**Examen VWO**

**2023**

tijdvak 2

vrijdag 23 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Formules*** | |
|  |  |
|  | **Goniometrie** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Gebroken functie*** |
|  |  | De functies *f* wordt gegeven door .  De lijn *l* is de raaklijn aan de grafiek van *f* in *O*.  Zie de figuur. |
| 3p | **1** | Bereken exact de richtingscoëfficiënt van *l*. |
|  |  |  |
|  |  | De grafiek van *f* heeft een scheve asymptoot en  een verticale asymptoot. Deze twee asymptoten  snijden elkaar in het punt *S*.  De grafiek van *f* ondergaat een translatie van 2  naar rechts en *b* omhoog. De grafiek die zo  ontstaat, hoort bij de functie *g*. De waarde van *b*  is zó gekozen dat *S* op de grafiek van *g* ligt. |
| 6p | **2** | Bereken exact de waarde van *b*. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Sinus en cosinus getransformeerd*** |
|  |  | De functie *f* wordt gegeven door  Het lijnstuk *AB* verbindt de punten  en .  De grafiek van *f* snijdt dit lijnstuk in meerdere punten. |
| 4p | **3** | Bereken exact de *x*-coördinaten van deze snijpunten. |
|  |  |  |
|  |  | De functie *g* wordt gegeven door .  Voor elke waarde van *a* snijdt de verticale lijn met vergelijking  de grafieken van *f* en *g* elk in één punt. Het midden van deze twee punten ligt voor sommige waarden van *a* op de *x*-as. Op het domein  is dat voor twee waarden van *a* het geval.  Zie **figuur 1**. |
| 3p | **4** | Bereken voor welke twee waarden van *a* dit het geval is. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De functie *h* wordt gegeven door  .  In figuur 2 zijn de grafieken van *f* en *h*  weergegeven.  Je kunt de grafiek van *h* laten ontstaan  uit de grafiek van *f* door middel van  meerdere translaties en één  vermenigvuldiging ten opzichte van de  *x*-as. Neem aan dat dit een  vermenigvuldiging is met factor *p*.  Daarbij geldt dat . |
| 4p | **5** | Bereken deze waarde van *p*.  Geef je eindantwoord in twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Projectie op een lijn*** |
|  |  | Gegeven zijn de punten *A*(-2, -2), *B*(2, 2) en .  Lijn *l* is de lijn met de vectorvoorstelling:    Het punt *C* is de loodrechte projectie van *A* op lijn *l* en  het punt *D* is de loodrechte projectie van *B* op lijn *l*.  Zie de figuur.  Lijnstuk *AB* is keer zo lang als lijnstuk *CD*. Hierin is  een geheel getal. |
| 7p | **6** | Bereken exact de waarde van . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Twee e-machten*** |
|  |  | De functies *f* en *g* worden gegeven door  en . In de figuur zijn de grafieken van  *f* en *g* weergegeven.  De *x*-coördinaten van de enige twee snijpunten van de  grafieken van *f* en *g* zijn  en . |
| 4p | **7** | Bewijs dat dit juist is door de vergelijking  exact op te lossen. |
|  |  |  |
|  |  | De grafieken van deze functies sluiten een vlakdeel in.  In de figuur is dit vlakdeel grijs gemaakt. |
| 4p | **8** | Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De functie *h* wordt gegeven door:    De grafiek van *h* heeft één perforatie. |
| 3p | **9** | Bereken exact de coördinaten van deze perforatie. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Basketbal*** |
|  |  | In deze opgave kijken we naar de baan van een  basketbal, wanneer een speler deze mikt op de basket,  het cirkelvormige doel. We gebruiken hiervoor een  wiskundig model, waarbij we de bal als een punt  beschouwen. We nemen aan dat de bal vanaf 2,55  meter hoogte wordt losgelaten.  Voor de baan van de bal geldt:    Hierbij geldt:   * *t* is de tijd in seconden vanaf het moment van loslaten; * *x* is de horizontale afstand van de bal tot de speler in meters; * *y* is de hoogte van de bal in meters; * *v* is de snelheid in meters per seconde van de bal op het moment van loslaten; * is de grootte van de hoek in graden tussen de werprichting en een horizontale lijn op het moment van loslaten.   De vorm van de baan is afhankelijk van de parameters *v* en .  **figuur 1**    Zie figuur 1, waarin een  deel van de baan is getekend.  Een basketballer staat op een  horizontale afstand van 6 meter  van het midden van de basket.  De basket hangt op een hoogte  van 3,05 meter. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De basketballer gooit de bal met een bepaalde snelheid onder een hoek  van 60°. In deze situatie geldt:    Als de bal op een horizontale afstand van 6 meter vanaf de speler een hoogte van 3,05 meter heeft, scoort hij. |
| 5p | **10** | Bereken in deze situatie algebraïsch de snelheid *v* van de bal op het moment van loslaten. Geef je eindantwoord in meters per seconde in één decimaal. |
|  |  |  |
|  |  | Op een ander moment staat de **figuur 2**  basketballer opnieuw op een  horizontale afstand van 6 meter  van het midden van de basket.  Hij gooit de bal onder een hoek  van 50°, nu met een snelheid van  8 meters per seconde.  In deze situatie geldt:    De bal gaat dan onder een bepaalde  hoek  door de basket. Deze hoek  is in figuur 2 aangegeven. |
| 5p | **11** | Bereken algebraïsch de grootte van hoek  in graden. Geef je eindantwoord als geheel getal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Absolute waarde en wortelfunctie*** |
|  |  | De functie *f* wordt gegeven door  met .  De grafiek van *f* heeft links van de *y*-as een top *T*. Zie figuur 1.  **figuur 1** **figuur 2** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5p | **12** | Bereken exact de x-coördinaat van punt *T*. |
|  |  |  |
|  |  | Lijn *k* is de lijn door het randpunt *P*(-3, -3) van de grafiek van *f* en de oorsprong *O*.  Lijn *k* snijdt de grafiek van *f* rechts van de *y*-as in het punt *S*. Zie figuur 2. |
| 5p | **13** | Bereken exact de *x*-coördinaat van punt *S*. |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met tekst, schermopname, software, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe horizontale lijn *l* heeft vergelijking . **figuur 3**  Deze lijn heeft twee punten  gemeenschappelijk met de grafiek van *f*,  namelijk *P*(-3, -3) en (0, -3).  Het gebied *V* wordt ingesloten door de grafiek  van *f* en lijn *l*. In figuur 3 is dit gebied grijs  gemaakt.  Gebied V wordt gewenteld om lijn *l*. |
| 5p | **14** | Bereken exact de inhoud van het  omwentelingslichaam dat zo ontstaat. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Boogbrug*** |
|  |  | Afbeelding met tekst, schermopname, software, Multimediasoftware  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn Amsterdam komen boogbruggen **foto**  voor. Zie de foto.  In een andere stad moet een  soortgelijke brug worden gemaakt. Het  aanzicht van het wegdek, gezien vanaf  het water, wordt door het volgende  model beschreven:    met  Hierin is *x* in meters en *f*(*x*) de hoogte  van het wegdek in meters ten opzichte  van het water. In figuur 1 is de grafiek  van *f* weergegeven.  Afbeelding met tekst, schermopname, software, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 1** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De ontwerper heeft als eis gesteld dat het hellingspercentage van het wegdek maximaal 12% mag zijn. Dit wil zeggen dat de absolute waarde van de helling van *f* overal kleiner dan of gelijk aan 0,12 moet zijn. Dit kun je controleren door te bepalen hoe groot het maximum van de absolute waarde van de helling is. |
| 5p | **15** | Onderzoek op algebraïsche wijze of het model aan deze eis voldoet. |
|  |  |  |
|  |  | Onder het wegdek wil de ontwerper drie doorgangen maken. In het midden komt een brede doorgang. Daarnaast komt aan beide kanten een doorgang in de vorm van een halve cirkel. We bekijken in de rest van deze opgave alleen de rechter doorgang.  Het middelpunt *M* van de doorgang ligt 5 meter rechts van de oorsprong. Het punt  is een punt op het wegdek. Om de straal van de doorgang te berekenen houdt de ontwerper rekening met de eis dat het punt op het wegdek met de kleinste afstand tot de doorgang zich op 0,30 meter van de doorgang moet bevinden.  In figuur 2 is de doorgang weergegeven die aan deze eis voldoet. In deze situatie geldt:   * de lengte van lijnstuk *PM* is minimaal én * de lengte van lijnstuk *PR* is 0,30 meter, waarbij *R* het snijpunt is van *PM* en de halve cirkel.   **figuur 2** |
| 6p | **16** | Bereken de straal MR van de cirkelvormige doorgang in meters. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Rechthoek met drie cirkels*** |
|  |  | In de figuur is een rechthoek *ABCD* getekend  met daarin drie cirkels. Ook is de diagonaal *BD* **figuur**  getekend. Hierdoor ontstaan de driehoeken  *ABD* en *BCD*.  Gegeven is verder:   * de drie cirkels hebben dezelfde straal *r*; * de onderste cirkel heeft middelpunt *M* en   raakt aan elke zijde van driehoek *ABD*. Deze  cirkel raakt zijde *BD* in het punt *F*. Er geldt  dus dat *MF* loodrecht op zijde *BD* staat;   * de bovenste cirkel heeft middelpunt *N* en   raakt aan elke zijde van driehoek *BCD*. Deze  cirkel raakt zijde *BD* in het punt *G*. Er geldt  dus dat *NG* loodrecht op zijde *BD* staat;   * het middelpunt *S* van de middelste cirkel is   het snijpunt van *FG* en *MN*;   * de middelste cirkel raakt aan de bovenste en   aan de onderste cirkel.  In de figuur is vierhoek *MFNG* aangegeven.  Deze vierhoek is te verdelen in twee rechthoekige  driehoeken *MFG* en *FNG*. |
| 5p | **17** | Onderzoek of de oppervlakte van vierhoek *MFNG*  groter dan, kleiner dan of gelijk aan de oppervlakte  van een van de cirkels is. |

**Wiskunde B** **2023-II**

**Uitwerkingen. (N=1,7)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Gebroken functie*** |  |
| **1** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
| **2** | **maximumscore 6** |  |
|  |  | 1 |
|  | * , dus scheve asymptoot: | 1 |
|  | * verticale asymptoot:  en dus *S*(3, 4) | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Sinus en cosinus getransformeerd*** |  |
| **3** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * Tussen *A* en *B*: | 1 |
| **4** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden | 1 |
|  | * en | 1 |
| **5** | **maximumscore 4** |  |
|  | * heeft toppen (2.42, 13.85) en (5.56, -1.95) | 2 |
|  | * de evenwichtsstand van *h* is  en de amplitude 7,95 | 1 |
|  | * om bij *f* ook een amplitude van 7,95 te krijgen moet er vermenigvuldigd worden met | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Projectie op een lijn*** |  |
| **6** | **maximumscore 7** |  |
|  | * *BD*: | 1 |
|  | * een vergelijking van *l* is: | 1 |
|  | * *l* snijden met *BD* geeft | 1 |
|  | * en *D*(4, 8) | 1 |
|  | * en | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee e-machten*** |  |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * of | 1 |
| **8** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * een primitieve is: | 1 |
|  | * antwoord: | 2 |
| **9** | **maximumscore 3** |  |
|  | * geeft  en ook | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * , dus de perforatie is | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Basketbal*** |  |
| **10** | **maximumscore 5** |  |
|  | * en | 1 |
|  | * geeft | 3 |
|  | * m/s | 1 |
| **11** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * en | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * de gevraagde hoek is ongeveer 46° | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Absolute waarde en wortelfunctie*** |  |
| **12** | **maximumscore 5** |  |
|  | * voor | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * geeft  ofwel | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **13** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * kwadrateren: | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **14** | **maximumscore 5** |  |
|  | * wordt gewenteld om de *x*-as | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * een primitieve is | 1 |
|  | * antwoord: | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Boogbrug*** |  |
| **15** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * en | 1 |
|  | * absoluut gezien zijn de hellingen kleiner dan 0,12, dus wordt aan de eis voldaan. | 1 |
| **16** | **maximumscore 6** |  |
|  |  | 3 |
|  | * beschrijven hoe met de GR het minimum berekend kan worden | 1 |
|  | * de minimale lengte is 2,014… | 1 |
|  | * meter | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Rechthoek met drie cirkels*** |  |
| **17** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * dus de oppervlakte van de vierhoek is groter dan die van een cirkel | 1 |