statistiekberekeningen) en **3** (Lineaire regressie (mx+b)).

Voer in het scherm dat je nu ziet in

X-lijst: va

Y-lijst: zn

RegVgl opslaan: f1

en [OK].

	va	zn	C	D
1	173	180	Titel	Lineaire ...
2	168	175	RegEqn	m*x+b
3	178	180	m	0.519656
4	180	183	b	88.8034
5	165	175	r^2	0.893555

D1 = "Lineaire regressie (mx+b)"

In het scherm met de kolommen A en B waar je gegevens in staan, zie je nu extra gegevens, waaronder de waarden voor m en b van je regressielijn.

En ook de **correlatiecoëfficiënt** r_{xy} .

Hier is: $r_{xy} \approx 0,945$.

Er is dus sprake van een hoge correlatie.

Opmerkingen:

- Je hebt vast wel gezien dat er ook andere verbanden tussen de variabelen kunnen worden onderzocht. Je kunt namelijk bij sommige gegevens ook een kwadratisch verband, of een derdegraads of vierdegraads verband, of een exponentieel verband, of een machtsverband of een logaritmisch verband proberen te vinden omdat de gegevens daar beter bij lijken te passen.
- Je kunt ook kiezen voor Lineaire regressie (a+bx). Dan is b de richtingscoëfficiënt van de regressielijn.



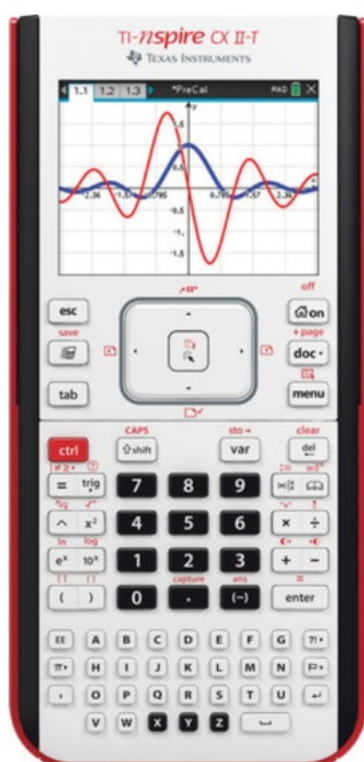
Rijen en de TI Nspire

Met de TI Nspire kun je op diverse manieren rijen in beeld brengen. Verder kun je daarbij ook gemakkelijk somrijen en verschilrijen maken. Je kunt tijdgrafieken en webgrafieken tekenen.

Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI Nspire** door.

Inhoud

1	Rijen met directe formules	48
2	Recursief gegeven rijen	50
3	Tijdgrafiek en webgrafiek	51
4	Stelsels rijen en fasegrafieken	52



1 Rijen met directe formules

Rijen met directe formules kunnen op drie manieren worden ingevoerd.

Ga uit van de rij met directe formule:

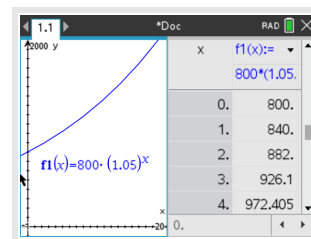
$$u_n = 800 \cdot 1,05^n \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots$$

Rij als functie

Je kunt de rij als een gewone functie opvatten met als domein alleen de getallen 0, 1, 2, 3, 4, ...

Je krijgt dan zo de rij en de grafiek in beeld:

- Voer het functievoorschrift in: $f1(x) = 800 \cdot 1,05^x$.
- Laat de tabel die bij deze functie hoort op je scherm weergegeven. Je ziet nu de termen van de rij.
- Je ziet ook de grafiek van deze rij, helaas als doorgetrokken kromme, niet met losse punten.



Je kunt eenvoudig de bijbehorende **verschilrij** in beeld brengen via: $f2(x) = f1(x + 1) - f1(x)$.

Je vindt $f1$ via **VAR** of door gewoon intypen.

Je kunt de bijbehorende **somrij** maken via $f3(x) = \text{sum}(\text{seq}(f1(x), x, 0, x))$.

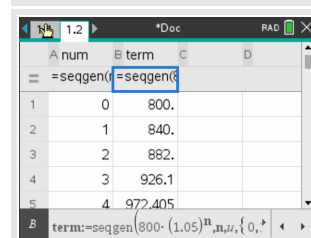
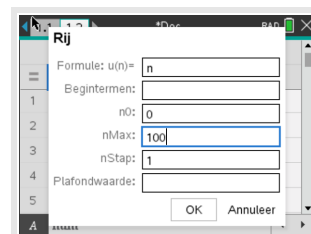
Je kunt "sum(" en "seq(" gewoon zelf intypen, maar ze zijn ook via  op tabblad 1 te vinden.

Bekijk de tabellen en de grafieken van deze rij, de verschilrij en de somrij.

Rij als lijst getallen

Je kunt de rij als een lijst met getallen opvatten. Je kunt hem dan invoeren in het menu **LIJSTEN & SPREADSHEET...**. Dat gaat zo:

- Ga naar het menu en gebruik de kolommen A en B. Geef de kolommen een naam, bijvoorbeeld A "num" (nummer) en B "term".
- Ga ergens op kolom A staan en toets **MENU**, **3** (Gegevens) en **1** (Getallenrij genereren). Je rekenmachine opent nu een venster. Vul het venster in zoals het op het bovenste plaatje hier-naast is ingevuld en [OK]. In kolom A staan nu de getallen 1 t/m 100.
- Ga op kolom B staan en toets **MENU**, **3** (Gegevens) en **1** (Getallenrij genereren). Vul nu als formule in: $u(n) = 800 \cdot 1,05^n$. Laat de overige waarden hetzelfde en [OK]. In kolom B komen nu de termen van de rij.

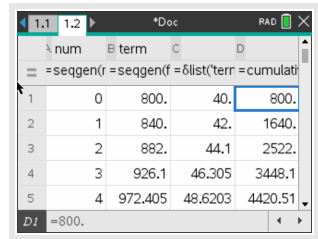


num	term
0	800.
1	840.
2	882.
3	926.1
4	972.405

Opmerking:

Als je de rij eerst als functie $f1$ hebt ingevoerd, kun je hem in kolom B ook oproepen als $f1(n)$.

De bijbehorende **verschilrij** kan nu in kolom C door in het hokje onder het naamhokje van kolom C "deltalist('term)" in te vullen en op **ENTER** te drukken. Je kunt "deltalist(" gewoon typen, maar je kunt het ook via  op tabblad 1 vinden. Je vindt 'term (kolom B) door op **VAR** te drukken en "term" te selecteren.



num	term	D
0	800.	40.
1	840.	42.
2	882.	44.1
3	926.1	46.305
4	972.405	48.6203

Je kunt de bijbehorende **somrij** maken in kolom D door "cumulativesum('term)" in te voeren onder kolom D. Je kunt "cumulativesum(" weer typen of opzoeken via .

Bekijk de tabellen en de grafieken van deze rij, de verschilrij en de somrij.

Rij in de seq-mode

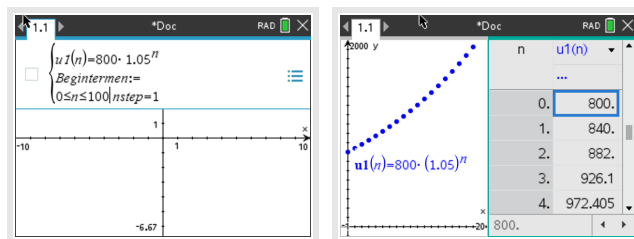
Je gaat daarvoor naar het menu **FUNCTIONS** en toetst **MENU**, **3** (Grafiek invoeren), **7** (Rij) en **1** (Rij).

Achter $u1(n) =$ vul je het voorschrift van de rij in: $800 \cdot 1.05^n$.

Laat de begintermen leeg en laat n lopen van 1 t/m 10, dus: $1 \leq n \leq 100$.

Druk op **ENTER** om de rij in te voeren en pas het venster aan.

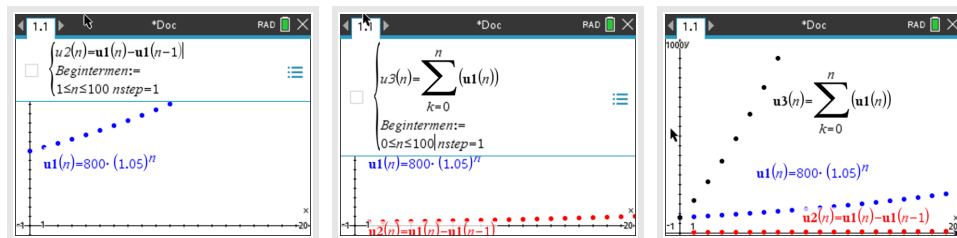
Laat de tabel van de rij weergegeven om de termen van de rij te vinden.



In de figuren hieronder kun je zien hoe hierbij een **verschilrij** en een **somrij** zijn te maken.

Het somteken haal je op via .

Maak zelf deze verschilrij en somrij.



2 Recursief gegeven rijen

Als je een rij die gegeven is door een recursieformule wilt invoeren, moet je de TI Nspire eerst laten werken in de seq-mode (sequence = rij). Je toetst daartoe **MODE**, kies SEQ en **ENTER**.

Bekijk nog eens de rij met directe formule:

$$u_n = 800 \cdot 1,05^n \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots$$

De bijbehorende recursieformule is:

$$u_{n+1} = 1,05 \cdot u_n \text{ met } u_0 = 800$$

In de seq-mode is de rij ook als recursieformule in te voeren. Bij deze rekenmachine begint het rij-scherm begint met $u(n)=$, in plaats van $u(n+1)=$. Je moet daarom eerst het recursievoorschrift aanpassen tot:

$$u_n = 1,05 \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = 800$$

Bedenk dat dit mag, omdat beide manieren van schrijven betekenen: "Deze term ontstaat uit de vorige door ..."

Daarna kun je hem invoeren op dezelfde manier als beschreven in de rij invoeren in menu **FUNCTIES**. Zie hiernaast.

Let er op dat je nu ook de beginterm 800 invoert.

Maak een grafiek van de rij waarbij n loopt van 1 t/m 20. Oefen het werken met rijen gegeven door een recursieformule.

Opmerkingen:

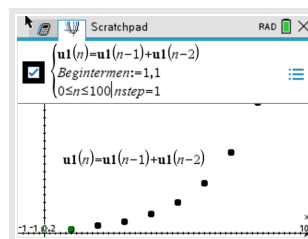
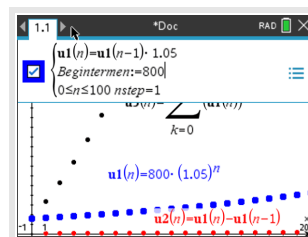
Hierbij kun je ook een bijbehorende **verschilrij** of een bijbehorende **somrij** maken.

De rij van Fibonacci

Hier zie je hoe de rij van Fibonacci kan worden ingevoerd.

Dit is een recursieve rij van de tweede orde.

Bekijk de bijbehorende grafiek en tabel.



3 Tijdgrafiek en webgrafiek

Je kunt in het menu **FUNCTIONIES** bij rijen twee soorten grafieken maken:

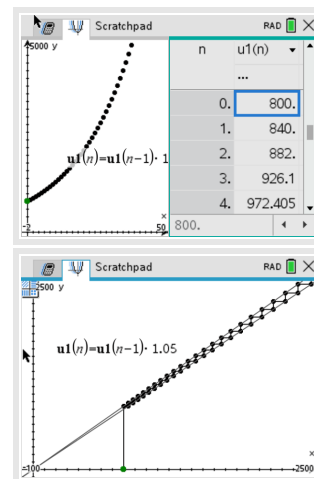
- "gewone" grafieken of tijdgrafieken zoals je die eerder zag;
- webgrafieken.

Gebruik weer dezelfde rij als hiervoor met directe formule: $u_n = 800 \cdot 1,05^n$ en recursieformule: $u_n = u_{n-1} \cdot 1,05$ en $u_0 = 800$, waarbij $n = 0,1,2,3,4,\dots$

De **tijdgrafiek** verschijnt netjes in beeld als de formule is ingevoerd en de juiste scherminstellingen (n loopt van 0 t/m 50 en $u(n)$ loopt van 0 tot 5000) en tabelinstellingen zijn gekozen. Je ziet dan de bovenste figuur hiernaast.

De **webgrafiek** verschijnt in stappen in beeld:

- Stel beide assen van de grafiek in op de geschikte waarde, in dit geval bijvoorbeeld vanaf 0 t/m 2500 en haal de tabel weg.
- Toets dan **MENU**, **1** (Acties) en **4** (Eigenschappen).
- Klik op een punt van de rij (niet de beginwaarde).
Selecteer met de pijltjestoetsen het klokje en daarna **►** om de webgrafiek te selecteren.
- Je ziet de webgrafiek ontstaan.

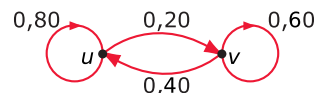


4 Stelsels rijen en fasegrafieken

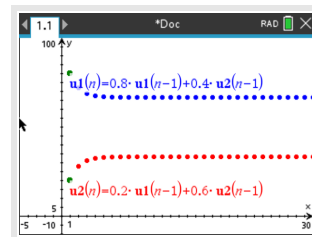
Er ontstaan stelsels rijen als je bijvoorbeeld te maken hebt met een migratiematrix, met de prooi-roofdier-cyclus, of bepaalde economische modellen. Een voorbeeld van zo'n stelsel is (de bijpassende migratiegraaf staat er naast):

$$\begin{cases} u(n) = 0,8 \cdot u(n-1) + 0,4 \cdot v(n-1) \\ v(n) = 0,2 \cdot u(n-1) + 0,6 \cdot v(n-1) \end{cases}$$

met $u(0) = 80$ en $v(0) = 20$.

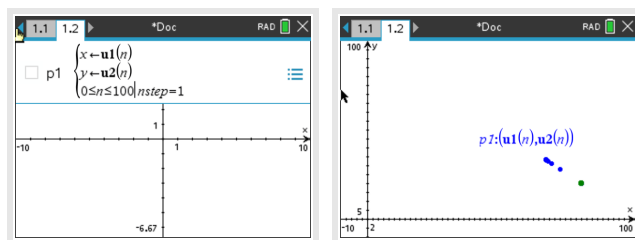


In het menu **FUNCTIES** kun je dit stelsel invoeren als twee recursieve rijen $u1(n)$ en $u2(n)$. Dan kun je het venster instellen (denk er om dat in de y-richting de waarden van de rijen komen, dus je kunt beter eerst de tabel bekijken) en je ziet de bijpassende tijdgrafieken.



Juist bij stelsels rijen is het vaak nuttig om een zogenaamde **fasegrafiek** te maken, waarin de rij $u(n)$ op de horizontale as en de rij $v(n)$ op de verticale as is uitgezet. Om de fasegrafiek te laten tekenen, gebruik je niet de gewone invoer voor de rij, maar de aangepaste invoer:

- Maak een nieuwe grafiekpagina aan.
- Toets **MENU**, **3** (Grafiek invoeren), **7** (Rij) en **2** (Aangepast).
- Gebruik **VAR** en de pijltjestoetsen om de fasegrafiek in te voeren, zie linker figuur.
- Kies geschikte vensterinstellingen.



Je krijgt dan zo'n fasegrafiek. Hier wordt hij niet erg spectaculair, want er ontstaat al snel een stabiele situatie; ga zelf maar na.

Veel leuker is het om dit te doen bij een geschikt prooi-roofdier-model...



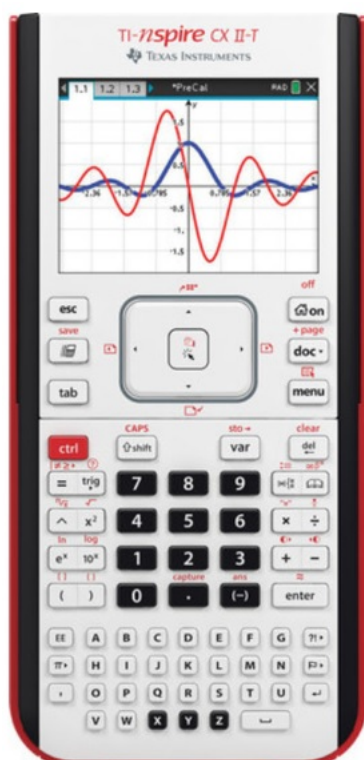
Simulaties en tellen en de TI Nspire

De TI Nspire kan je behulpzaam zijn bij het bepalen van kansen. Hij kan simulaties van kansexperimenten uitvoeren en je helpen bij het tellen van mogelijkheden.

Loop eerst de practica: **Basistechnieken TI Nspire** en **Statistiek en de TI Nspire** door.

Inhoud

1	Simuleren	54
2	Werpen met dobbelstenen simuleren	55
3	Permutaties en combinaties	56



1 Simuleren

Het werpen met een dobbelsteen kun je simuleren met toevalsgetallen. Bij de TI Nspire vind je de "randomizer" (toevalsgetallenmaker) door

-  te toetsen en dan naar het rekenscherf te gaan;
- toets  en kies **2** als je nog niet op het tweede tabblad zit;
- ga naar "Kans" en **ENTER**;
- open het submapje "Willekeurig" kies "Getal" en **ENTER**;
- je ziet nu in je rekenscherf `rand()` en (druk een paar keer op) **ENTER**.

Je krijgt zo toevalsgetallen tussen 0 en 1 (in tien decimalen).

Wil je vier van die toevalsgetallen, dan maak je `rand(4)` in het rekenscherf.

Let op: als je dit commando "`rand()`" onthoudt, kun je het ook gewoon in je rekenscherf intypen!

Als je toevalsgetallen tussen 0 en 2 wilt, dan vermenigvuldig je ze met 2.

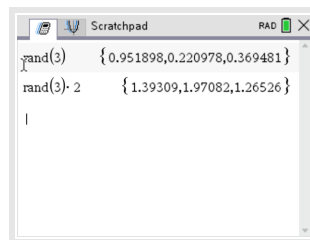
In het rekenscherf zet je: `2 * rand()`.

Meestal heb je echter **gehele toevalsgetallen** nodig (bijvoorbeeld bij de dobbelsteen de getallen 1 t/m 6). Die kun je krijgen door in het submapje "Willekeurig" niet `rand()`, maar `randInt()` te gebruiken.

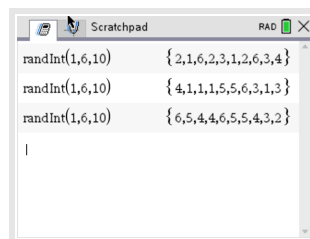
Voor de simulatie van 10 keer werpen met een dobbelsteen ga je dan zo te werk:

- toets  en kies **2** als je nog niet op het tweede tabblad zit;
- ga naar "Kans" en **ENTER**;
- open het submapje "Willekeurig" kies "Geheel" en **ENTER**;
- voer in `randInt()` eerst de ondergrens 1, dan de bovengrens 6 en tenslotte het aantal worpen dat je wilt simuleren en **ENTER**.

Ook het commando `randInt()` kun je gewoon in het rekenscherf intypen.



```
rand(3)      { 0.951898,0.220978,0.369481 }
rand(3)-2    { 1.39309,1.97082,1.26526 }
```



```
randInt(1,6,10) { 2,1,6,2,3,1,2,6,3,4 }
randInt(1,6,10) { 4,1,1,1,5,5,6,3,1,3 }
randInt(1,6,10) { 6,5,4,4,6,5,5,4,3,2 }
```



2 Werpen met dobbelstenen simuleren

Om met behulp van simulaties kansen te bepalen, moet je gemakkelijk kunnen tellen hoe vaak elk getal in je simulatie voor komt. Je zet dan je toevalsgetallen in een lijst.

Met lijsten heb je al in het practicum "Statistiek en de TI-Nspire" gewerkt. Open nu op je rekenmachine weer een document met een lijst.

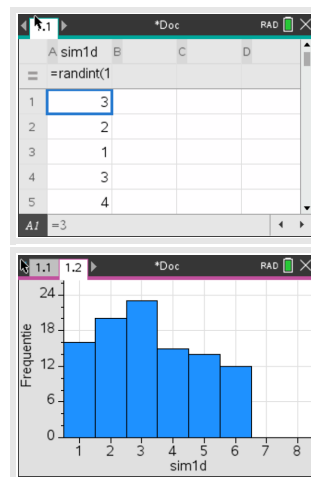
Werpen met één dobbelsteen

Stel je voor dat je 100 keer met een dobbelsteen gooien wilt simuleren en zo de kans wilt bepalen op het gooien van een 5. Je doet dan het volgende:

- Toets  en kies het menu **LIJSTEN & SPREADSHEET...**;
- Noem kolom A "sim1d" (simulatie één dobbelsteen) of iets dergelijks en voer in de cel eronder `randint(1,6,100)` in en **ENTER**
- Alle toevalsgetallen staan nu in kolom A.
- Vervolgens maak je bij deze lijst een staafdiagram (histogram) via het menu **STATISTIEK**.

In het staafdiagram komt 14 keer een vijf voor. De kans op 5 was daarom in deze simulatie 0,14.

Voer zelf zo'n simulatie uit.



Werpen met twee dobbelstenen

Als je bij het werpen met twee dobbelstenen de kans wilt bepalen op een bepaald aantal ogen dat op beide stenen samen boven komt te liggen, hebben niet alle mogelijkheden een gelijke waarschijnlijkheid. Bij je simulatie moet je daarmee rekening houden: je simuleert elke dobbelsteen afzonderlijk en telt dan de uitkomsten bij elkaar. Een simulatie van 100 worpen met twee dobbelstenen gaat zo:

- Je voert in de kolom A als "sim2d" in `randInt(1,6,100) + randInt(1,6,100)` en **ENTER** (dus `2 * randInt(1,6,100)` is fout!).
- Vervolgens maak je een staafdiagram.
- De simulatie van het werpen met twee dobbelstenen staat nu in dit staafdiagram en je kunt gemakkelijk alle frequenties aflezen.

Voer zelf zo'n simulatie uit. Dit is natuurlijk gemakkelijk uit te breiden tot het werpen met drie dobbelstenen, of vier munten, etc. Zolang het maar niet over al te grote aantallen gaat...



3 Permutaties en combinaties

Het aantal **permutaties** van 6 elementen is het totale aantal mogelijke verwisselingen als alle 6 elementen verschillend van elkaar zijn.

Dat aantal permutaties is: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$.

De TI Nspire kan $6!$ op de volgende manier berekenen zonder de hele vermenigvuldiging in te tikken:

- Toets  **on** ga naar het rekenscherf.
- Toets  en kies **2** als je nog niet op het tweede tabblad zit.
- Ga naar "Kans" en "Faculteit" en **ENTER**.
- Je ziet nu in je rekenscherf $6!$ en **ENTER**.

Je ziet: $6! = 720$.

Je kunt ook gewoon in het rekenscherf $6!$ toetsen.

Bij het aantal **permutaties** van bijvoorbeeld 4 uit 10 gaat het om de mogelijke keuzes van 4 elementen waarvan de onderlinge volgorde ook belangrijk is uit 10 verschillende elementen, dus om $10 \times 9 \times 8 \times 7 = (10!)/(6!)$.

Je kunt dit met behulp van faculteiten berekenen.

Maar het kan ook zo:

- Ga naar  "Kans" en "Aantal permutaties" en **ENTER**.
- Je ziet nu in je rekenscherf $nPr()$, vul dit aan tot $nPr(10,4)$ en **ENTER**.

Je vindt: 5040. Ga na dat dit hetzelfde is als $10 \times 9 \times 8 \times 7$.

Bij het aantal **combinaties** van 4 uit 10 gaat het om de mogelijke keuzes van 4 elementen waarvan de onderlinge volgorde niet belangrijk is uit 10 verschillende elementen, dus om

$\frac{10!}{6! \cdot 4!}$. Je schrijft het als $\binom{10}{4}$.

Je kunt dit met behulp van faculteiten berekenen.

Maar je het kan ook zo:

- Ga naar  "Kans" en "Aantal combinaties" en **ENTER**.
- Je ziet nu in je rekenscherf $nCr()$, vul dit aan tot $nCr(10,4)$ en **ENTER**.

Je vindt: 210. Ga na dat dit hetzelfde is als $\frac{10!}{4! \cdot 6!}$.

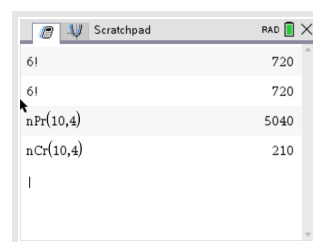
Ook bij permutaties en combinaties kun je de commando's gewoon in het rekenscherf typen!

Even narekenen

Wanneer je het aantal mogelijkheden moet berekenen als je 10 elementen verdeelt in een groep van 2, een groep van 3 en een groep van 5, dan bereken je:

- $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3}$ of $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$.

Kijk maar eens of je uit allebei 2520 krijgt.



6!	720
6!	720
nPr(10,4)	5040
nCr(10,4)	210

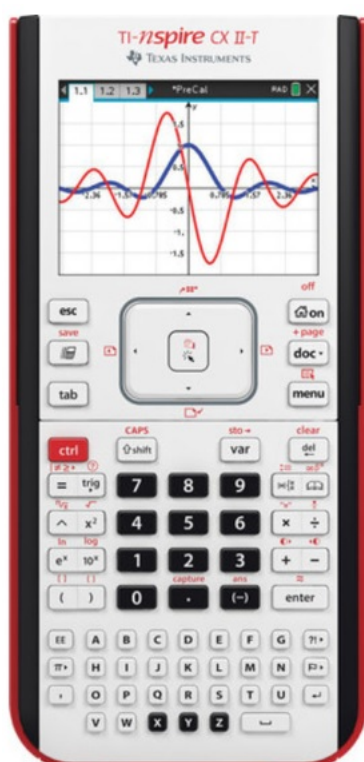


Statistiek en de TI Nspire

De TI Nspire beschikt over een groot aantal statistische functies. Onder andere kan hij allerlei diagrammen maken en centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen. Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI Nspire** door.

Inhoud

1	Statistische gegevens invoeren	58
2	Diagrammen	59
3	Centrummaten en spreidingsmaten	60



1 Statistische gegevens invoeren

Je ziet hier een tabel met daarin de schoenmaten van een groep van 30 mannen:

schoenmaat	frequentie
39	2
40	1
41	5
42	5
43	9
44	4
45	3
46	1

Deze gegevens kun je in je rekenmachine invoeren.

Maak een nieuw document aan door in je basisscherm voor **1** (Nieuw) te kiezen.

Je kunt nu uit zeven opties kiezen, kies voor **4** (Lijsten & Spreadsheet toevoegen).

Je kunt ook op het icoontje **LIJSTEN & SPREADSHEET TOEVOEGEN** drukken.



- Er verschijnt nu een tabel in beeld. Gebruik de kolommen A en B
- Bovenaan kun je elke kolom een naam geven: vul naast de A "maat" en naast de B "freq" (zonder aanhalingstekens).
- In kolom A zet je de verschillende schoenmaten 39, 40, ..., 46.
- In kolom B zet je de bijbehorende frequentie 1, 2, 5, ..., 1.

	A maat	B freq	C	D
1	39	2		
2	40	1		
3	41	5		
4	42	5		
5	43	9		



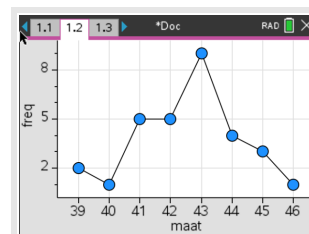
2 Diagrammen

Nu je een frequentietabel hebt ingevoerd, kun je allerlei diagrammen maken met behulp van het menu **STATISTIEK**, wat je herkent aan het paarse icoontje in het hoofdscherm. Je kunt ook vanuit het scherm met je tabel op **CTRL** **DOC** (+ page betekent "pagina toevoegen") drukken en dan kiezen voor **5** (Gegevensverw. & Statistiek toevoegen). Je krijgt nu een scherm met al je zojuist ingevoerde gegevens, willekeurig door elkaar. Dat moet je nog aanpassen:



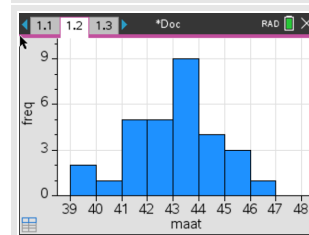
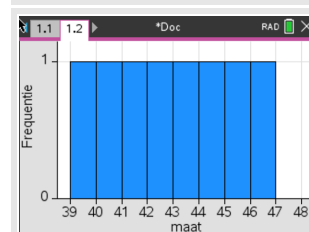
Een lijndiagram gaat het snelst:

- Onderaan staat: "Klik om variabele toe te voegen. Klik hier op en kies voor "maat".
- Aan de zijkant staat ook: "Klik om variabele toe te voegen. Klik hier op en kies voor "freq".
- Via **MENU** **2** (Ploteigenschappen) en **1** (Gegevenspunten verbinden) krijg je het lijndiagram. In de bovenste figuur zie je het resultaat.



Een staafdiagram (histogram) is wat lasiger:

- Verwijder de Y-variabele door hem te selecteren en dan **MENU** **2** (Ploteigenschappen) en **A** (Y-variabele verwijderen).
- Onderaan staat nog steeds "maat". De waarden van kolom A staan op een rijtje met allemaal een frequentie van 1. Om er een staafdiagram van te maken, kies je **MENU** **1** (Plot-type) en vervolgens voor **3** (Histogram). Bekijk de tweede figuur.
- Vervolgens kies je **MENU** **2** (Ploteigenschappen) en **9** (Samenvattende Y-lijst toevoegen).
- Nu krijg je het correcte histogram (staafdiagram) te zien.



Opmerkingen:

Je kunt dit histogram ook maken door alleen de kolom A te gebruiken en alle schoenmaten in de voeren zo vaak als ze in de frequentietabel voorkomen. Je krijgt dan een A-kolom met 30 schoenmaten maar het histogram wordt meteen goed gemaakt, niet eerst met alle frequenties op 1.

Strikt genomen is het diagram niet juist, de waarden van de variabele "maat" moeten eigenlijk onder de middens van de staven staan. Je kunt dat oplossen door via **MENU** **2**: Ploteigenschappen dan 2: Histogrameigenschappen en 2: Klassenbreedte naar 1: Gelijke klassen te gaan en dan de Uitlijning op 38.5 te zetten.

In hetzelfde menu als het histogram, kun je met **3** (Boxplot) ook een boxplot maken.

Tip: Met **CTRL** **▶** en **CTRL** **◀** kun je snel naar het volgende of vorige tabblad springen!

Zelf diagrammen maken

Breng achtereenvolgens met de gegevens hierboven in beeld: een staafdiagram, een lijndiagram, een boxplot. Zoek uit welk verschil er is tussen beide soorten boxplot in je rekenmachine. Werk ook eens met andere gegevens, kies met name ook eens gegevens die in klassen zijn ingedeeld.



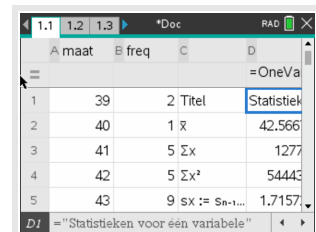
3 Centrummaten en spreidingsmaten

Gebruik weer de gegevens uit de voorgaande tekst (de schoenmaten). Om de verschillende centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je zo te werk:

- Kies in het menu van je tabel voor **4** (Statistiek), **1** (Statistiekberekeningen...) en dan **1** (Statistieken voor één variabele...).
- Stel "Aantal lijsten:" in op 1 en [OK].
- Zet achter "X1-lijst": 'maat' en achter "Frequentielijst": 'freq' en [OK].

Je krijgt nu in de C-kolom en de D-kolom de volgende resultaten:

- de gemiddelde schoenmaat is ongeveer 42,6;
- alle schoenmaten samen kwamen uit op 1277 (hier een zinloos getal);
- de som van de kwadraten van de schoenmaten (hier een zinloos getal);
- de standaarddeviatie S_X bij delen door 29 (niet gebruiken);
- de standaarddeviatie $\sigma \approx 1,69$;
- er waren in totaal 30 mannen;
- de kleinste maat is 39 (pijljestoets naar beneden);
- het eerste kwartiel is 41;
- de mediaan is 43;
- het derde kwartiel is 44;
- de grootste maat is 46.
- de grootste maat is 46.
- de som van de kwadraatafwijking SSX (sum of squares) gebruik je niet.



	A maat	B freq	C	D
1	39	2	Titel	Statistiek
2	40	1	$\bar{x}$	42.566
3	41	5	Σx	1277
4	42	5	Σx^2	54443
5	43	9	$s_x := s_{n-1}$	1.7157



Veranderingen en de TI Nspire

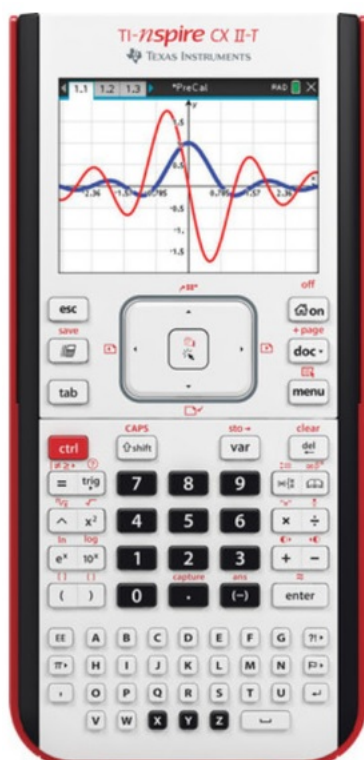
De TI Nspire kan je behulpzaam zijn bij berekeningen aan veranderingen en differentiëren.

Loop eerst van het practicum **Basistechnieken TI Nspire** het deel "Grafieken maken" door.

Loop daarna van het practicum **Functionies en de TI Nspire** het deel "Functionies combineren" door.

Inhoud

1	Tabel met toenames van een functie maken	62
2	dy/dx bij een waarde van x berekenen	63
3	De afgeleide tekenen via differentiequotiënt	64
4	De afgeleide tekenen via differentiaalquotiënt	65

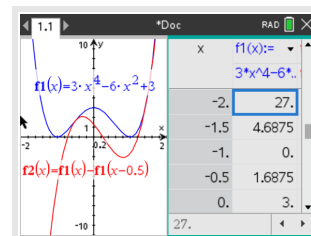


1 Tabel met toenamen van een functie maken

Je gaat een tabel met toenamen maken van de functie $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$ op het interval $[-2, 2]$ en met stapgrootte 0,5.

Het gaat als volgt:

- Voer in het menu **FUNCTIONS** de functie $f_1(x) = 3x^4 - 6x^2 + 3$ in.
- Bedenk dat je om de toename te berekenen, steeds een functiewaarde en zijn "vorige" functiewaarde van elkaar moet aftrekken. Voer daarom vervolgens $f_2(x) = f_1(x) - f_1(x - 0.5)$ in. Gebruik voor f_1 de knop **VAR** op type gewoon f_1 .
- Bekijk beide grafieken.
- Als je wilt, pas de vensterinstellingen aan.
- Zet de stapgrootte van deze tabel op 0.5 door op de tabel te gaan staan, **MENU** **2** (Functietabel) en **5** (Functietabelinstellingen bewerken) te kiezen. Neem Tabelstart: -2 en Tabelstap: 0.5.



Bekijk de tabel, controleer de onderstaande waarden en neem de overige waarden over in een eigen tabel:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
Δy	geen*)				1,3				22,3

Hiermee kun je een toenamediagram tekenen.

*) Voor de berekening van Δy bij $x = 2$, heb je $f(-2,5)$ nodig. Omdat het interval bij -2 begint, hoeft je deze waarde niet in te berekenen. Je hoeft immers niet buiten het interval te rekenen.



2 dy/dx bij een waarde van x berekenen

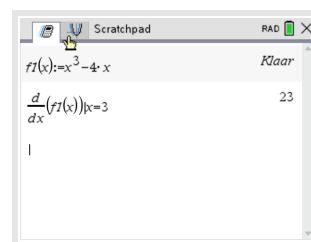
De volgende omschrijvingen betekenen allemaal hetzelfde:

- De helling van de grafiek van $y = f(x)$ in een bepaald punt.
- Het hellingsgetal of de hellingwaarde van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x .
- Het differentiaalquotiënt van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x .
- De afgeleide voor van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x .
- Het hellingsgetal of de hellingwaarde van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x .
- $\frac{dy}{dx}$ of $\frac{df(x)}{dx}$ voor een bepaalde waarde van x .

Hier ga je de functie $f(x) = x^3 - 4x$ gebruiken en de afgeleide berekenen voor $x = 3$.

Met het rekenmachinescherm:

- Definieer de functie $f1(x) := x^3 - 4x$ door intypen en **CTRL**  **(:=)** te gebruiken.
- Toets **MENU**, **4** (Analyse) en **1** (numerieke afgeleide in een punt).
- Vul de x -waarde 3 in en [OK].



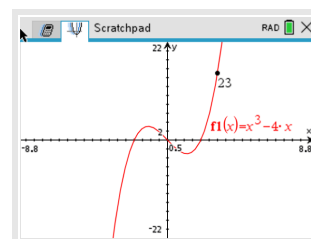
Het differentiaalquotiënt van $f(x)$ is voor $x = 3$ dus gelijk aan 23.

Opmerking:

Je kunt de opdracht ook intypen via , maar dan moet je zelf het laatste deel "handmatig" invoeren tot je $\frac{d}{dx}(x^3 - 4x)|_{x=3}$ hebt.

Ook in het menu **FUNCTIES** kun je de afgeleide in het punt berekenen:

- Voer de functie $f1(x) = x^3 - 4x$ in en bekijk de grafiek.
- Toets **MENU**, **6** (Grafiek analyseren) en **5** (dy/dx).
- Toets nu direct het getal 3 in voor de waarde van x en **ENTER**.
Waarschuwing: Je kunt met de pijltjestoetsen een punt kiezen, maar dat is vaak niet nauwkeurig genoeg.
- Je ziet nu 23 bij het punt met $x = 3$ op de grafiek staan.



Het differentiaalquotiënt van $f(x)$ is voor $x = 3$ dus gelijk aan 23.



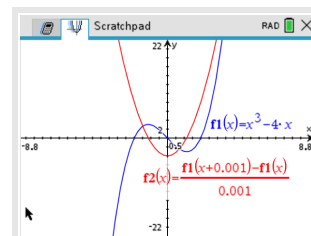
3 De afgeleide tekenen via differentiequotiënt

Je kunt ook direct je grafische rekenmachine in het menu **FUNCTIONS** een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt benaderen door een differentiequotiënt op het interval $[x; x + 0,001]$ en daarvan een grafiek maken.

Gebruik de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

- Voer de functie f in als $f1(x) = x^3 - 4x$.
- Voer een nieuwe functie $f2(x) = \frac{f1(x+0.001)-f1(x)}{0.001}$ in.
 $f1$ vind je met de knop **VAR**.
- Bekijk beide grafieken.

De rode grafiek is die van de (benadering van de) afgeleide $f'(x)$.



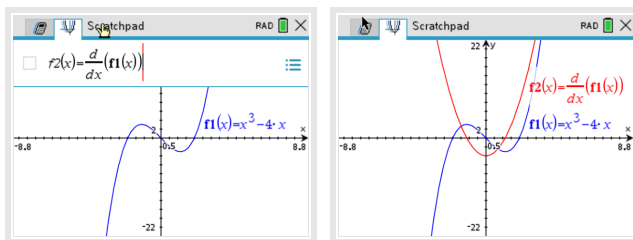
4 De afgeleide tekenen via differentiaalquotiënt

Je kunt ook direct je grafische rekenmachine in het menu **FUNCTIES** een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt berekenen en daarvan een grafiek maken.

Gebruik de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

- Voer de functie f in als $f1(x) = x^3 - 4x$.
- Voer bij $f2(x)$ de afgeleide in door $\left|\frac{d}{dx}\right|$ en dan het afgeleide-icoontje te kiezen. Vul x en $f1(x)$ in, zie linker figuur.
- Bekijk beide grafieken.

De rode grafiek is die van de afgeleide $f'(x)$.



Op de Math4All website en in Math4All readers wordt regelmatig verwezen naar de practica voor de grafische rekenmachine. Dat zijn 'losse' practica die kunnen worden doorgenomen als een specifiek onderwerp in de lessen aan de orde komt.
In dit katern zijn alle Math4All practica bij de TI Nspire gebundeld.



