**Examen VWO**

**2025**

tijdvak 2

woensdag 18 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde A**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| OVERZICHT FORMULES | | | | |
|  |  | | | |
|  | **Differentiëren** | | | |
|  | **naam van de regel** | **functie** | | **afgeleide** |
|  | somregel |  | |  |
|  | verschilregel |  | |  |
|  | productregel |  | |  |
|  | quotiëntregel |  | |  |
|  | kettingregel |  | | of |
|  |  | | | |
|  |  | | | |
|  | **Logaritmen** | | | |
|  | **regel voorwaarde** | | | |
|  |  | |  | |
|  |  | |  | |
|  |  | |  | |
|  |  | |  | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***CO2 in de atmosfeer*** | |
|  |  | In deze opgave kijken we naar het verloop van de concentratie CO2 in de atmosfeer. Onderzoekers hebben geconstateerd dat de natuurlijke concentratie CO2 eeuwenlang stabiel is gebleven rond de 280 ppm (parts per million). De toename van de concentratie CO2 sinds de industriële revolutie wordt met name veroorzaakt door massaproductie van goederen en voedsel.  In de figuur zie je het verloop van de concentratie CO2 in de periode 1800–2009.  **figuur**  Afbeelding met tekst, lijn, Parallel, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe toename verloopt exponentieel. Het verloop van de concentratie CO2 kan worden benaderd met het model:  Hierbij is de concentratie CO2 in ppm en de tijd in jaren met op 1 januari 1800. De waarde 280 staat in dit model voor de constante natuurlijke concentratie CO2.  Op 1 januari 2002 was de concentratie CO2 370 ppm. Met dit gegeven en met behulp van bovenstaande gegevens is te berekenen dat de waarde van , afgerond op vier decimalen, gelijk is aan 1,0225. |
| 3p | **1** | Bereken de waarde van in vijf decimalen. |
|  |  |  |
| 3p | **2** | Bereken in welk jaar de concentratie CO2 verdubbeld zal zijn ten opzichte van de natuurlijke concentratie. |
|  |  |  |
|  |  | Zoals je in de figuur kunt zien is de grafiek toenemend stijgend. De formule  benadert deze stijging. Vanaf 1800 duurde het 150 jaar totdat de concentratie CO2 met (ongeveer) 10% was toegenomen. Vanaf 1950 duurde het veel korter totdat de volgende 10% stijging van de concentratie CO2 werd gemeten. |
| 4p | **3** | Bereken hoeveel gehele jaren hiervoor nodig waren. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Domino-effect*** | |
|  |  | Afbeelding met wit, silhouet, zwart-wit, ontwerp  Automatisch gegenereerde beschrijvingEen rij dominostenen wordt achter elkaar gezet.  Vervolgens wordt de eerste dominosteen omgeduwd,  waarna de rest van de rij (als het goed is) ook omvalt.  Dit wordt het **domino-effect** genoemd, waarbij kleine  dominostenen ook grotere kunnen omduwen. Deze  opgave gaat over dit domino-effect, waarbij we  dominostenen bekijken die telkens 1,5 keer zo hoog  zijn als de voorgaande steen. Een Amerikaan  beweert dat wanneer de 13e dominosteen 1 meter  hoog is, de 29e dominosteen hoger is dan het  Empire State Building. Het Empire State Building is  een wolkenkrabber in New York, met een hoogte van 381 meter. |
| 2p | **4** | Ga met een berekening na of deze Amerikaan gelijk heeft. |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met diagram, lijn, schets, Rechthoek  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 1 zie je een zijaanzicht van drie **figuur 1**  dominostenen. We nemen in het vervolg  van deze opgave het volgende aan:   * De hoogte van de eerste dominosteen is   48 mm.   * De dikte van de eerste dominosteen is 7,5 mm. * Iedere volgende dominosteen is 1,5 keer zo   hoog en 1,5 keer zo dik als de voorgaande.   * Iedere dominosteen valt tegen het midden * van de volgende dominosteen. * Als de dominostenen op een rij worden gezet,   dan krijgt de kleinste steen nummer 1, de  volgende steen nummer 2, enzovoorts.  Doordat de eerste dominosteen tegen het midden van de **figuur 2**  Afbeelding met lijn, diagram, schets, ontwerp  Automatisch gegenereerde beschrijvingtweede steen moet vallen, ligt de afstand vast. Zie  figuur 2.  Voor de dominostenen 1 en 2 is deze afstand te berekenen  met de formule .  Hierbij is de afstand tussen dominostenen 1 en 2, de  hoogte van dominosteen 1 en de hoogte van  dominosteen 2, alle in mm. |
| 2p | **5** | Bereken de afstand tussen dominosteen 1 en 2 in gehele mm. |
|  |  |  |
|  |  | Voor de hoogte van dominosteen 2 geldt .  Door dit in te vullen in de formule is de afstand ook te schrijven als .  De waarde van is afgerond op twee decimalen . |
| 3p | **6** | Herleid de formule tot en geef de waarde van in drie decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In figuur 3 zie je de algemene situatie. f**iguur 3**  Afbeelding met diagram, lijn, schets, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingEr geldt (voor :   * , met de hoogte in mm * , met de dikte in mm * , met de afstand in mm tussen   dominosteen en de dominosteen  Uit bovenstaande gegevens volgt voor : |
| 3p | **7** | Toon dit aan. |
|  |  |  |
|  |  | In het televisieprogramma MythBusters werd een  Afbeelding met voertuig, hemel, Landvoertuig, wiel  Automatisch gegenereerde beschrijvingexperiment bedacht waarbij na het omduwen van  de eerste dominosteen uiteindelijk dominosteen  nummer 12 op een auto valt. Om het experiment  uit te voeren werd een 15 meter lange parkeerplaats  gebruikt. |
| 4p | **8** | Onderzoek of deze parkeerplaats lang genoeg is om  het experiment uit te voeren. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Scheepsgolven*** | |
|  |  | Golven op het water kunnen op verschillende manieren ontstaan, bijvoorbeeld door wind of door schepen. In deze opgave bekijken we golven die ontstaan door een varend schip. De **golflengte** is de afstand tussen twee opeenvolgende golftoppen. Zie figuur 1.  Afbeelding met diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 1**  Golven verplaatsen zich over het water. De snelheid waarmee een golf zich over het water verplaatst, is afhankelijk van de golflengte. Het verband tussen de golflengte en de snelheid waarmee een golf zich verplaatst, wordt gegeven door de volgende formule:  (formule 1)  Hierbij is de golflengte in meters en de snelheid waarmee de golf zich verplaatst in meter per seconde.  Als toeneemt, dan neemt ook toe. De grafiek van is dus stijgend. |
| 4p | **9** | Stel een formule op voor de afgeleide van en beredeneer met behulp hiervan of de stijging afnemend of toenemend is. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Als de golflengte twee keer zo groot wordt, dan neemt de snelheid van de golf met een vaste factor toe. |
| 2p | **10** | Bereken, zonder een getallenvoorbeeld te gebruiken, deze factor. Geef je antwoord in twee decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Een schip en de golf die door dat varende schip ontstaat, verplaatsen zich met gelijke snelheid (samen) door het water. Als een schip langzaam vaart, dan ontstaat er langs het schip een golf zoals in figuur 2. Er zijn dan meerdere toppen van de golf zichtbaar langs de zijkant van het schip. In figuur 2 is tevens een assenstelsel toegevoegd.  **figuur 2**  Afbeelding met Lettertype, diagram, lijn, schermopname  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe voorkant van het schip valt  samen met een top van de golf.  Omdat het schip en de golf  samen dezelfde kant op  bewegen, blijft die top tijdens  het varen samenvallen met de  voorkant van het schip.  Een schip van 30 meter lang  vaart met een snelheid van 3  meter per seconde. De golf die  door het varen ontstaat heeft een amplitude van 15 centimeter. De golf is te beschrijven met de formule:  (formule 2)  Hierbij is de hoogte ten opzichte van de evenwichtsstand in centimeters en de afstand vanaf de voorkant van het schip in meters, met .  De waarden van en in formule 2 zijn te berekenen door gebruik te maken van formule 1. |
| 5p | **11** | Bereken en in formule 2. Geef en in twee decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Om de hoogte van de golven van een schip te verkleinen, is de **bulbsteven** uitgevonden. De bulbsteven is een uitstekende bult aan de voorkant van een schip. Zie de foto.  Afbeelding met transport, schip, watervoertuig, buitenshuis  Automatisch gegenereerde beschrijving  Normaal gesproken bevindt de  bulbsteven zich (grotendeels) onder  water. Omdat het schip op de foto geen  lading vervoert, is de bulbsteven boven  water zichtbaar.  Zowel het schip als de bulbsteven  veroorzaken een golf. De golf van de  bulbsteven dempt de golf van het schip  gedeeltelijk. Een schip met een lengte  van 100 meter veroorzaakt bij een  bepaalde vaarsnelheid een golf met de formule: |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | en de bulbsteven van het schip veroorzaakt een golf met de formule:  Hierbij zijn en de hoogtes ten opzichte van de evenwichtsstand in centimeters en is de afstand vanaf de voorkant van het schip in meters met  .  **figuur 3**  Afbeelding met diagram, lijn, Perceel, patroon  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe formule die hoort bij de  gecombineerde golf van het schip en  de bulbsteven wordt verkregen door  en op te tellen. Zie figuur 3.  De amplitude van de gecombineerde  golf is kleiner dan de amplitude van de  golf van het schip zonder de bulbsteven. |
| 4p | **12** | Bereken hoeveel de amplitude van de  gecombineerde golf kleiner is dan de  amplitude van de golf van het schip  zonder de bulbsteven. Geef je antwoord  in gehele centimeters. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Batterijspanning*** | |
|  |  | Afbeelding met cilinder, ontwerp  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn het dagelijks leven worden er veel batterijen gebruikt om apparaten te laten werken. Een batterij werkt door het verschil in spanning tussen de pluspool en de minpool. Dit spanningsverschil noemen we de **totale spanning** van de batterij.  Deze totale spanning wordt lager als je de batterij enige tijd hebt  gebruikt. Hierdoor gaat bijvoorbeeld een fietslamp met een batterij  op een gegeven moment minder fel branden.  Een van de eerste batterijen werd in 1836 uitgevonden door de  Britse scheikundige Daniell. Bij deze batterij werd bij de pluspool  koper en bij de minpool zink gebruikt. Deze opgave gaat over zo’n  batterij.  De spanningen van de polen van deze batterij zijn te berekenen met de volgende formules:  Hierin zijn en de spanningen van de polen in volt en en de concentraties van koper en zink in molair1). |

|  |  |
| --- | --- |
| noot 1 | molair is een maat voor het aantal deeltjes per liter |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De totale spanning van de batterij, , is het verschil tussen de spanningen van beide polen:  Bij de batterij geldt in het begin dat en allebei 1 molair zijn. De totale spanning is dan 1,1 volt. Door het gebruik van de batterij neemt af en neemt toe. Als deze batterij enige tijd stroom heeft geleverd geldt en . |
| 3p | **13** | Bereken met hoeveel procent de totale spanning van de batterij in dit geval is gedaald. Geef je antwoord in twee decimalen. |
|  |  |  |
| 3p | **14** | Bereken, zonder gebruik te maken van een getallenvoorbeeld, met hoeveel volt de spanning van de pluspool afneemt als halveert. Geef je antwoord in vier decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Uit en de gegeven formules voor en kan de volgende formule worden herleid: |
| 3p | **15** | Voer deze herleiding uit. |
|  |  |  |
|  |  | Het is mogelijk om voor een formule op te stellen waarin alleen voorkomt:  , met  Doordat , de concentratie van het zink, toeneemt tijdens het gebruik van de batterij, daalt de totale spanning van de batterij. Dit kan worden aangetoond door te kijken naar de afgeleide functie van . Er geldt (na afronding): |
| 4p | **16** | Toon aan dat deze formule voor juist is. |
|  |  |  |
| 4p | **17** | Onderzoek met een schets van of de daling van de totale spanning tijdens het gebruik van de batterij toenemend of afnemend is. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Raad het getal*** | |
|  |  | **Raad het getal** is een spel voor twee personen waarbij iemand één geheel getal bedenkt, dat de ander vervolgens gaat raden. Diegene die het getal bedenkt, noemen we de **bedenker** en diegene die gaat raden de **speler**.  Het spel werkt als volgt:  De bedenker kiest een getal van maximaal vier cijfers, waarbij het eerste cijfer geen 0 mag zijn. Het getal kan dus bijvoorbeeld 7 zijn, of 60, of 544, of 9328.  Vaak kiest de bedenker een viercijferig getal dat **makkelijk te onthouden** is. Dat is een getal dat   * bestaat uit vier dezelfde cijfers, of * bestaat uit vier opeenvolgende cijfers, die in oplopende of aflopende volgorde staan (bijvoorbeeld 2345 of 4321). |
| 4p | **18** | Bereken hoeveel verschillende makkelijk te onthouden getallen er zijn. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Het getal dat de bedenker bedenkt, noemen we het **bedachte getal**. De getallen die de speler noemt, noemen we **genoemde getallen**. Omdat het lang kan duren voordat de speler het bedachte getal noemt, geeft de bedenker feedback. Deze feedback bestaat uit een van de volgende drie mogelijkheden:   * ‘Goed geraden’ (bedachte getal genoemde getal). * ‘Hoger’ (bedachte getal genoemde getal). * ‘Lager’ (bedachte getal genoemde getal).   Het noemen van een getal en het geven van feedback herhaalt zich totdat de bedenker de feedback ‘Goed geraden’ geeft en het spel stopt. Het aantal keer dat de speler een getal noemt en vervolgens feedback krijgt, noemen we het aantal **beurten**.  We bekijken eerst een vereenvoudigde versie van het spel, waarbij de speler aan het begin van het spel weet dat het bedachte getal minimaal 1 is en maximaal 9. De speler kan in elke beurt het aantal nog mogelijke getallen in ieder geval halveren door de volgende strategie toe te passen:   * Is het aantal nog mogelijke getallen oneven, noem dan het middelste nog mogelijke getal. * Is het aantal mogelijke getallen even, noem dan een van de twee middelste nog mogelijke getallen.   De bedenker kiest het getal 8. De speler volgt bovenstaande strategie. Het aantal beurten waarin de speler het bedachte getal raadt, ligt dan nog niet vast. |
| 4p | **19** | Onderzoek welke aantallen beurten mogelijk zijn waarin de speler het bedachte getal 8 kan raden. |
|  |  |  |
|  |  | In het vervolg van deze opgave bekijken we een versie van het spel, waarbij we de eis dat het bedachte getal uit maximaal vier cijfers moet bestaan, loslaten. We kijken naar getallen tussen 0 en , waarbij een geheel getal groter dan 1 is. Hierdoor kan het bedachte getal elk getal vanaf 1 tot en met zijn.  Het aantal beurten dat nodig is om het bedachte getal te raden, hangt mede af van de gevolgde strategie. Als de eerder beschreven strategie toegepast wordt, dan geldt:  Hierbij is het maximaal aantal beurten dat nodig is om het bedachte getal te noemen.  Twee personen spelen het spel met . Volgens de formule is de kleinst mogelijke waarde van dan gelijk aan 6. |
| 2p | **20** | Toon dit met behulp van de formule aan. |
|  |  |  |
|  |  | De waarde 6 die de formule geeft voor gaat uit van het ‘slechtste’ geval: dat steeds precies de helft van het aantal mogelijke getallen overblijft. Het blijkt echter dat voor de speler het bedachte getal altijd in maximaal 5 beurten kan noemen. |
| 4p | **21** | Bepaal het maximaal aantal overblijvende getallen per beurt en laat daarmee zien dat de speler in maximaal 5 beurten het bedachte getal kan noemen voor . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Recordpoging triatlon*** | |
|  |  | Een triatlon is een sport waarbij zwemmen, fietsen en hardlopen gecombineerd worden. In het najaar van 2022 kreeg de triatleet Adrian Kostera bekendheid met zijn voornemen om met het uitvoeren van een extreem lange triatlon in het boek Guiness World Records (GWR) te komen.  Adrian Kostera wilde voor zijn recordpoging een triatlon afleggen met een totale afstand van km (zwemmen, fietsen en hardlopen samen). Dit is ongeveer gelijk aan de omtrek van de aarde. Het GWR heeft bepaald hoe Kostera de km moest verdelen over de drie verschillende onderdelen: hij moest 3% van de totale afstand zwemmen, 77,5% fietsen en 19,5% hardlopen.  Kostera legde vanaf 1 juni 2023 tot en met 31 mei 2024 (366 dagen) elke dag een stukje van deze triatlon af, waarbij het zijn streven was om **elke dag evenveel tijd** aan deze extreem lange triatlon te besteden. Van het GWR moest hij eerst de gehele zwemafstand afleggen, daarna de gehele fietsafstand en als laatste de gehele loopafstand.  Kostera ging dus:   * dagen km per dag zwemmen * dagen km per dag fietsen * dagen km per dag hardlopen   Om te weten hoe lang hij over elk onderdeel zou doen, heeft hij vooraf een schatting gemaakt van zijn gemiddelde tempo per onderdeel. Zie de tabel.  **tabel**   |  |  | | --- | --- | | **onderdeel** | **geschat gemiddelde tempo** | | zwemmen | 2 min en 40 seconden per 100 meter | | fietsen | 25 km/uur | | hardlopen | 8 min en 45 seconden per km |   Op basis hiervan kon vooraf berekend worden hoeveel dagen Kostera tijdens deze recordpoging bezig zou zijn met zwemmen, hoeveel dagen met fietsen en hoeveel dagen met hardlopen. |
| 7p | **22** | Onderzoek hoeveel gehele dagen Kostera per onderdeel (zwemmen, fietsen en hardlopen) naar verwachting nodig had. |

**Wiskunde A** **2025-II**

**Uitwerkingen. (N=1,7)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***CO2 in de atmosfeer*** |  |
| **1** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
| **2** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * in 2053 verdubbeld | 1 |
| **3** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * invoer: en | 1 |
|  | * intersect: | 1 |
|  | * dat duurde 34 hele jaren | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Domino-effect*** |  |
| **4** | **maximumscore 2** |  |
|  |  | 1 |
|  | * de Amerikaan heeft gelijk | 1 |
| **5** | **maximumscore 2** |  |
|  | * mm | 2 |
| **6** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **8** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * en | 2 |
|  | * totaal nodig: mm   de parkeerplaats is lang genoeg | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Scheepsgolven*** |  |
| **9** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  | * als toeneemt, neemt ook toe en neemt dan af. Daarmee wordt ook kleiner. | 1 |
|  | * De stijging van is afnemend. | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **10** | **maximumscore 2** |  |
|  |  | 1 |
|  | * de snelheid neemt dan met 1,41 toe | 1 |
| **11** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft meter (dit is de periode) | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
| **12** | **maximumscore 4** |  |
|  | * invoer: | 1 |
|  | * maximum: (is ook amplitude) | 1 |
|  | * dat is cm kleiner | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Batterijspanning*** |  |
| **13** | **maximumscore 3** |  |
|  | * en | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * een afname met | 1 |
| **14** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * de spanning neemt dan af met 0,0089 volt | 1 |
| **15** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **16** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 2 |
| **17** | **maximumscore 4** |  |
|  | * voor en schets van voor | 2 |
|  | * de grafiek van daalt, dus de daling van is toenemend | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Raad het getal*** |  |
| **18** | **maximumscore 4** |  |
|  | * 4 dezelfde cijfers: 9 getallen | 1 |
|  | * oplopend: 1234 t/m 6789: 6 getallen | 1 |
|  | * aflopend: 9876 t/m 3210: 7 getallen | 1 |
|  | * in totaal dus 22 getallen | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **19** | **maximumscore 4** |  |
|  | * speler: 5 (feedback: hoger) | 1 |
|  | * speler: 7 (feedback: hoger) of speler: 8 (in 2 beurten geraden) | 1 |
|  | * speler: 8 (in 3 beurten geraden) of speler: 9 (feedback: lager) | 1 |
|  | * speler: 8 (in 4 beurten geraden) | 1 |
| **20** | **maximumscore 2** |  |
|  | * en | 1 |
|  | * dus de kleinst mogelijke waarde voor is 6 | 1 |
| **21** | **maximumscore 4** |  |
|  | * speler kiest middelste getal: 12 over | 1 |
|  | * speler kiest ‘ongunstig’: 6 over en bij de 3e beurt weer ‘ongunstig’: 3 over | 1 |
|  | * bij de 4e beurt kiest speler middelste getal: 1 over | 1 |
|  | * na de feedback kiest de speler nu het bedachte getal | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Recordpoging triatlon*** |  |
| **22** | **maximumscore 7** |  |
|  | * zwemmen: km;   fietsen: km; hardlopen: 7833,15 km | 1 |
|  | * dagen; dagen en   dagen | 3 |
|  | * Totale tijd: 121,80… dagen | 1 |
|  | * Zwemmen: dagen;   Fietsen: dagen;  Hardlopen: dagen | 2 |