

Math4All Practicum GR

HP Prime



Inhoud

Basistechnieken HP Prime	3
Functies en de HP Prime	13
Integralen en de HP Prime	21
Kansverdelingen en de HP Prime	25
Matrixrekening en de HP Prime	37
Parameterkrommen en de HP Prime	41
Regressie en de HP Prime	45
Rijen en de HP Prime	49
Simulaties en tellen en de HP Prime	55
Statistiek en de HP Prime	59
Veranderingen en de HP Prime	63

Basistechnieken HP Prime

Als je dit practicum doorwerkt, weet je de eerste beginselen van het werken met de grafische rekenmachine HP Prime van Hewlett & Packard.

Inhoud

1	De rekenmachine aanzetten	4
2	Rekenen	5
3	Doorrekenen met tussenresultaten	7
4	Grafieken maken	8
5	Vergelijkingen oplossen	10
6	Snijpunten van twee grafieken	11



1 De rekenmachine aanzetten

Je zet de machine **aan** door  te drukken. De betreffende knop zit midden boven!
Door middel van   kun je de machine ook weer **uit** zetten.

Je ziet nu het laatste scherm dat de vorige keer werd gebruikt oplichten. Zie je (vrijwel) niets, dan moet je het **scherm helderder maken** door  te toetsen en vast te houden en daarbij de toets  te gebruiken (eventueel een paar keer). In alle andere gevallen druk je toetsen na elkaar, alleen bij aanpassingen van de helderheid van het scherm druk je toetsen tegelijk in.

Je opent (indien nodig) het **basisscherm** altijd met .

Met de combinatie   veeg je het basisscherm schoon. Je kunt alle eventueel aanwezige **programma's en gegevens wissen**:

Gebruik een paperclip, een punaise of een ander dun staafje en druk even lichtjes in het gaatje midden op de achterkant met de tekst "Reset" er onder.

Via   open je het geheugen beheer waar je individuele stukken opgeslagen informatie, zoals een variabele, een lijst, een matrix of een programma kunt verwijderen.

De knop  activeert de "blauwe functie" van een toets.

Bijvoorbeeld:   geeft een benadering van het getal π .

De knop  activeert "oranje functie" van een toets.

Met   geeft de letter Y. Bij twee keer drukken op  blijft de machine letters maken tot je opnieuw op  drukt.

Zo kun je je naam schrijven in het rekenscherm...

Allerlei instellingen kun je aanpassen via  , bijvoorbeeld kun je de taal op "Nederlands" zetten.

Belangrijk is nog dat de HP Prime een **touchscreen** heeft, zodat je op het scherm kunt tappen en het scherm met met knijpen en vegen kunt vergroten/verkleinen en verplaatsen.



Geheugenbeheer		12800
Toepassingen	471KB	
Programma's	0KB	
Notities	0KB	
Matrix	0KB	
Lijsten	0KB	
Geschiedenis	0.76KB	
CAS	0KB	
Gebruikersvariabelen	1KB	
Back-ups	0KB	
Info Klonen Verzend Weerg.		



2 Rekenen

De HP Prime voert dezelfde berekeningen uit zoals andere rekenmachines die je tot nu toe gebruikt hebt, alleen zijn er waarschijnlijk verschillen in de manier van invoeren van de berekening.

Bijvoorbeeld de wortel van 25 bereken je zo:   25 .

Je ziet dat het scherm een soort kladblok is: je schrijft de berekening gewoon op en met  wordt hij uitgevoerd.

 is de toets waarmee je van teken wisselt (en dus een negatief getal invoert).

Bij berekeningen met sin, cos en tan, moet je erom denken dat je (voorlopig) in graden moet werken. Je kunt dat instellen door op de rechterbovenhoek van het scherm te tappen. Daarmee opent een klein keuzeschermetje voor een aantal instellingen, zoals de datum en ook de te gebruiken hoekmaat. Je ziet een hoeksymbool met π (voor radialen) en een hoeksymbool met het graden symbool (voor hoeken in graden). Selecteer de hoeken in graden.

Je kunt nu $\sin(30^\circ)$ berekenen door in te toetsen:  30 en .

Antwoord: $\frac{1}{2} = 0.5$.

Terugrekenen kan zo:     en . Antwoord: 30.

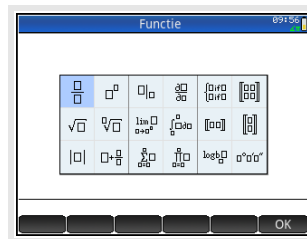
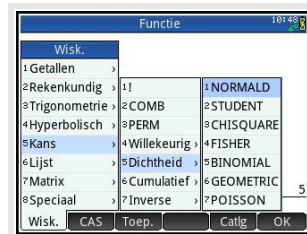
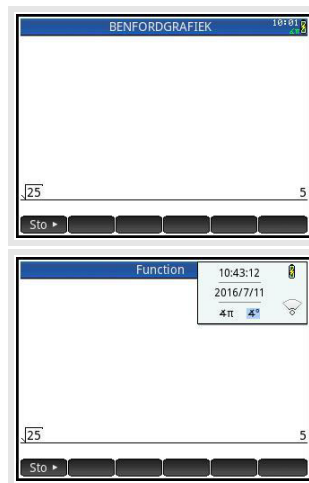
Met   gebruik je het antwoord (answer) van de vorige berekening.

Voor allerlei wiskundige (mathematische) berekeningen is er de knop . Dit is de gereedschapskist met heel veel verschillende wiskundige bewerkingen die bereikbaar zijn via de knoppen onderin het scherm. Met  keer je weer terug naar het basisschermetje.

Als je een opgave fout hebt ingevoerd en daarna berekend, kun je die opgave met behulp van twee keer erop tappen nog eens in je invoer regel krijgen. Je kunt vervolgens met de cursorbesturing of met tappen door die opgave lopen naar de positie waar je iets wilt aanpassen.

Verbeteren kun je hem door verkeerde tekens met  (backspace) weg te halen en de juiste invoer in te typen.

Soms is het handig om de knop  voor **invoersjablonen** te gebruiken bij rekenwerk zoals rekenen met breuken. Door op het juiste icoontje te tappen krijg je de gewenste vorm in beeld en hoeft je alleen nog maar de getallen in te voeren.



Rekenvoorbeelden		
Opgave	Intoetsen	Uitkomst
0,625 schrijven als breuk	0.625 $\frac{a}{b/c}$	$\frac{5}{8}$
6^2 berekenen	6 x^2 of 6 x^y 2 en ENTER	36
de wortel van 36 met 0,1 vermenigvuldigen	Shift x^2 36 $\rightarrow$ Δx 0.1 en ENTER (de pijltjestoets naar rechts is nodig om buiten de wortel te komen)	0.6
6^3 berekenen	6 x^y 3 en ENTER	216
6 delen door $2^3 - 5$; bereken dus $\frac{6}{2^3-5}$	6 $\div$ $(\)$ 2 x^y 3 $\rightarrow$ $=$ 5 $\rightarrow$ en ENTER	2
bereken $4\frac{1}{6} - 1\frac{2}{3}$	4 $+$ $\frac{1}{6}$ 1 $\div$ 6 6 $\rightarrow$ $-$ $(\)$ 1 $+$ 2 $\div$ 3 en ENTER	2.5 en na $\frac{a}{b/c}$ $\frac{5}{2}$ en $2 + \frac{1}{2}$ Je kunt ook met invoersjablonen werken.
bereken $2,6 \times 10^6 \times -1,14 \times 10^{-5}$	2.6 Δx 10 x^y 6 $\rightarrow$ Δx $\frac{+/-}{M}$ 1.14 Δx 10 x^y $\frac{+/-}{M}$ 5 en ENTER	-29.64

Zelf narekenen

- $(-4)^3 + 6^2 = -28$
- $3\sqrt{6} + \sqrt[3]{30} \approx 10,4557$
- $\frac{3}{4}\pi \cdot 12^3 \approx 4071,504$
- $\frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 3}}{2 \cdot 0,5} \approx -0,6411011$
- $\frac{-5 - \sqrt{5^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 3}}{2 \cdot 0,5} \approx -9,358899$
- $-1,42 \cdot 10^6 + 0,92 \cdot 10^7 = 7780000$
- $6\frac{5}{7} - 4\frac{7}{8} = \frac{103}{56} \approx 1,839286$
- $\frac{5-12}{8-1} = -1$



3 Doorrekenen met tussenresultaten

Soms heb je een berekening uitgevoerd, waarvan je het resultaat in een andere berekening nodig hebt. Het resultaat van de oude berekening opnieuw intypen bij de nieuwe berekening is vaak onnauwkeurig en kost veel moeite.

In het vorige onderdeel heb je al ontdekt dat je met   het meest recente antwoord (answer) gemakkelijk terug kunt halen. Voor het **doorrekenen met oude tussenresultaten** heb je de volgende mogelijkheden:

1. Druk in je rekenscherf herhaaldelijk op  totdat je het gewenste oude resultaat hebt geselecteerd. Druk nu op . Het resultaat komt nu op de positie van de cursor in de invoerregel te staan. Zorg dus dat als je een eerdere berekening wil invoegen dat cursor op de juiste positie staat, selecteer dan de eerdere berekening en plak met . Dit kan ook door (met de cursor op de juiste plek in de nieuwe invoer) dubbel te tappen op de oudere invoer die je wilt ophalen.
2. Met behulp van de toetsen ,  en  kun je tekst selecteren, kopiëren en plakken zoals je van een tekstverwerker gewend bent.



4 Grafieken maken

Hét sterke punt van de grafische rekenmachine is het **tekenen van grafieken** bij een ingevoerde formule. Via  open je de bibliotheek met de beschikbare applicaties (app), kies daar de app **FUNCTIE**, door er op te tappen, of highlight het icoon en . Nu kan de machine grafieken tekenen bij formules van de vorm $f(x) = \dots$ (bijvoorbeeld $F1(x) = \dots$).

Hier is f de naam van de formule en $f(x) = y$.

Op de stippeltjes komt het deel van de formule achter het isgelijktteken dat alleen de variabele x bevat.

Door de app **FUNCTIE** te openen kom je in het symbolische scherm van deze app, in dit scherm kun je de formule (symbolische vorm) van een grafiek invoeren, met de  toets open je de grafische weergave (grafiek) van deze app en ten slotte met de  toets open je de numerieke weergave (de tabel) van deze app.

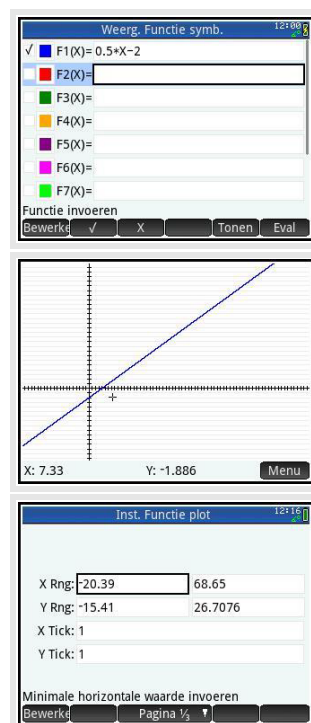
Zo kun je een grafiek tekenen bij de formule $y = 0,5x - 2$:

- Open de symbolische weergave met . Je kunt de app leegmaken met . Eerst vraagt de HP Prime of je het zeker weet, bevestig met .
- Voer bij $F1(X)$ in: $0.5X - 2$ en toets .
Voor de X gebruik je .
- Bekijk de grafiek via . Het is vooraf niet te zeggen wat je te zien krijgt, de instellingen van de laatste keer dat je een grafiek hebt bekeken zijn van toepassing. Dankzij het touchscreen kun je met knijpen en vegen snel het zichtbare stuk van het x, y -vlak aanpassen zodat je een beeld naar wens van de grafiek krijgt.

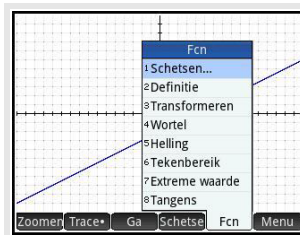
Via de toets  kun je een aantal voor geprogrammeerde scherm instellingen selecteren. Met  open je de instellingen van het grafieken scherm zodat je handmatig de waarden kan aanpassen. Er zijn hiervoor drie verschillende vensters met verschillende instellingen. Via X Rng stel je de onder- en bovengrenzen van de x -as in, X Tick is het kleine verticale streepje langs de as. Met de knop  onderin het scherm wandel je naar scherm 2 van de instellingen, hier kun je bijvoorbeeld de assen en de rasterpunten aan- en uitzetten. Experimenteer er even mee...

Open de grafiek met  en tap op  onderin de beeldrand. Er verschijnen nu meerdere knoppen in de onderrand van het beeldscherm. Via die knoppen kies je bepaalde opties of open je een nieuw keuzemenu met opties.

-  Hiermee plak je de cursor op de grafiek (dan staat het bolletje achter Trace) of maak je de cursor weer los van de grafiek zodat je vrij door het x, y -vlak kunt wandelen.
-  Hiermee open je een venster waar je een waarde voor x kunt invoeren, de cursor springt naar het bijbehorende punt van de grafiek met de opgegeven x -coördinaat.
-  Hiermee open je een nieuw keuze menu met mogelijkheden als:



- Schetsen: Teken zelf een functie op het scherm met je vinger, deze wordt opgeslagen als je bevestigt met OK.
- Definitie: Zet het functievoorschrift in beeld.
- Transformeren: Verschuif de functie, horizontaal of verticaal, het functievoorschrift wordt automatisch aangepast.
- Wortel: Geeft het nulpunt dat het dichtste bij de cursor zit.
- Helling: Geeft de helling van de grafiek op de positie van de cursor.
- Tekenbereik: Berekent de oppervlakte onder de kromme tussen de op te geven onder- en bovengrenzen.
- Extreme waarde: geeft de coördinaten van de top die het dichtste bij de cursor zit.
- Tangens: Toont de raaklijn aan de grafiek.



Met de pijltjestoetsen kun je de **cursor steeds over de grafiek verplaatsen** en de bijbehorende coördinaten aflezen. Heb je meerdere grafieken, dan kun je met de pijltjestoetsen (omhoog en omlaag) ook van de éne naar de andere springen. De cursor doorloopt de grafiek in sprongen. Het nulpunt (het punt met $y = 0$) vind je dus niet altijd nauwkeurig door met de cursor langs de grafiek te wandelen. Als je de coördinaten van zo'n nulpunt nauwkeuriger wilt vaststellen, moet je de grafiek vergroten: je moet dan inzoomen op de grafiek.

Toets **Num**  en je krijgt een tabel bij de grafiek te zien: een lijst met x-waarden en de bijbehorende y-waarden waar je met de pijltjestoetsen doorheen kunt lopen. De stapgrootte in de tabel kun je veranderen via **Shift** **Num** , je komt dan in de Setup (instellingen) van de tabel.

Tenslotte nog dit:

Je kunt het **beeldscherm splitsen**. Gebruik en kies optie 1 Gesplitst: plotdetail of optie 2 Gesplitst: plottabel voor een gedeeld scherm.

Oefenen

Teken grafieken bij de volgende formules. Kies de beste beeldscherm instellingen om de grafieken in beeld te brengen. Zoek snijpunten met de assen en onderlinge snijpunten op, maak een tabel bij elke formule.

- $y = -0,5x^2 + 8$
- $y = 20 - x$
- $y = 10x^2(x - 10)$
- $y = x^4 - 16$

Experimenteer vervolgens een tijdje met iemand samen: geef elkaar verschillende formules op die de ander dan zo mooi mogelijk in beeld moet brengen. Laat elkaar snijpunten met de assen, onderlinge snijpunten en dergelijke opzoeken.



5 Vergelijkingen oplossen

Met de HP Prime machine kun je op diverse manieren vergelijkingen oplossen. Een heel rechtstreekse manier is het gebruiken van de app **OPLOSSEN**. Andere manieren hebben vaak met grafieken te maken. Daarover meer in het practicum: Functies.

Zo kun je deze vergelijking oplossen: $0,5x - 2 = 12$.

- Open met **Apps Info** het scherm met apps en kies de app **OPLOSSEN**. Je ziet dan dit scherm. Als er al vergelijkingen staan haal je die eerst weg met **Del**.
- Bij E1 voer je de vergelijking in; voor de X moet je hier **ALPHA** **X** gebruiken.
- Kies "Leeg" door **OK** te drukken.
- Voer in het invoerscherm je vergelijking in. Het isgelijktteken is **Shift** **=**.
- Selecteer E1 en kies **Num** **Setup** en **OPLOS.**
- Je krijgt de oplossing in beeld: $x = 28$.
- Met **Symb** **Setup** ga je terug naar het vergelijkingenscherm. En met **Del** verwijder je de vergelijking weer.

Met enige oefening zal de app **OPLOSSEN** je goede diensten kunnen bewijzen. Er zijn echter wel een paar haken en ogen:

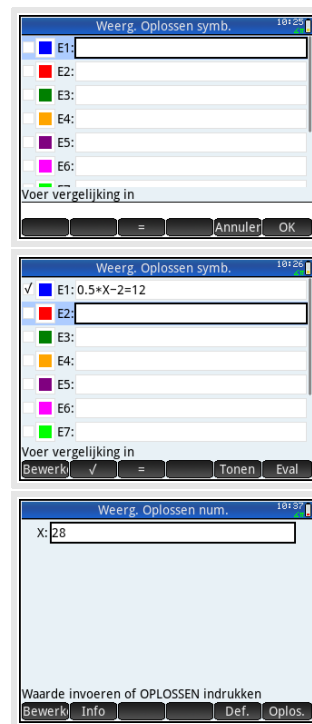
1. Je krijgt zo maar één oplossing, terwijl vergelijkingen wel meerdere oplossingen kunnen hebben.
2. Bij een vergelijking met meerdere oplossingen krijg je misschien niet de oplossing(en) die voor jouw probleem nodig is (zijn).

Je kunt wel meerdere oplossingen, of de best passende oplossing, vinden. Dan moet je de waarde van X die staat ingesteld voordat je op **OPLOS.** drukt aanpassen. Je krijgt namelijk steeds de oplossing die daar het dichtst bij zit.

Oefenen

Los de volgende vergelijkingen volledig op (d.w.z. dat je alle oplossingen moet vinden):

Vergelijking		Uitkomst
a	$0,05x + 50 = 0,25x + 20$	$x = 150$
b	$x^2 - 4x = 12$	$x = 6$ en/of $x = -2$
c	$8x - x^3 = 0$	$x = 0$ en/of $x \approx -2,828427$ en/of $x \approx 2,828427$
d	$210x^{1,23} = 400$	$x \approx 1,688545$



6 Snijpunten van twee grafieken

Voor het bepalen van de **snijpunten van twee grafieken** gebruik je de app **FUNCTIE**.

Gebruik de formules

$$y_1 = x^3 - 4x \text{ en } y_2 = 0,5x + 3$$

Kies **Apps** en selecteer de app **FUNCTIE**.

Maak eventueel de lijst met functies leeg met **Shift** **Esc**.

Voer de beide functies in: $F1(X) = X^3 - 4X$ en $F2(X) = 0.5X + 3$.

Voor de X gebruik je weer **xtθn**.

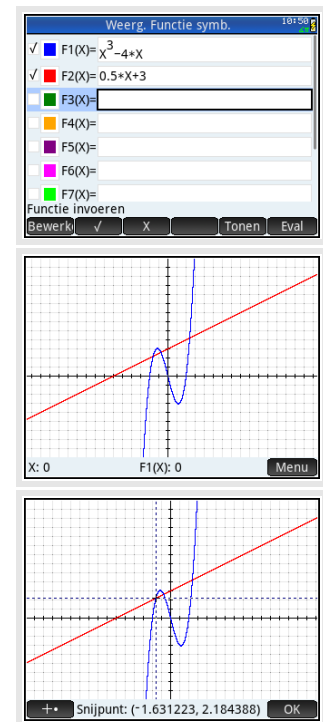
Bekijk de grafiek met **Plot** en zorg, met vegen of knippen dat je alle drie de snijpunten in beeld hebt.

- Kies **MENU** en **FCN**. Gebruik optie 5 Snijpunt.
- Er opent een pop up scherm waar wordt gevraagd welke objecten je willen laten snijden: de functie F1(X) met 1: F2(X) of met 2: X-as.
- Kies 1: F2(X) en je ziet de coördinaten van een snijpunt in onder in beeld. Wandel nu met de cursor tot je in de buurt van een tweede snijpunt staat en herhaal het bepalen van het snijpunt.

Bereken de snijpunten van de grafieken van y_1 en y_2 .

Als het goed is vind je (in vier decimalen nauwkeurig):

(-1,6312; 2,1844), (-0,7669; 2,6166) en (2,3981; 4,1991).



Functies en de HP Prime

De HP Prime rekenmachine kan je behulpzaam zijn bij het werken met functies. Bijvoorbeeld kun je gemakkelijk nulpunten, snijpunten, oppervlakte onder een grafiek, de helling van een grafiek bepalen. Verder kun je functies eenvoudig combineren, zelfs schakelen.

Loop eerst het practicum: **Basistechnieken HP Prime** door.

Inhoud

1	Functiewaarden, nulpunten en toppen	14
2	Snijpunten van twee functies	15
3	Functies combineren	16
4	Families van functies	17
5	Hellingen van functies	18
6	Oppervlakte onder de grafiek	19
7	Functies die uit meerdere delen bestaan	20



1 Functiewaarden, nulpunten en toppen

Je weet hoe je een functie kunt invoeren via de app **FUNCTIE**, die je bereikt via **Apps Info**. Verwijder eerst eventuele ingevoerde functies met **Shift** **Esc** Clear.

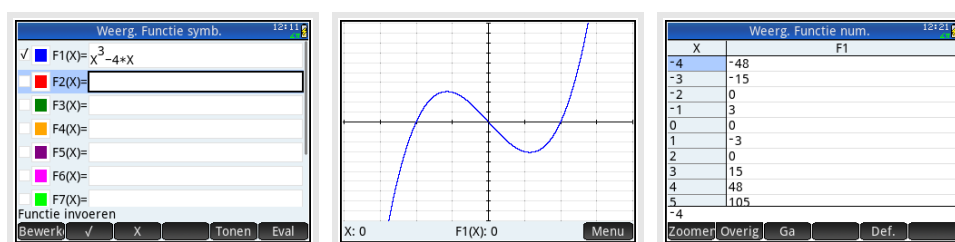
Voer bij F1(X)= de functie $f(x) = x^3 - 4x$ in en **OK**.

Breng hem netjes in beeld, kies zodanige vensterinstellingen dat x loopt vanaf -4 t/m 4 en y loopt vanaf -10 t/m 10.

Met **Num** **Left Setup** open je een tabel van de functie.

Met behulp van **Shift** **Num** **Left Setup** open je de instellingen van de tabel. Maak de tabel uit de afbeelding hiernaast.

Hieruit zijn enkele karakteristieken van de grafiek van deze functie (de nulpunten) eenvoudig af te lezen.



Deze **karakteristieken van de functie** zijn ook te bepalen als de functie minder eenvoudig in beeld is te krijgen.

Ga naar de grafiek met **Plot** **Left Setup**. Via **MENU** onderin de beeldrand openen een aantal mogelijkheden:

- Wil je de functiewaarde bij een x -coördinaat weten, gebruik **GA** en voer de waarde voor x in.
- Wil je een nulpunt weten, zet de cursor op de grafiek en wandel tot in de buurt van het nulpunt waarvan je de x -coördinaat wilt weten, kies dan **MENU** en **FCN** en 4: Nulpunt. Je ziet de gewenste x -waarde. Ga via **OK** terug naar het grafiekenscherf. Controleer dat $(-2,0)$, $(0,0)$ en $(2,0)$ de nulpunten van F1(X) zijn.
- Wil je een top (minimum of maximum) bepalen, kies **FCN** en 7: Extreme waarde. Je ziet de gewenste top. Ga via **OK** terug naar het grafiekenscherf. Controleer dat $(1,1547; -3,08)$ en $(-1,1547; 3,08)$ de toppen van de grafiek van F1(X) zijn.



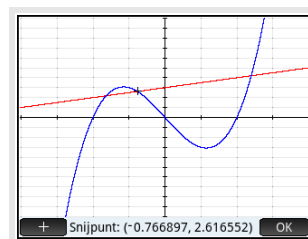
2 Snijpunten van twee functies

Voor het bepalen van de **snijpunten van de grafieken van twee functies** gebruik je ook de app **FUNCTIE**. Voer bijvoorbeeld in:

$$f(x) = x^3 - 4x \text{ en } g(x) = 0,5x + 3$$

Als je beide invoert met dezelfde instellingen als je hiervoor alleen voor de grafiek van f hebt gebruikt, krijg je de drie snijpunten keurig in beeld. Je kunt ook met vegen of knijpen zorgen dat je alle drie de snijpunten in beeld hebt.

- Kies **MENU** en **FCN**. Gebruik optie 5: Snijpunt...
- Er opent een pop-up waar wordt gevraagd welke objecten je willen laten snijden, de functie F1(X) met 1: F2(X) of met de 2: X-as. Kies 1 F2(X) en je ziet de coördinaten van een snijpunt in onder in beeld.
- Wandel nu met de cursor tot je in de buurt van een tweede snijpunt staat en herhaal het bepalen van het snijpunt.



Bereken zelf de snijpunten van de grafieken van y_1 en y_2 .

Als het goed is vind je (in drie decimalen nauwkeurig):

$(-1,631; 2,184)$, $(-0,767; 2,617)$ en $(2,398; 4,199)$.

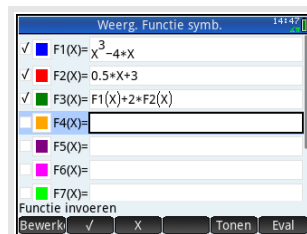


3 Functies combineren

Je kunt met de HP Prime eenmaal ingevoerde functies ook bij andere functies weer oproepen als $F1(X)$, $F2(X)$, enzovoorts. Ga weer uit van de reeds ingevoerde functies f als $F1(X)$ en g als $F2(X)$.

Als je de functie $h(x) = f(x) + 2 \cdot g(x)$ wilt onderzoeken, voer je die in de app **FUNCTIE** als derde functie in.

- Ga naar de app **FUNCTIE** en ga na, dat f en g er nog steeds in staan via de symbolische editor.
- Ga achter $F3(X)=$ staan. Kies de toets **Apps Info**. Selecteer onderin beeld **TOEP.** (je wil een variabele ophalen uit een toepassing of app) en selecteer **Functie**, dan naar **Symbolisch** en kies $F1$.
- Voer met behulp van $\left(\frac{()}{\text{N}}$ $\frac{x \cdot t \cdot n}{\text{Define D}}$ $F1(X)$ in en vervolg met $+ 2$ $F2(X)$ op dezelfde manier, zie figuur.
- Je kunt ook de (hoofd)letter F met $\frac{\text{ALPHA}}{\text{alpha}}$ $\frac{x^y}{\frac{y}{F}}$ en dan het getal 1 gebruiken voor invoer van $F1$. Vervolgens aanvullen zoals hiernaast.



Bekijk de grafiek van h , dus $F3(X)$, maar eens.

Als je de grafiek van $k(x) = f(x + 1)$ wilt bekijken, dan voer je deze functie bijvoorbeeld onder de vorige drie in als $F4(X)=F1(X+1)$.

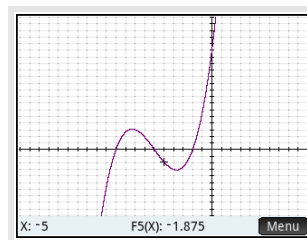
De grafiek van k is nu eenvoudig te bekijken. Vind je de grafieken van g en h daarbij maar lastig, dan kun je die functies even uitzetten. Je zet daartoe in het symbolische scherm gewoon de vinkjes voor die functienamen uit.

Tenslotte kun je **functies schakelen**.

Neem bijvoorbeeld weer $f(x) = x^3 - 4x$ en $g(x) = 0,5x + 3$.

Je kunt dan $s(x) = f(g(x))$ maken door deze functie in te voeren als $F5(X) = F1(F2(X))$.

Bekijk de grafiek van s maar eens. Je ziet hem hiernaast, kun je hem zo in beeld brengen?



Even oefenen

Bepaal de karakteristieken van de volgende functies:

- $f(x) = 0,5x^4 - 2x^2$
- $g(x) = f(x - 2)$
- $h(x) = 4 - x^2$
- $k(x) = f(x) + h(x)$
- $l(x) = k(0,5x) + 4$



4 Families van functies

Je kunt ook functies invoeren die ongeveer hetzelfde functievoorschrift hebben.

Alle rechte lijnen door (0,3) bijvoorbeeld hebben het functievoorschrift: $f(x) = ax + 3$.

Stel je voor dat je van deze rechte lijnen de grafieken wilt zien voor $a = -2$, $a = 1$, $a = 2$ en $a = 4$.

Je voert dan eerst een waarde in voor a , bijvoorbeeld $a = 1$.

Dat doe je in het basisscherm.

Je voert in $1 \rightarrow a$ door 1 in te voeren, dan   en vervolgens de letter A als variabele via  en dan naar , kies 1: Reëel en daarin A.

Ga dat na. Vervolgens voer je de functie in het menu **FUNCTIONS** in met de letter A op dezelfde manier ingevoerd. Denk er wel om dat het vermenigvuldigingsteken tussen A en X nodig is!

Nu kun je de grafiek bekijken met passende instellingen van het venster.

Als je voor a een ander getal kiest (op dezelfde manier als hiervoor), dan krijg je een aangepaste grafiek. Op dezelfde manier kun je grafieken bij andere families van functies tekenen.



5 Hellingen van functies

Je kunt met de HP Prime op een aantal manieren de helling van een grafiek in een bepaald punt berekenen. Je spreekt wel van het hellingsgetal of de hellingwaarde van een functie f voor een bepaalde waarde van x .

Je kunt zo'n **hellingsgetal** vinden met behulp van de app **FUNCTIE**. Gebruik nog steeds de functie f die aan het begin van dit practicum is gegeven. Verwijder alle andere functies uit je rekenmachine.

Stel je voor dat je het hellingsgetal voor $x = 3$ wilt berekenen. Dat kan zo:

- Ga naar de grafiek en gebruik (indien nodig) **MENU** en **GA** en tik vervolgens de gewenste x -waarde 3 en **Enter** om de cursor op het punt van de grafiek met x -coördinaat 3 te zetten.
- Kies dan **FCN** en de optie 5: Helling. **OK** te drukken en kies vervolgens .
- Je vindt nu het gewenste hellingsgetal $f'(3) = 23$.

Je kunt ook aan de grafiek van f een lijn tekenen die voor $x = 3$ de gewenste helling heeft, een **raaklijn** aan de grafiek van f voor $x = 3$.

- Breng eerst de functie weer in beeld.
- Kies **FCN** en optie 8: Raaklijn.
- De gevraagde raaklijn komt in beeld, als je nu de cursor langs de grafiek beweegt zie je de raaklijn meelopen.
- Helaas zie je geen bijpassende formule voor de raaklijn. Maar je kunt zelf wel vinden dat het $y = 23x - 54$ is.

Bereken het hellingsgetal van f voor $x = -1$ en teken de bijbehorende raaklijn en stel de vergelijking ervan op.

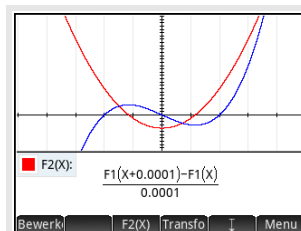
Ook een **complete hellingsgrafiek** is mogelijk. Als je intoetst:

$$F2(X) = \frac{F1(X+0.0001) - F1(X)}{0.0001}$$

dan is de grafiek van g een goede benadering voor de hellingsgrafiek van de gegeven functie f .

Breng zelf deze hellingsgrafiek van f in beeld.

Je kunt de functienaam van de functie waar de cursor op staat onderin beeld laten zien door **MENU** **FCN** en kies 2: Definitie.



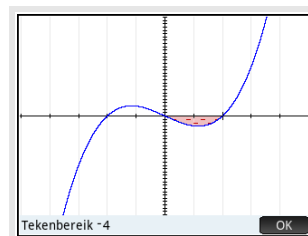
6 Oppervlakte onder de grafiek

Ook kun je met de app **FUNCTIONIE** de oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as bepalen.

Je gebruikt daarvoor de integraal van f tussen twee grenzen voor x .

Neem nog eens de grafiek van f .

- Kies (indien nodig) **MENU** **FCN**, en dan optie 6: Oppervlak.
Je kunt nu een getalswaarde als ondergrens intypen en **OK** **OK**.
- Typ vervolgens een waarde voor de bovengrens en **OK** **OK**.
- Het bedoelde gebied wordt nu 'ingekleurd' en de integraal komt onderaan het scherm in beeld.



Bepaal zelf de integraal tussen de grafiek van f en de x -as tussen $x = 0$ en $x = 2$.

Je vindt als alles goed gaat -4.

Let wel: dit is **niet** de oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as, maar de integraal. Dat betekent dat het gebied tussen $x = 0$ en $x = 2$ als negatief wordt geteld! De oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as tussen $x = 0$ en $x = 2$ is dus 4.

Als het gebied waarvan je de oppervlakte wilt weten zowel boven als onder de x -as ligt, moet je het bij nulpunten opsplitsen!



7 Functies die uit meerdere delen bestaan

Soms bestaat een functie uit meerdere delen. Stel je voor dat het voorschrift van een functie f luidt:

$$f(x) = -2x \text{ als } x < 1$$

$$f(x) = 2x \text{ als } x \geq 1$$

Om zo'n functie te kunnen invoeren in je grafische rekenmachine voer je in de app **FUNCTIE** het voorschrift in met behulp van de sjabloonknop .

- Maak in de app **FUNCTIE** de symbolische editor leeg met   .
- Ga naar F1(X)= en kies via de sjabloontoets het juiste sjabloon en .
- Voer het eerste deel van de functie in, gebruik   voor de ongelijktekens.
- Voer op dezelfde wijze het tweede deel van de functie in en .

Je krijgt dan het onderste scherm te zien.

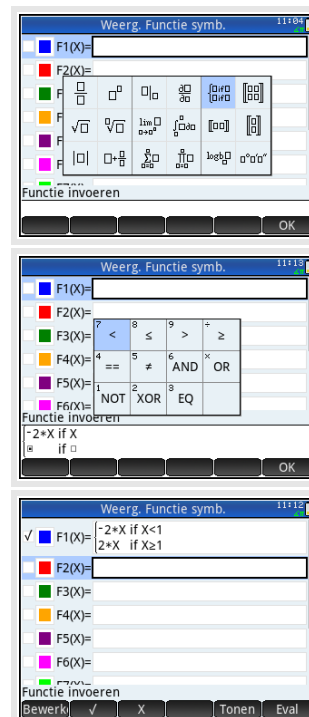
Bekijk bij  de grafiek.

Deze grafiek is iets anders dan die van $h(x) = |2x|$.

Die kun je maken door in de app **FUNCTIE** $F2(X)=|X|$ in te voeren.

Je vindt ook die functie via de sjabloontoets.

Maak de grafiek van h en bekijk het verschil met de grafiek van f .



Integralen en de HP Prime

Met de HP Prime kun je eenvoudig integralen berekenen. Je kunt echter ook Riemannsommen laten berekenen.

Loop eerst de practica: **Funcities en de HP Prime** en **Rijen en de HP Prime** door.

Inhoud

1	Integralen benaderen	22
2	Ondersom en bovensom	23



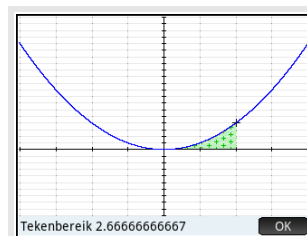
1 Integralen benaderen

Met de HP Prime kun je integralen rechtstreeks berekenen (benaderen) vanuit het functievoorschrift m.b.v. het CALC-menu. Dat CALC-menu vind je via **2ND** **TRACE**.

Neem de functie $f(x) = x^2$.

Stel je voor dat je de integraal van deze functie over het interval $[0,2]$ wilt weten. Je wilt dus berekenen: $\int_0^2 x^2 dx$.

- Open de app **FUNCTIE** en vul $f(x)$ in bij F1.
- Stel als venster bijvoorbeeld $-4 \leq x \leq 4$ bij $-2 \leq y \leq 10$ in en bekijk de grafiek.
- Druk op **MENU** **FCN** en kies 7: Oppervlak.
- Voer bij Vanaf: de linkergrens van het gebied onder de grafiek waarvan je de integraal wilt bepalen en **OK** **OK**.
- Vervolgens wordt de rechtergrens (Tot en met:) gevraagd. Voer de gewenste waarde in en **OK** **OK**.



Het bedoelde gebied wordt nu ingekleurd en de benadering van de integraal komt onderaan het scherm in beeld als Tekenbereik.

Je vindt als alles goed gaat 2,6667 (Wat je natuurlijk net zo eenvoudig door primitiveren had kunnen vinden.)

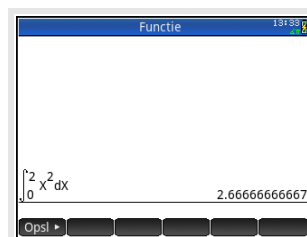
Met **OK** haal je de inkleuring weer weg.

Oefen jezelf met lastiger functies, met name met functies die je moeilijk of niet kunt primitiveren. Bekijk ook nog eens het verschil tussen de oppervlakte tussen de grafiek en de x-as op een bepaald interval en de bijbehorende integraal.

Een andere manier om deze integraal te berekenen is via de knop  **Units** **C**:

- Ga naar het basisscherm en kies het juiste sjabloon.
- Vul nu de integraal in zoals hij hier beschreven staat, dus als $\int_0^2 x^2 dx$.
- Toets **Enter** om de benadering uit te voeren.

Ga na, dat je ook nu 2,666... vindt.



2 Ondersom en bovensom

De integraal van de grafiek van $f(x) = x^2$ op het interval $[0,2]$ kun je benaderen door dit interval per eenheid in n gelijke deelintervallen te verdelen (in totaal zijn er op $[0,2]$ dus $2n$ deelintervallen).

Omdat deze functie op dit interval overal stijgend is, is de **ondersom** gelijk aan:

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

De **bovensom** is:

$$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

Het gaat hierbij dus om sommen van de rij t_k met directe formule:

$$t_k = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

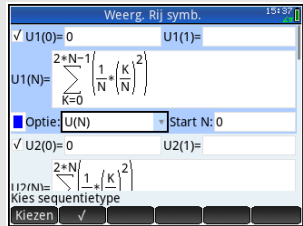
Voor n worden steeds verschillende getallen gekozen, afhankelijk van het aantal deelintervallen waarin je $[0,2]$ verdeelt.

De ondersom en de bovensom kunnen als rijen getallen worden ingevoerd:

- Voer in de app **Rij** het functievoorschrift van de ondersom:

$$u_1(n) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{ en de bovensom: } u_2(n) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{ in.}$$

- Ga in het basisscherm via  naar het goede sjabloon, vul dit (zie figuur) in en telkens **OK**.
- Bekijk de tabellen van beide rijen.



The screenshot shows the 'Rij' app interface. The top section is for defining the sequence U1(N) with the formula $\sum_{k=0}^{2N-1} \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{k}{N}\right)^2$. The bottom section is for defining the sequence U2(N) with the formula $\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{k}{N}\right)^2$. The 'Start N' is set to 0.

N	U1	U2
0	0	0
1	1	5
2	1.75	3.75
3	2.03703703704	3.37037037037
4	2.1875	3.1875
5	2.28	3.08
6	2.3425925926	3.00925925927
7	2.38775510204	2.95918367347
8	2.421875	2.921875
9	2.44855967079	2.89300411523

Je ziet, dat ondersom en bovensom elkaar naderen naarmate n groter wordt.

Denk er om dat deze werkwijze alleen opgaat bij functies die op het hele integratieinterval stijgend zijn of op het hele integratieinterval dalend zijn! Is dit niet het geval dan kun je niet met rijen werken.

Even oefenen

Oefen het benaderen van integralen met onder- en bovensommen.



Kansverdelingen en de HP Prime

Met de HP Prime kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de HP Prime en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.

Loop (ook) eerst het practicum: **Simulaties en tellen** door.

Inhoud

1	De binomiale kansverdeling	26
2	Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen	28
3	Kanshistogrammen	29
4	Betrouwbaarheidsinterval bij proporties	30
5	De normale kansverdeling	31
6	Grenswaarden bij normale kansverdelingen	32
7	Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden	33
8	Gemiddelde of standaardafwijking berekenen	34



1 De binomiale kansverdeling

Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0,23 = 0,77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$P(X = k) = \binom{100}{k} \cdot 0,23^k \cdot 0,77^{100-k}$$

hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(n-k)!}$ wat je op de HP Prime vind in de "gereedschapskist".

De kans $P(X = 20)$ is dan gewoon in het basisscherm  te bepalen:

- kies  en ga naar COMB;
- maak dan $\text{COMB}(100,20) * 0,23^{20} * 0,77^{80}$ en .

Het antwoord zie je in het venster hiernaast.

Dit kan echter gemakkelijker. De HP Prime kent namelijk de binomiale kansverdeling waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

- kies  en ga naar 5: Kans en kies 5: Dichtheid en 5: Binomiaal;
- voer vervolgens in 100, 0.23 en 20 (in die volgorde) en .
- je krijgt meteen de gevraagde kans 0,07637...

Op deze manier kun je ook $P(X \leq 20)$ berekenen door bij 5: Kans voor 6: Cumulatief en 5: Binomiaal te kiezen. Voor andere varianten moet je vervolgens omrekenen.

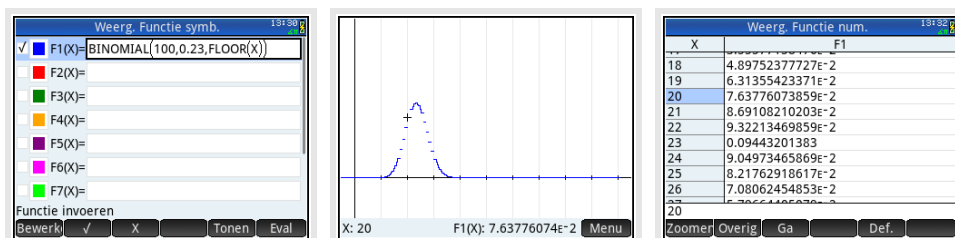
Ga na:

- $P(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2810...$
Kies  en ga naar 5: Kans, kies 6: Cumulatief en 5: Binomiaal en voer 100, 0.23, 20 in en .
- $P(X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 19) = 0,2046...$
- $P(X \geq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 19) = 0,7953...$
- $P(X > 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7189...$
- $P(10 \leq X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9) = 0,2808...$
- $P(10 < X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2040...$



Een **complete kansverdeling** is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele X in de app **FUNCTIE** als functie $F1(X)$ in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken.

Start de functie app en voer $F1(X)$ in, het commando FLOOR (is gehele deel van een getal) vindt je via de gereedschapskist, optie 1: Getallen, optie 2: Vloer. Hiermee zorg je dat de kans wordt berekend voor stappen van 1 eenheid langs de x -as. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet:



2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen

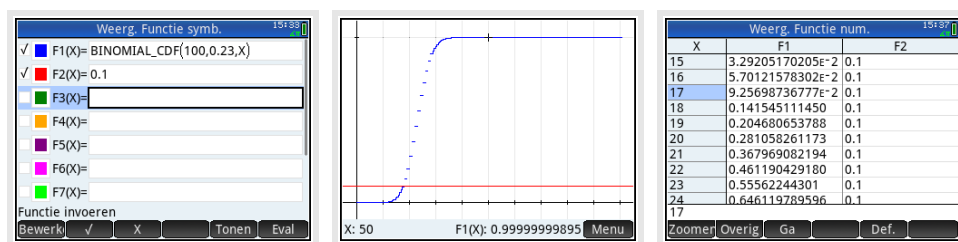
Vooral bij het toetsen van hypothesen wil je **grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen**.

Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0,23$.

Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als functie in F1(X) in de app **FUNCTIE** en dan de tabel van die functie in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.



Er zijn weer varianten mogelijk, bijvoorbeeld:

- Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X < g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
In dit geval gebruik je dat $P(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
De waarde 17 die je krijgt is dan dus $g - 1$, zodat nu $g = 18$.
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $P(X \geq g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$.
In dit geval gebruik je dat $P(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) > 0,90$.
Ga na, dat nu $g = 29$.



3 Kanshistogrammen

Bij een binomiale kansverdeling kun je een kanshistogram maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat kun je zo doen:

- Open de app **VAR 1 STATISTIEKEN** en maak eerst alle lijsten leeg via **Shift** **Esc** en kies 3: Alles.
- Voer in D1 de waarden voor de stochast $X = 0,1,2,\dots,100$ in door **MAAK** te toetsen en in het scherm dat ontstaat in te vullen zoals de bovenste figuur laat zien en **OK**.
- Voer in D2 de bijbehorende kansen in door **MAAK** te toetsen en in het scherm dat ontstaat in te vullen zoals de tweede figuur en **OK**. Denk er om dat je de binomiale verdeling invoert via **Mem B** en ga naar 5: Kans en kies 5: Dichtheid en 5: Binomiaal; en dan 100, 0.23 en X invullen en **OK**.
- Voer in D3 de bijbehorende cumulatieve kansen in door **MAAK** te toetsen en in het scherm dat ontstaat in te vullen zoals de derde figuur en **OK**. Denk er om dat je de binomiale verdeling invoert via **Mem B** en ga naar 5: Kans en kies 6: Cumulatief en 5: Binomiaal; en dan 100, 0.23 en X invullen en **OK**.
- Nu je de lijsten hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken. Met behulp van **Symb** kun je die diagrammen instellen zoals in de vierde figuur.
- Met behulp van **Plot** krijg je de vijfde figuur.

Oefen jezelf door zo een paar (cumulatieve) kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken.

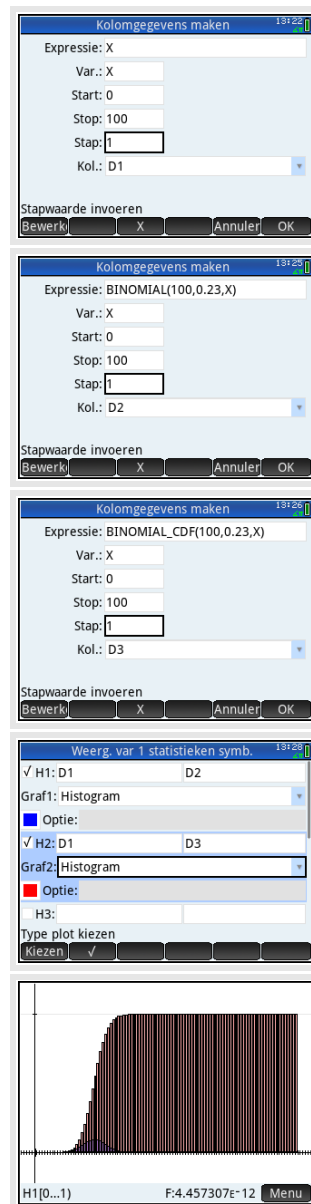
Centrum en spreiding

Als je een kansverdeling als lijst in de HP Prime hebt ingevoerd, dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- Het centrum van de kansverdeling van X is de **verwachting**, aangegeven met $\bar{X}$.
- De spreiding van de kansverdeling van X is de **standaardafwijking**, aangegeven met σ_X .

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, toets je **Num** en ga je naar **STATS**.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. De verwachting is 23 en de standaarddeviatie is ongeveer 4,21.



4 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

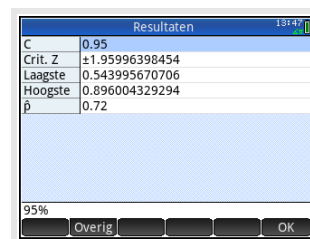
Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.

Het aantal successen in deze steekproef is 18.

Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie.

- Kies de app **INFERENTIE** en kies Methode: Betrouwbaarh.interval en Type: Z-Int: 1 π .
- Ga naar **Num**  en voer in X: 18, n: 25 en C: 0.95 (C van "confidence interval") en **BEREKEN**.
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval (zie figuur)
Laagste 0,543995670706
Hoogste 0,896004329294.



Resultaten	
C	0.95
Crit. Z	± 1.95996398454
Laagste	0.543995670706
Hoogste	0.896004329294
$\hat{p}$	0.72

95% Overig OK

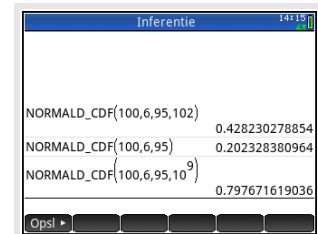


5 De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de HP Prime.

Open met  het basisscherm.

- $P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,4282\dots$
Kies  en ga 5: Kans, 6: Cumulatief en 1: Normaal;
voer vervolgens in 100, 6, 95 en 102 (in die volgorde) en .
- $P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,2023\dots$
Kies  en ga 5: Kans, 6: Cumulatief en 1: Normaal;
voer vervolgens in 100, 6 en 95 (in die volgorde) en .
- $P(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 1 - P(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,7976\dots$
Doe dit net als de eerste versie, neem 95 als ondergrens en een heel groot getal als bovengrens.



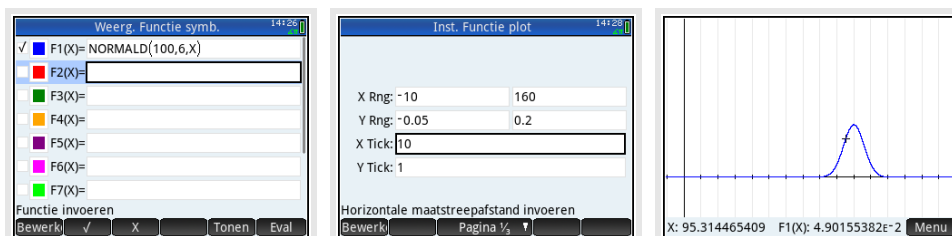
Loop deze berekeningen zelf na

Bij een normale kansverdeling kun je op de HP Prime de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je het de app **FUNCTIONE**.

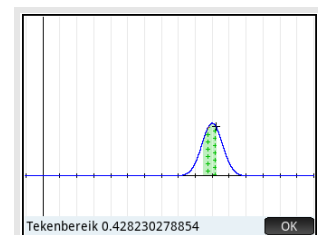
Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

$$P(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,4282\dots$$

Open de Functie applicatie en maak deze eventueel schoon met  . Vul bij F1(X) de functie in, gebruik   voor het instellen van je scherm.



Kies daarna onderin de beeldrand  en via  de optie 6: Oppervlak vul dan de ondergrens 95 en de bovengrens 102 in (denk weer om steeds tussentijds  te drukken).



6 Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de HP Prime. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

Open met  het basisscherm.

- $P(X < g | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$
Kies  en ga 5: Kans, 7: Inverse en 1: Normaal;
voer vervolgens in 100, 6 en 0.20 (in die volgorde) en .
je vindt $g = 94,95027\dots$ dus $g \approx 95$.
- $P(X > g | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$
geeft $P(X < g | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,80$
Dit doe je dan op een vergelijkbare wijze, nu krijg je $g \approx 105$.

Loop al deze berekeningen zelf na!



7 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Dat bereken je met een speciale functie: z-interval.

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma_X = 4$.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.

Het gemiddelde van deze steekproef $\bar{X} = 21,5$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dit gemiddelde normaal verdeeld is. Het betrouwbaarheidsinterval bereken je als volgt:

- Kies de app **INFERENTIE** en kies Methode: Betrouwbaarh.interval en Type: Z-Int: 1 μ .
- Ga naar **Num**  **Setup** en voer in $\bar{x}$: 21.5, n: 25 σ : 4 en C: 0.95 (C van "confidence interval") en **BEREKEN**.
- Je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval (zie figuur)
Laagste 1,9320288124
Hoogste 23,0679711876.



Resultaten	
C	0.95
Crit. Z	±1.95996398454
Laagste	19.9320288124
Hoogste	23.0679711876
95%	
Overig	OK

Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1.



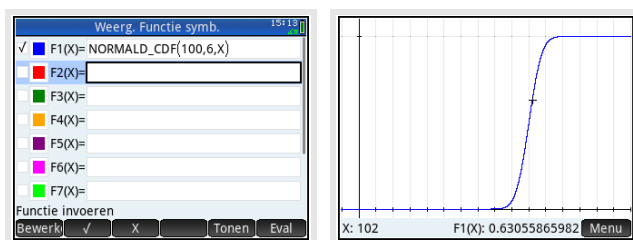
8 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen

Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling kun je ook goed met de app **FUNCTIE** werken en daarin de cumulatieve normale verdeling invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$$P(X < 102 | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6)$$

Je voorziet eerst je grafiekscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld laat je x lopen tussen 0 en 100 en laat je y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaalkromme) tussen -0,1 en 1,1. Zorg dat er geen functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:



In de grafiek kies je **MENU** en **GA** en spring je naar $x = 102$, je kunt dan de bijbehorende y -waarde (de gevraagde kans) aflezen 0,6305...

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans. Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$$P(X < g | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,20$$

Je voert dan voor F1(X) de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en voor F2(X) de gegeven kans 0,2. Met behulp van "Snijpunt" vind je dat $g = 94,95027...$, dus $g \approx 95$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X de **standaardafwijking** bepalen als gegeven:

$$P(X < 102 | \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??) = 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij F1(X) de cumulatieve normale verdeling in met $\mu = 100$ en $\sigma = x$ en als onder- en bovengrens 0 en 102.
- Voer bij F2(X) de waarde 0,20 in.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 7,8943...$

Dus is de standaarddeviatie in dit geval $\sigma \approx 7,9$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X het **gemiddelde** bepalen als gegeven:

$$P(X < 102 \mid \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij F1(X) de cumulatieve normale verdeling in met $\mu = x$ en $\sigma = 6$ en als onder- en bovengrens 0 en 102.
- Voer bij F2(X) de waarde 0,6 in.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu gemiddelde!) loopt van 80 tot zeg 120 en y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 100,4799\dots$

Dus is het gemiddelde in dit geval $\sigma \approx 100,5$.



Matrixrekening en de HP Prime

De HP Prime kan je behulpzaam zijn bij het rekenen met matrices. Er bestaat een sjabloon voor. Vooral bij machten van matrices is deze rekenmachine erg handig. Loop eerst het practicum: **Basistechnieken HP Prime** door.

Inhoud

1	Matrices invoeren	38
2	Matrices oproepen en ermee rekenen	39
3	De elementen van een matrix afronden	40



1 Matrices invoeren

Een matrix invoeren kan op verschillende manieren, waarschijnlijk de makkelijkste manier is

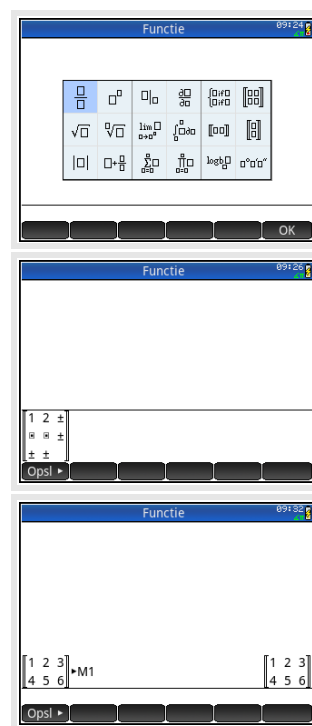
- Ga naar het basisscherm via  en kies  om de sjablonen te openen, zie het bovenste plaatje.
- Kies het matrix sjabloon, helemaal rechtsboven met de dubbele vierkante haken $\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$.
- Nu ga je de matrix vullen: je voert steeds een getal in en gaat met de pijltjestoetsen naar de volgende positie. De matrix past automatisch afmetingen aan.
- Als de matrix is ingevoerd, sla je hem als matrix M1 op door  en vervolgens  en via  naar 4: Matrix en M1 en .
- Je ziet nu dat de 2×3 -matrix M_1 is ingevoerd.

Voer zelf een matrix M_1 in.

Zo kun je een tiental matrices invoeren. Je kunt een matrix ook een eigen naam geven, zoals AA, AB, A1, etc.

Je toetst dan na  de gewenste combinatie van twee tekens in en , waarna je de vraag "Wilt u een variabele genaamd A1 maken?" via  moet beantwoorden.

Je kunt dus meer dan 10 matrices invoeren. Ook grote matrices kun je maken, maar op zo'n scherm van een grafische rekenmachine is dat niet erg handig.



2 Matrices oproepen en ermee rekenen

Elke matrix die je hebt ingevoerd kun je oproepen in het basisscherm door:

- voor een matrix M1 de naam in te voeren via   1, of
- matrix M1 ophalen via   4: Matrix en M1.
(Een matrix A1 moet je ophalen via   en A1.)

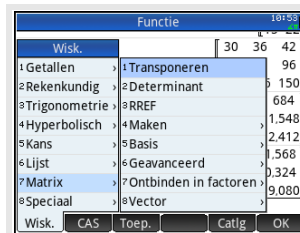
Onthoud dus wel goed onder welke variabele je een bepaalde matrix hebt ingevoerd!

Om met matrices te kunnen rekenen, moet je de juiste matrixletter(s) oproepen in het rekenscherm. Je kunt dan de normale matrixbewerkingen uitvoeren, namelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een getal, vermenigvuldigen, machtsverheffen.

Uiteraard gelden dan wel de gebruikelijke rekenregels voor het vermenigvuldigen van matrices.

Soms moet je juist de getransponeerde matrix M_1^T gebruiken om mee te rekenen.

- Kies daarvoor via   7: Matrix en 1: Transponeren;
- Je ziet dan TRN() en je voert tussen haakjes M1 in (zoals hier-voor beschreven) en .
- De getransponeerde matrix M_1^T komt in beeld.



Even oefenen

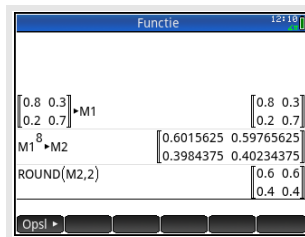
Oefen het rekenen met matrices en controleer nog eens dat je grafische rekenmachine alle rekenregels voor matrices kent.



3 De elementen van een matrix afronden

Soms verschijnen er decimalen, vooral bij overgangsmatrices kan dit het geval zijn. Het is dan mogelijk om de elementen van de matrix af te ronden:

- Voer bijvoorbeeld in het basisscherm eerst een vierkante matrix in met decimalen, sla hem op (bijvoorbeeld als M1) en bereken er een hoge macht van en sla die ook op (bijvoorbeeld als M2).
- Ga naar  kies ROUND. (Voer eventueel eerst de eerste letter(s) in.)
- In het rekenscherm krijg je nu: ROUND(). Vul dit aan tot ROUND(M2,2) (gebruik  voor de komma) als je wilt afronden op twee decimalen en .
- Je krijgt nu de afgeronde matrix in beeld.



The calculator screen shows the following sequence of operations and results:

Operation	Result
$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \rightarrow M1$	$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$
$M1^8 \rightarrow M2$	$\begin{bmatrix} 0.6015625 & 0.59765625 \\ 0.3984375 & 0.40234375 \end{bmatrix}$
ROUND(M2,2)	$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$

Even oefenen

Voer dit zelf een paar keer uit.



Parameterkrommen en de HP Prime

De HP Prime kan krommen tekenen die worden gegeven door x als functie van t en y als functie van t . De variabele t heet de **parameter** van de kromme, je kunt hem opvatten als de "tijd". Op elk tijdstip t kun je met behulp van de functies $x(t)$ en $y(t)$ berekenen op welke plaats (x, y) het punt dat de kromme doorloopt zich bevindt. Met deze rekenmachine kun je geen hellingsgetallen opvragen of raaklijnen tekenen in een punt van de kromme.

Een andere manier om krommen te beschrijven is met behulp van poolcoördinaten. Daarover gaat het laatste deel van dit practicum.

Loop eerst het practicum: **Functies en de HP Prime** door.

Inhoud

1	Een parameterkromme tekenen	42
2	Krommen in poolcoördinaten	43



1 Een parameterkromme tekenen

Stel je voor dat je de kromme K wilt tekenen gegeven door:

$$x(t) = 5 \sin(t) \text{ en } y(t) = 5 \sin(2t), \text{ met } t \text{ lopend van } 0 \text{ tot en met } 2\pi.$$

Je gaat via  naar de app **PARAMETRISCH**.

Je komt in het symbolische scherm waar je de parameterkromme kunt invoeren, tap op de rechterbovenhoek van het scherm (waar de tijd staat aangegeven) en zet de hoekmode in radialen. Zie het scherm hiernaast. Als er nog krommen in staan verwijder die dan met  .

Vervolgens voer je bij $X1(T)=$ en $Y1(T)=$ de kromme in.

Hierbij gebruik je de knop  om de variabele t in te voeren, hier levert dat een T op.

In de figuur zie je de kromme op de juiste wijze ingevoerd.

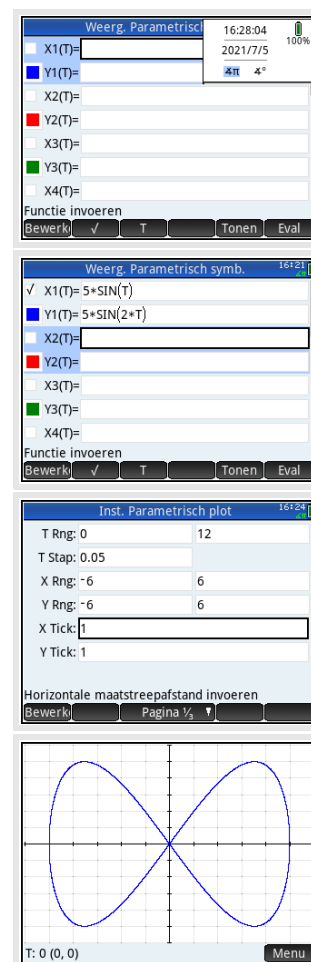
Voordat je de grafiek gaat bekijken moet je eerst de vensterinstellingen goed maken. Dat doe je (net als bij functies) via . Het scherm dat je dan krijgt begint met de in te stellen waarden voor T en vervolgens kun je de juiste waarden voor X en Y gaan instellen. In de figuren zie je geschikte instellingen voor de gegeven kromme. Je ziet, dat de stapgrootte voor t is ingesteld op 0,1. Gebruik , ga naar het tweede scherm van de instellingen en kies "Segm. vaste stappen". Je kunt ook kleinere stappen maken, maar dan duurt het tekenen van de kromme langer. Maak je daarentegen hele grote stappen, dan worden er maar weinig punten van de kromme berekend, die dan worden verbonden op een zodanige manier dat je de kromme niet herkent!

Nu kun je via  de kromme tekenen. Er ontstaat een mooie "liggende acht". Mogelijk is de kromme niet helemaal gesloten. Kies dan voor t waarden van 0 tot bijvoorbeeld 10 (dus iets meer dan 2π).

Met   kun je over de kromme lopen. Je gaat er dan met "tijd" stappen van 0,1 (die was immers ingesteld) overheen. De bijbehorende waarden voor t , x en y komen in beeld.

Experimenteer maar eens even met andere instellingen voor t .

Oefen het tekenen van krommen met de HP Prime. Zoek voorbeelden van krommen in je wiskundeboek.



2 Krommen in poolcoördinaten

Een andere manier om een kromme te beschrijven is met zogenaamde **poolcoördinaten**. Daarbij werk je in een x,y -assenstelsel, maar geef je een punt P van een kromme weer door een functie van de vorm $r = f(\theta)$, waarin θ de hoek is die het lijnstuk OP met de positieve x -as maakt.

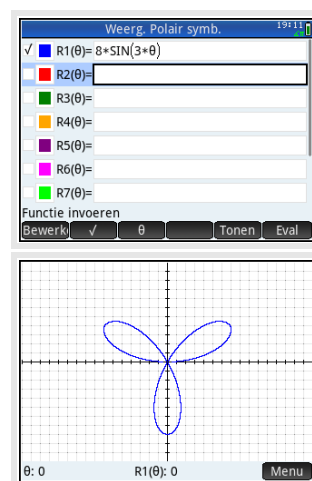
Een driebladige bloem krijg je met $r = 8 \sin(3\theta)$.

Je voert die formule zo in:

- Open de app **POLAIR** en er voor dat de radialen staan ingesteld als hoekmaat.
- Verwijder eerdere invoer (indien nodig) met **Shift** **Esc** Clear.
- Voer de gewenste formule in. Gebruik **xtθn** Define D voor de variabele, in dit geval is dat de Griekse letter θ (theta).
- Stel via **Shift** **Plot** Setup het venster goed in. In dit geval zijn de standaardinstellingen wel goed.
- Met **Plot** Setup krijg je de kromme te zien.

Ook nu kun je met **MENU** **TRACE** over de kromme lopen, met **ZOOMEN** inzoomen en uitzoomen.

Experimenteer met krommen in poolcoördinaten. Hoe maak je bijvoorbeeld een achtbladige bloem?



Regressie en de HP Prime

De HP Prime kan bij bepaalde soorten verbanden bij een gegeven tabel een formule maken. Als je bijvoorbeeld denkt dat de grafiek bij een gegeven tabel bij benadering een rechte lijn is, dan past daar een lineair verband bij. Deze rekenmachine kan dan een formule voor dat lineaire verband opstellen.

Loop eerst het practicum **Basistechnieken HP Prime** door.

Inhoud

- | | | |
|---|------------------------------------|----|
| 1 | Een trendlijn bepalen | 46 |
| 2 | De correlatiecoëfficiënt berekenen | 47 |



1 Een trendlijn bepalen

Stel je voor dat je de volgende statistische gegevens hebt:

Lengte vader (cm)	173	168	178	180	165
Lengte zoon (cm)	180	175	180	183	175

Je kunt bij deze waarden een **puntenwolk** maken. Soms liggen die punten ongeveer op een rechte lijn, de zogenaamde **trendlijn** of **regressielijn**. Je kunt dat als volgt nagaan:

- Open de app **VAR 2 STATISTIEKEN** en voer de gegevens in C1 en C2 in. (Misschien moet je eerst beide lijsten nog schoonmaken via **Shift** **Esc** Clear.)
- Ga vervolgens naar **Symb** **Setup** en stel daar bij S1 beide lijsten C1 en C2 in, kies voor Type 1: LINEAIR en bij Fit 1: $M \cdot X + B$. Druk onderaan de pagina op **FIT**. Er komt dan een bolletje achter als teken dat "Fit" aan staat.
- Ga naar **Shift** **Plot** **Setup** en stel de x-waarden in van 150 tot 200 en de y-waarden ook.
- Als je nu naar **Plot** **Setup** gaat zie je de puntenwolk met de trendlijn (regressielijn).
- Via **MENU** **FCN** en 3: Definitie zie je de vergelijking van de regressielijn als je er met de pijltjestoetsen op gaat staan.

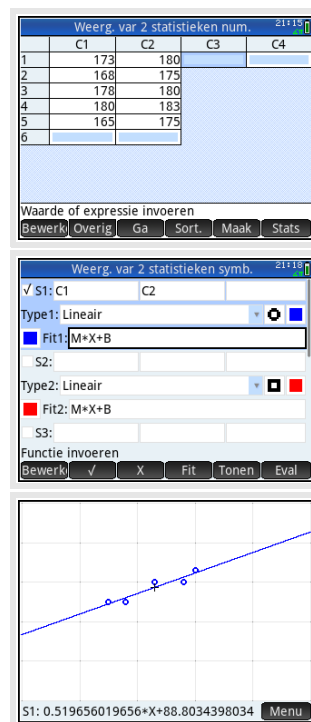
Je ziet dat de trendlijn de vergelijking $y \approx 0,52x + 88,80$ heeft. Hierin is x de lengte van de vader en y de lengte van de zoon.

Probeer zelf het resultaat te krijgen dat je in de figuur ziet.

Even oefenen

Zoek in je wiskundemateriaal een tabel met gegevens waartussen een verband zou kunnen bestaan.

Maak daarbij een trendlijn en laat de rekenmachine een formule voor die trendlijn opstellen.



2 De correlatiecoëfficiënt berekenen

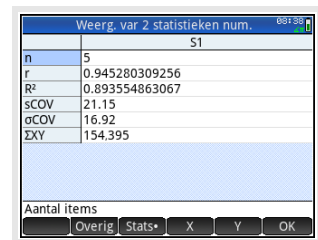
Gebruik weer de gegevens die eerder in dit practicum zijn ingevoerd in de app **VAR 2 STATISTIEKEN**.

Open die gegevens via .

Toets **STATS** en je zie het scherm hiernaast.

Je ziet: $r_{xy} \approx 0,945$.

Er is dus sprake van een hoge correlatie.



Weerg. var 2 statistieken num.	
	S1
n	5
r	0.945280309256
R ²	0.893554863067
sCOV	21.15
σCOV	16.92
ZXY	154.395

Aantal items

Overig Stats* X Y OK

Opmerkingen:

- Je hebt vast wel gezien dat er ook andere verbanden tussen de variabelen kunnen worden onderzocht. Je kunt namelijk bij sommige gegevens ook een kwadratisch verband, of een derdegraads of vierdegraads verband, of een exponentieel verband, of een machtsverband of een logaritmisch verband proberen te vinden omdat de gegevens daar beter bij lijken te passen.
- Je hebt nu de lengtes van de vaders in C1 ingevoerd, dus die horen in de regressielijn bij de variabele x en de lengtes van de zoons (in C2) zijn de uitkomsten y. Dat kan natuurlijk ook andersom. Je hoeft daarvoor bij  in S1 alleen de twee kolommen te verwisselen.



Rijen en de HP Prime

Met de HP Prime kun je op diverse manieren rijen in beeld brengen. Verder kun je daarbij ook gemakkelijk somrijen en verschilrijen maken. Je kunt tijdgrafieken en webgrafieken tekenen. En bij combinaties van rijen ook fasegrafieken.

Loop eerst het practicum: **Basistechnieken HP Prime** door.

Inhoud

1	Rijen met directe formules	50
2	Rekursief gegeven rijen	52
3	Tijdgrafiek en webgrafiek	53
4	Stelsels rijen	54



1 Rijen met directe formules

Rijen met directe formules kunnen op drie manieren worden ingevoerd.

Ga uit van de rij met directe formule:

$$u_n = 800 \cdot 1,05^n \text{ met } n = 0,1,2,\dots$$

Rij als functie

Je kunt de rij als een gewone functie opvatten met als domein alleen de getallen 0,1,2,3,4,...

Je krijgt dan zo de rij en de grafiek in beeld:

- Toets **Apps** en open de app **FUNCTIE**.
- Voer het functievoorschrift in: $F1(X) = 800 \cdot 1,05^X$.
- Toets **Shift** **Num** en stel de tabel zo in, dat hij start bij $x = 0$ en dat de stapgrootte 1 is.
- De termen van de rij vind je via **Num**.
- Via **Plot** vind je de grafiek van deze rij, helaas als doorgetrokken kromme, niet met losse punten.

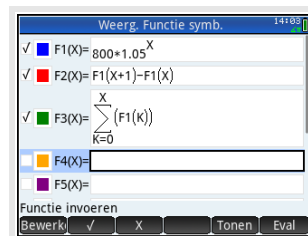
Je kunt eenvoudig de bijbehorende **verschilrij** in beeld brengen via: $F2(X) = F1(X+1) - F1(X)$.

Voer $F1(X+1) - F1(X)$ als tekst in of gebruik **Vars** en kies bij **TOEP.** 1: Functie en 2: Symb om $F1$ op te halen.

Zo kun je de bijbehorende **somrij** maken:

- Ga naar $F3(X)=$ en kies via **Units** het juiste sjabloon (zie figuur).
- Vul het in zoals je in de figuur ziet. De nieuwe variabele K dient als nummer van de termen van de rij en Σ is het sommatieteken.

Bekijk de tabellen en de grafieken van deze rij, de verschilrij en de somrij.



Rij als lijst getallen

Je kunt de rij als een lijst met getallen opvatten. Je kunt hem dan invoeren in de lijsten D1, D2, enz. Dat gaat zo:

- Toets **Apps** en open de app **VAR 1 STATISTIEKEN**.
- Maak indien nodig alle lijsten eerst leeg met **Shift** **Esc** en 3: Alles.
- Ga naar het basisscherm met **Settings**, op de achtergrond is de statistiek-app actief zodat de lijsten D1, D2, ... gemakkelijk bereikbaar zijn.
- Voer in D1 de nummers van de termen (hier: 0,1,2,3,4,...,20) in door de cursor op D1 te zetten en **MAAK**. Kies in het verschenen venster X voor de Expressie en de Var. Maak Start 0, Stop 100 en Stap 1 en **OK**.
- Voer in D2 de termen van de rij in door de cursor op D2 te zetten en **MAAK**. Kies in het verschenen venster $800 \cdot 1,05^X$ voor de Expressie en X voor de Var. Maak Start 0, Stop 100 en Stap 1 en **OK**.
- Je hebt nu de rij als tabel in D2.

Opmerking:

Als je de rij eerst als functie $F1(X)$ hebt ingevoerd, kun je hem in D2 ook oproepen als $F1(X)$.



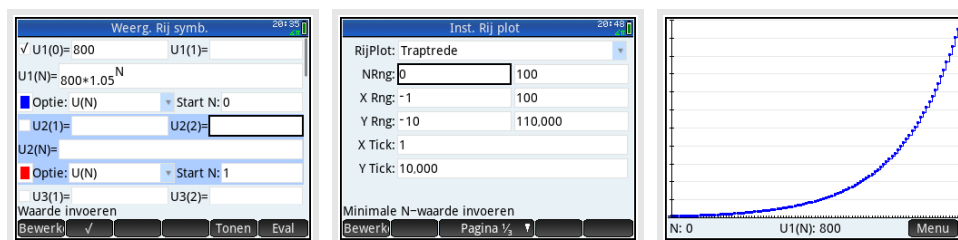
De bijbehorende **verschilrij** kan nu in D3 door in het basisscherm via  en  ΔList op te zoeken met de pijltjestoetsen en ΔList(D2) in te voeren en dan  D3.

Je kunt de bijbehorende **somrij** maken in L4 door in het basisscherm via  en  cumSum op te zoeken met de pijltjestoetsen en cumSum(D2) in te voeren en op te slaan in D4.

Bekijk de tabellen en de grafieken van deze rij, de verschilrij en de somrij.

Rij in de seq-mode

Speciaal voor Rijen is er echter de app **RIJ** die je bereikt via . Je ziet dan het venster linksonder.



Achter U(N) voer je vervolgens het voorschrift van de rij in: $U(N) = 800 * 1,05^N$.

De N kun je in deze app via  invoeren. Kies Start N: 0. Achter U1(0) voer je de term in die hoort bij de startwaarde van N, dus 800.

Bekijk de tabel met .

Bekijk de grafiek met  en kies voor automatisch schalen. Zorg er wel voor dat in de instellingen van de grafiek (bereikbaar via   de RijPlot staat ingesteld op Traptrede (daarover later meer).

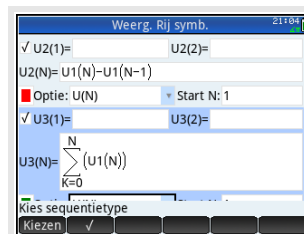
Maak zelf deze grafiek van de rij waarbij n loopt van 0 t/m 100.

Verder kun je eenvoudig een bijbehorende **verschilrij** maken door $U2(N) = U1(N) - U1(N-1)$ in te voeren met Start N: 1.

Ook kun je een **somrij** maken door bij $U3(N)$ in te voeren :

- Ga naar $U3(N)=$ en kies via  het juiste sjabloon (zie figuur).
- Vul het in zoals je in de figuur ziet, neem Start N: 1.

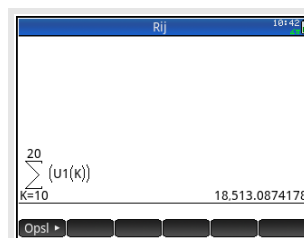
De nieuwe variabele K dient als nummer van de termen van de rij en Σ is het sommatieteken.



Opmerking:

Wil je de **som van een aantal termen** berekenen, dan werk je in het basisscherm.

De som van de termen u_{10} t/m u_{20} voer je via  in als $\sum_{k=10}^{20} (u(k))$. Probeer maar...



Even oefenen

Oefen het werken met rijen gegeven door een directe formule. Gebruik voorbeelden uit je wiskundemateriaal.



2 Recursief gegeven rijen

Als je een rij die gegeven is door een recursieformule wilt invoeren, moet je op de HP Prime eerst de app **RIJ** openen.

Bekijk nog eens de rij met directe formule:

$$u_n = 800 \cdot 1,05^n \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots$$

De bijbehorende recursieformule is:

$$u_{n+1} = 1,05 \cdot u_n \text{ met } u_0 = 800$$

In de rijen-app is de rij ook als recursieformule in te voeren. Bij deze rekenmachine begint het rij-scherm begint met $u(n) =$, in plaats van $u(n+1) =$. Je moet daarom eerst het recursievoorschrift aanpassen tot:

$$u_n = 1,05 \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = 800$$

Bedenk dat dit mag, omdat beide manieren van schrijven betekenen: "Deze term ontstaat uit de vorige door ..."

Daarna kun je hem invoeren op dezelfde manier als beschreven in het voorgaande. De U1 vind je als **U1** en de (N-1) als **(N-1)** onderaan het scherm als je in het vak achter U1(N)= staat en **BEWERKEN** hebt getoetst.

Bekijk de grafiek met **View Copy** en kies voor automatisch schalen. Zorg er wel voor dat in de instellingen van de grafiek (bereikbaar via **Shift Plot Setup**) de RijPlot staat ingesteld op Traptrede (daarover later meer).

Maak een grafiek van de rij waarbij n loopt van 1 t/m 100. Oefen het werken met rijen gegeven door een recursieformule.

Opmerkingen:

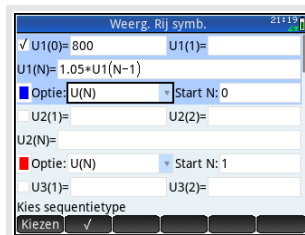
- Op dezelfde manier als hiervoor kun je een bijbehorende **verschilrij** of een bijbehorende **somrij** maken.
- De **som van een aantal opeenvolgende termen** bepaal je op dezelfde wijze als bij rijen met directe formules.

De rij van Fibonacci

Hier zie je hoe de rij van Fibonacci kan worden ingevoerd.

Dit is een recursieve uitdrukking van de tweede orde. En daar moet je dus eerst voor kiezen, nadat je andere rijen hebt verwijderd.

Bekijk de bijbehorende grafiek en tabel.



3 Tijdgrafiek en webgrafiek

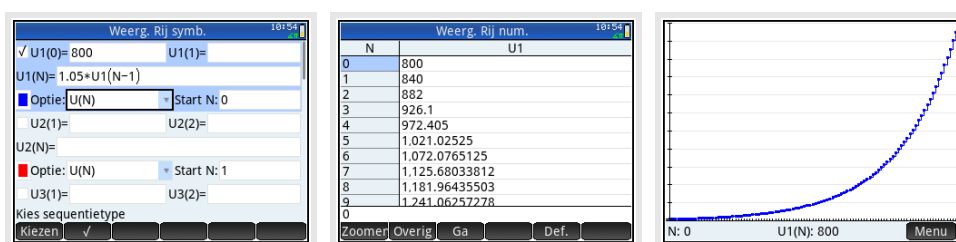
Je kunt bij rijen twee soorten grafieken maken:

- "gewone" grafieken of tijdgrafieken heten zoals je die eerder zag;
- webgrafieken.

De bijbehorende instelling "Traprede" of "Spinnenweb" vind je via   als de app **RJ** actief is.

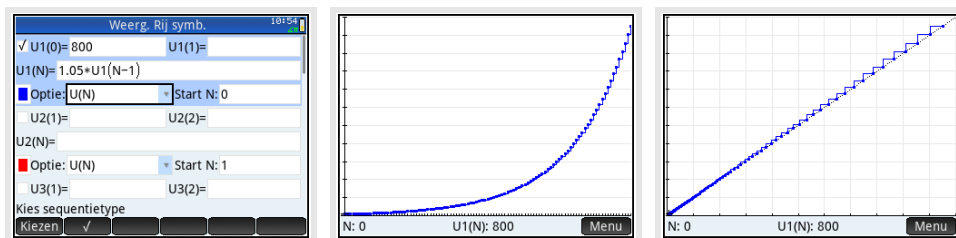
Gebruik weer dezelfde rij als hiervoor met directe formule: $u_n = 800 \cdot 1,05^n$ en recursieformule: $u_n = u_{n-1} \cdot 1,05$ en $u_0 = 800$, waarbij $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

De **tijdgrafiek** verschijnt netjes in beeld als "Traprede" is ingesteld, de formule is ingevoerd en de juiste scherminstellingen (n loopt van 1 t/m 100 en $u(n)$ loopt van 0 tot 110000) en tabelinstellingen zijn gekozen. Je ziet dan:



De **webgrafiek** maak je zo:

- Eerst kies je via   de instelling "Spinnenweb".
- Vervolgens pas je het venster zo aan, dat zowel in de x-richting als in de y-richting rijtjeren (lopend van 0 naar 110000 en eventueel nog groter) op het scherm passen.
- Met  zie je de punten van de grafiek, die worden gekoppeld aan de lijn $y = x$ (de bijbehorende theorie vind je in je wiskundemateriaal).

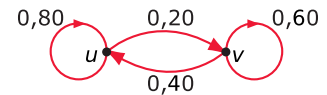


4 Stelsels rijen

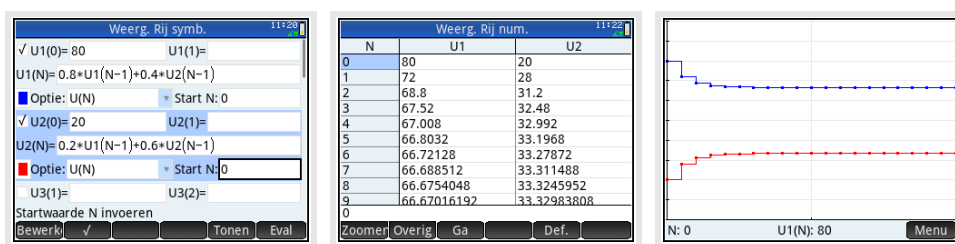
Er ontstaan stelsels rijen als je bijvoorbeeld te maken hebt met een migratiematrix, met de prooi-roofdier-cyclus, of bepaalde economische modellen. Een voorbeeld van zo'n stelsel is (de bijpassende migratiegraaf staat er naast):

$$\begin{cases} u(n) = 0,8 \cdot u(n-1) + 0,4 \cdot v(n-1) \\ v(n) = 0,2 \cdot u(n-1) + 0,6 \cdot v(n-1) \end{cases}$$

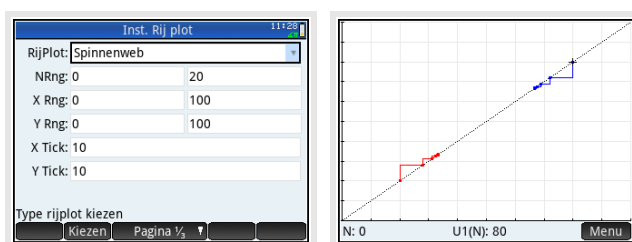
met $u(0) = 80$ en $v(0) = 20$.



Na het openen van de app **RIJ** kun je dit stelsel in invoeren, het venster instellen (denk er om dat in de y-richting de waarden van de rijen komen, dus je kunt beter eerst de tabel bekijken) en de bijpassende tijdgrafieken maken. Bij de instelling "Traptrede" krijg je de tijdgrafieken.



Je kunt ook een webgrafiek van de situatie maken. Je kiest dan de instelling "Spinnenweb" en de X Rng en de Y Rng hetzelfde. Hier wordt hij niet erg spectaculair, ga zelf maar na.



Veel leuker is het om dit te doen bij een geschikt prooi-roofdier-model...

Helaas kan de HP Prime geen **fasegrafieken** maken waarin $u(n)$ en $v(n)$ tegen elkaar worden uitgezet.



Simulaties en tellen en de HP Prime

De HP Prime kan je behulpzaam zijn bij het bepalen van kansen. Hij kan simulaties van kansexperimenten uitvoeren en je helpen bij het tellen van mogelijkheden. Loop eerst het practicum: **Basistechnieken HP Prime** door.

Inhoud

1	Simuleren	56
2	Werpen met dobbelstenen simuleren	57
3	Permutaties en combinaties	58



1 Simuleren

Het werpen met een dobbelsteen kun je **simuleren met toevalsgetallen**.

Bij de HP Prime vind je de random generator (toevalsgetallenmaker) in de catalogus (alfabetische lijst met alle functies):

- Ga via  naar het basisscherm en dan naar de gereedschapskist via  en kies de catalogus via **CATLG**.
- Je krijgt een lange lijst met mogelijkheden waar je door heen kunt met de pijltjestoetsen, maar sneller is  **8**  voor de letter R en daarna eventueel nog de letter A en dan met de pijltjestoetsen naar "RANDOM".
- Kies RANDOM() en .
- Blijf op  drukken voor het steeds opnieuw genereren van een "willekeurig" getal tussen 0 en 1.

Je krijgt zo toevalsgetallen tussen 0 en 1 (in zeven decimalen).

Als je toevalsgetallen tussen 0 en 2 wilt, dan vermenigvuldig je ze met 2.

In het rekenscherf doe je: $2 * \text{RANDOM}()$.

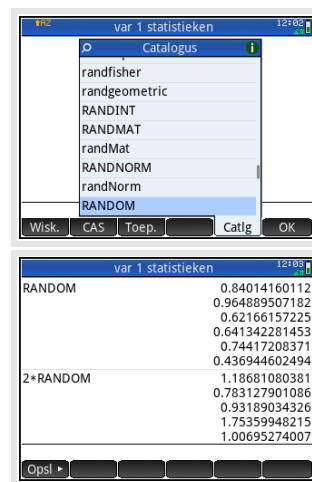
Als je gehele toevalsgetallen vanaf 1 t/m 6 wilt, dan vermenigvuldig je ze met 6, tel je er 1 bij op en rond je af op 0 decimalen. Dat afronden vind je bij "ROUND" in de gereedschapskist.

In het rekenscherf doe je: $\text{ROUND}(6 * \text{RANDOM}() + 1, 0)$.

Maar deze gehele toevalsgetallen vanaf 1 t/m 6 kun je gemakkelijker krijgen door RANDINT() te gebruiken.

Voor de simulatie van 10 keer werpen met een dobbelsteen ga je dan zo te werk:

- Open in het basisscherf de gereedschapskist en kies "RANDINT".
- Omdat je 10 keer met een dobbelsteen wilt werpen voer je in $\text{RANDINT}(10, 1, 6)$ (de komma is de knop ) en .
- Als je op  blijft drukken krijg je die simulatie steeds weer te zien.



2 Werpen met dobbelstenen simuleren

Om met behulp van simulaties kansen te bepalen, moet je gemakkelijk kunnen tellen hoe vaak elk getal in je simulatie voor komt. Je maakt dan van je toevalsgetallen een frequentietabel.

Werpen met één dobbelsteen

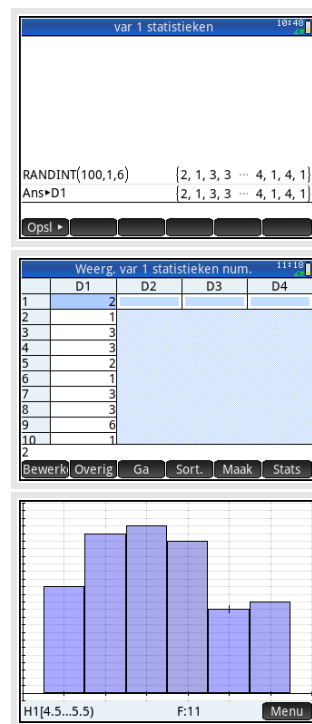
Stel je voor dat je 100 keer met een dobbelsteen gooien wilt simuleren en zo de kans wilt bepalen op het gooien van een 5. Je doet dan het volgende:

- Open via  de lijst met applicaties en start de app **VAR 1 STATISTIEKEN**.
- Ga naar het basisscherm via  en voer `RANDINT(100,1,6)` in op de manier die je eerder hebt gebruikt en .
- Sla de lijst met de worpen als lijst D1 op via  en haal D1 op via  1: var 1 statistieken dan 4: Numeriek en 1: D1 en .
- Bekijk de lijst eventueel in het numerieke scherm via .
- Vervolgens kun je de lijst sorteren, via . Kies "Oplopend" of "Aflopend".
- In de gesorteerde lijst kun je gemakkelijk tellen hoe vaak de vijf voorkomt van de 100 "worpen".

Als in de lijst 11 keer een vijf voorkomt, dan is de kans op 5 in deze simulatie $\frac{11}{100} = 0,11$.

Nog eenvoudiger is het om meteen een staafdiagram (histogram) te maken bij lijst D1. Hoe je dit doet vind je in het practicum "Statistiek en de HP Prime".

Voer zelf zo'n simulatie uit.



Werpen met twee dobbelstenen

Als je bij het werpen met twee dobbelstenen de kans wilt bepalen op een bepaald aantal ogen dat op beide stenen samen boven komt te liggen, hebben niet alle mogelijkheden een gelijke waarschijnlijkheid. Bij je simulatie moet je daarmee rekening houden: je simuleert elke dobbelsteen afzonderlijk en telt dan de uitkomsten bij elkaar. Een simulatie van 100 worpen met twee dobbelstenen gaat zo:

- Voer in het basisscherm `RANDINT(100,1,6) + RANDINT(100,1,6)` in en  (dus `2 * RANDINT(100,1,6)` is fout!).
- Vervolgens stop je net als eerder je het resultaat in D1.
- De simulatie van het werpen met twee dobbelstenen staat nu in D1. Deze lijst kun je sorteren en je kunt er een staafdiagram van maken. Met  kun je nu gemakkelijk alle frequenties aflezen.

Voer zelf zo'n simulatie uit. Dit is natuurlijk gemakkelijk uit te breiden tot het werpen met drie dobbelstenen, of vier munten, etc. Zolang het maar niet over al te grote aantallen gaat...



3 Permutaties en combinaties

Het aantal **permutaties** van 6 elementen is het totale aantal mogelijke verwisselingen als alle 6 elementen verschillend van elkaar zijn.

Dat aantal permutaties is: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$.

De HP Prime kan $6!$ op de volgende manier berekenen zonder de hele vermenigvuldiging in te tikken:

- Ga naar het basisscherm via .
- Voer eerst een 6 in en toets  .

Je ziet: $6! = 720$.

Bij het aantal **permutaties** van bijvoorbeeld 4 uit 10 gaat het om de mogelijke keuzes van 4 elementen waarvan de onderlinge volgorde ook belangrijk is uit 10 verschillende elementen, dus om $10 \times 9 \times 8 \times 7 = (10!)/(6!)$.

Je kunt dit met behulp van faculteiten berekenen.

Maar je het kan ook zo:

- Ga naar het basisscherm toets  en ga via  met de pijltjestoetsen naar “PERM” en selecteer dat.
- Maak PERM(10,4) in je basisscherm en .

Je vindt: 5040. Ga na dat dit hetzelfde is als $10 \times 9 \times 8 \times 7$.

Bij het aantal **combinaties** van 4 uit 10 gaat het om de mogelijke keuzes van 4 elementen waarvan de onderlinge volgorde niet belangrijk is uit 10 verschillende elementen, dus om $\frac{10!}{6! \cdot 4!}$. Je schrijft het als $\binom{10}{4}$.

Je kunt dit met behulp van faculteiten berekenen.

Maar je het kan ook zo:

- Ga naar het basisscherm toets  en ga via  met de pijltjestoetsen naar “COMB” en selecteer dat.
- Maak COMB(10,4) in je basisscherm en .

Je vindt: 210. Ga na dat dit hetzelfde is als $\frac{10!}{4! \cdot 6!}$.

Even narekenen

Wanneer je het aantal mogelijkheden moet berekenen als je 10 elementen verdeelt in een groep van 2, een groep van 3 en een groep van 5, dan bereken je:

- $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3}$ of $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$.

Kijk maar eens of je uit allebei 2520 krijgt.



Statistiek en de HP Prime

De HP Prime beschikt over een groot aantal statistische functies. Onder andere kan hij allerlei diagrammen maken en centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen. Loop eerst het practicum: **Basistechnieken HP Prime** door.

Inhoud

1	Statistische gegevens invoeren	60
2	Diagrammen	61
3	Centrummaten en spreidingsmaten	62



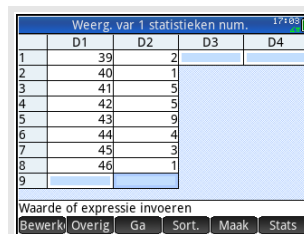
1 Statistische gegevens invoeren

Je ziet hier een tabel met daarin de schoenmaten van een groep van 30 mannen:

schoenmaat	frequentie
39	2
40	1
41	5
42	5
43	9
44	4
45	3
46	1

Deze tabel kun je in je grafische rekenmachine invoeren in de app **VAR 1 STATISTIEKEN**:

- Start de app via .
- Maak de lijsten die je nu ziet zonodig leeg met   (Clear)
- Gebruik nu de twee lijsten D1 en D2 voor de tabel hierboven.
Voer een getal in en .



	D1	D2	D3	D4
1	39	2		
2	40	1		
3	41	5		
4	42	5		
5	43	9		
6	44	4		
7	45	3		
8	46	1		
9				

Waarde of expressie invoeren

Opmerkingen:

- Met  kun je een cel bewerken.
- Met  kun je een rij toevoegen, een kolom verwijderen, een rij, een kolom of een cel (Vak) selecteren, een selectie maken, kolommen verwisselen.
- Met  kun je naar een bepaalde rij in een bepaalde kolom springen.
- Met  kun je een lijst die ongesorteerd is sorteren van klein naar groot (Oplopend) of van groot naar klein (Aflopend).
- Met  kun je een lijst met een formule (expressie) vullen.



2 Diagrammen

Nu je een frequentietabel hebt ingevoerd, kun je allerlei diagrammen bekijken.

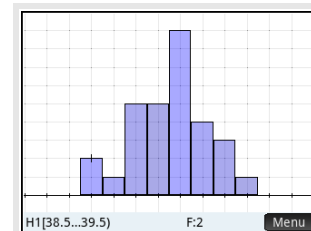
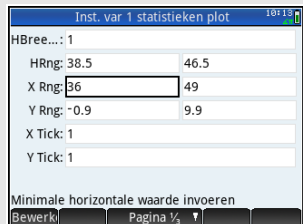
Open hiervoor via  de symbolische weergave van de app **VAR 1 STATISTIEKEN**.

In het scherm hiernaast zie je de instellingen voor een histogram. In D1 staan de schoenmaten, in D2 de frequenties en als type kies je "Histogram". Denk er wel om dat je de variabelen D1 en D2 moet invoeren via  en kies bij  voor 1: var 1 statistieken en 4: Numeriek.

Via  en Automatisch schalen krijg je het diagram in beeld.

Denk er om dat ook bij gehele getallen (zoals hier bij de schoenmaten) de staven een bepaalde breedte hebben; je moet in feite altijd uitgaan van een klassenindeling en de waarnemingsgetallen opvatten als de klassemiddens. Bij de gegevens hierboven is de klasse H1[39...40) dus eigenlijk de klasse $38,5 - < 39,5$. De linkergrens van de eerste staaf is daarom 38,5 en de breedte van elke staaf is 1. Via   kun je dit goed instellen.

Je kunt met de pijltjestoetsen de staven langslipen, je ziet dan onder het staafdiagram welk interval en welke frequentie er bij de aangegeven staaf hoort.

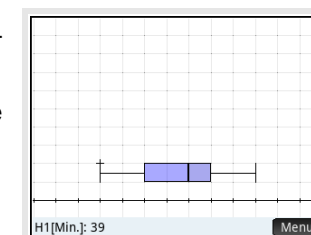


Kies je via  voor "Boxplot", dan zie je het boxplot bij de ingevoerde gegevens.

Met de pijltjestoetsen kun je daarin lopen van minimum, eerste kwartiel, mediaan, derde kwartiel, naar maximum.

Even oefenen

Werk ook eens met andere gegevens, kies met name ook eens gegevens die in klassen zijn ingedeeld. En bekijk de andere soorten diagrammen.



3 Centrummaten en spreidingsmaten

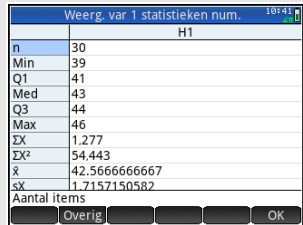
Gebruik weer de gegevens uit de voorgaande tekst (de schoenmaten).

Ga eerst via  naar de lijsten met gegevens.

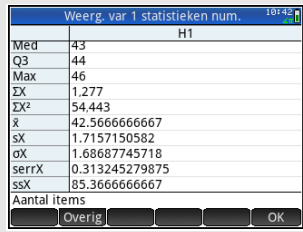
Om de verschillende centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, kies je onderin dit scherm voor **STATS**.

Hier vind je:

- er waren in totaal 30 mannen;
- de kleinste maat is 39;
- het eerste kwartiel is 41;
- de mediaan is 43;
- het derde kwartiel is 44;
- de grootste maat is 46;
- alle schoenmaten samen kwamen uit op 1277 (hier een zinloos getal);
- de som van de kwadraten van de schoenmaten (hier een zinloos getal);
- de gemiddelde schoenmaat is ongeveer 42,6;
- de standaarddeviatie s bij delen door 29 (niet gebruiken).
- de standaarddeviatie $\sigma \approx 1,69$;
- de standaardfout van de steekproef $serrX$ (standard error) gebruik je niet;
- de som van de kwadraatafwijking ssX (sum of squares) gebruik je niet.



Weerg. var 1 statistieken num. 18:41	
H1	
n	30
Min	39
Q1	41
Med	43
Q3	44
Max	46
ΣX	1277
ΣX²	54443
$\bar{x}$	42.566666667
sX	1.7157150582
Aantal items	



Weerg. var 1 statistieken num. 18:42	
H1	
Med	43
Q3	44
Max	46
ΣX	1277
ΣX²	54443
$\bar{x}$	42.566666667
sX	1.7157150582
σX	1.68687743718
serrX	0.313245279875
ssX	85.366666667
Aantal items	

Doe dit ook eens met een tabel met gegevens die in klassen zijn ingedeeld.

Denk er om dat je dan de **klassemiddens** als waarnemingsgetallen gebruikt!



Veranderingen en de HP Prime

De HP Prime kan je behulpzaam zijn bij berekeningen aan veranderingen en differentiëren.

Loop eerst van het practicum **Basistechnieken HP Prime** de delen "Grafieken tekenen" en "Tabel maken" door.

Loop daarna van het practicum **Functionies en de HP Prime** het deel "Functionies combineren" door.

Inhoud

1	Tabel met toenames van een functie maken	64
2	dy/dx bij een waarde van x berekenen	65
3	De afgeleide tekenen via differentiequotiënt	66
4	De afgeleide tekenen via differentiaalquotiënt	67

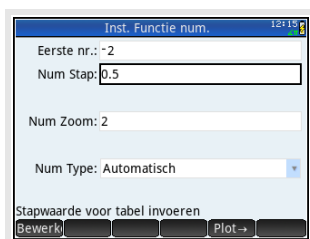
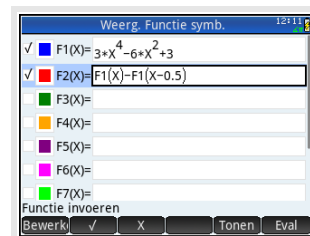


1 Tabel met toenamen van een functie maken

Je gaat een tabel met toenamen maken van de functie $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$ op het interval $[-2, 2]$ en met stapgrootte 0,5.

Het gaat als volgt:

- Open de app **FUNCTIE** en voer $f_1(x) = 3x^4 - 6x^2 + 3$ in.
- Bedenk dat je om de toename te berekenen, steeds een functiewaarde en zijn "vorige" functiewaarde van elkaar moet aftrekken. Voer daarom vervolgens $f_2(x) = f_1(x) - f_1(x - 0.5)$ in. De F en de X vind je als je achter $F2(x)=$ op **BEWERKEN** hebt gedrukt onderaan het beeldscherm als **F** en als **X**.
- Bekijk beide grafieken.
- Als je wilt, pas de vensterinstellingen aan.
- Via **Num** vind je de toenametabel. Zet de stapgrootte van deze tabel op 0.5 en begin bij $x = -2$. Doe dit door via **Shift** **Num** het Eerste nr. op -2 en de Num Stap op 0.5 te zetten.



X	F1	F2
-2	27	-55.6875
-1.5	4.6875	-22.3125
-1	0	-4.6875
-0.5	1.6875	1.6875
0	3	1.3125
0.5	1.6875	-1.3125
1	0	-1.6875
1.5	4.6875	4.6875
2	27	22.3125
2.5	82.6875	55.6875
-2		

Bekijk de tabel, controleer de onderstaande waarden en neem de overige waarden over in een eigen tabel:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
Δy	geen*)				1,3				22,3

Hiermee kun je een toenamediagram tekenen.

*) Voor de berekening van Δy bij $x = 2$, heb je $f(-2,5)$ nodig. Omdat het interval bij -2 begint, hoeft je deze waarde niet in te berekenen. Je hoeft immers niet buiten het interval te rekenen.



2 dy/dx bij een waarde van x berekenen

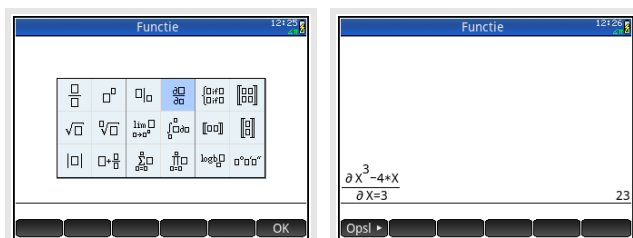
De volgende omschrijvingen betekenen allemaal hetzelfde:

- De helling van de grafiek van $y = f(x)$ in een bepaald punt.
- Het hellingsgetal of de hellingwaarde van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x .
- Het differentiaalquotiënt van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x .
- De afgeleide voor van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x .
- Het hellingsgetal of de hellingwaarde van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x .
- $\frac{dy}{dx}$ of $\frac{df(x)}{dx}$ voor een bepaalde waarde van x .

Hier ga je de functie $f(x) = x^3 - 4x$ gebruiken en de afgeleide berekenen voor $x = 3$.

In het basisscherm:

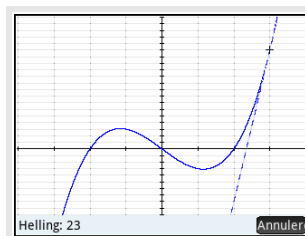
- Toets  om in het basisscherm te komen en toets  om het juiste sjabloon (zie linker figuur) te kunnen kiezen.
- Vul de gegevens in zoals in de figuur ernaast, de X vind je via .



Het differentiaalquotiënt van $f(x)$ is voor $x = 3$ dus gelijk aan 23.

Ook met de app **FUNCTIONIE** kun je de afgeleide in het punt berekenen:

- Voer de functie $f_1(x) = x^3 - 4x$ in en bekijk de grafiek.
- Stel de assen in zo dat $-4 \leq x \leq 4$ en $-10 \leq y \leq 20$.
- Toets  en  en type 3 en .
- Toets  en kies 8: Raaklijn.
(Deze stap kun je overslaan, je ziet dan alleen de raaklijn niet die bij deze helling hoort.)
- Toets opnieuw  en kies 5: Helling.
- Onderin het scherm vind je Helling: 23 en je ziet de bijpassende raaklijn.



Het differentiaalquotiënt van $f(x)$ is voor $x = 3$ dus gelijk aan 23.

Met de pijltjestoetsen kun je ook raaklijnen in andere punten van de grafiek bekijken.

Kies je opnieuw  en 8: Raaklijn, dan verdwijnt de raaklijn.



3 De afgeleide tekenen via differentiequotiënt

Je kunt ook direct je grafische rekenmachine een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt benaderen door een differentiequotiënt op het interval $[x; x + 0,001]$ en daarvan een grafiek maken.

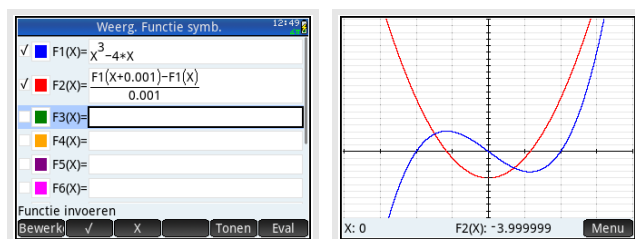
Gebruik de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

- Voer de functie f in als $f_1(x) = x^3 - 4x$ (als hij er niet meer staat).
- Voer een nieuwe functie $f_2(x) = \frac{f_1(x+0.001)-f_1(x)}{0.001}$ in.

F en X vind je als je achter F2(X)= op **BEWERKEN** hebt getoetst onderin het scherm.

- Bekijk beide grafieken.

De rode grafiek is die van de (benadering van de) afgeleide $f'(x)$.



4 De afgeleide tekenen via differentiaalquotiënt

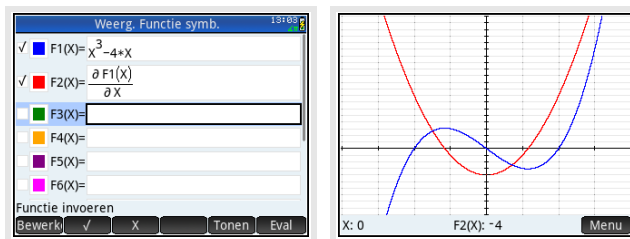
Je kunt ook direct je grafische rekenmachine een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt berekenen en daarvan een grafiek maken.

Gebruik de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

- Voer de functie f in als $f_1(x) = x^3 - 4x$ (als hij er niet meer staat).
- Voer de afgeleide functie via $\frac{\partial F1(X)}{\partial X}$ in en voer daar $F1(X)$ en X in.
- Bekijk beide grafieken.

De rode grafiek is die van de afgeleide $f'(x)$.

Als je goed kijkt, zie je dat de helling voor $x = 0$ nu wel exact -4 is.



Op de Math4All website en in Math4All readers wordt regelmatig verwezen naar de practica voor de grafische rekenmachine. Dat zijn 'losse' practica die kunnen worden doorgenomen als een specifiek onderwerp in de lessen aan de orde komt.
In dit katern zijn alle Math4All practica bij de HP Prime gebundeld.



