**Examen VWO**

**2024**

tijdvak 1

donderdag 23 mei

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Formules*** | |
|  |  |
|  | **Goniometrie** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Stijgend en horizontaal*** | |
|  |  | De functie wordt gegeven door **figuur 1** **figuur 2**  .  In figuur 1 is de grafiek van  weergegeven.  Op de grafiek ligt het punt . |
| 3p | **1** | Bewijs dat de grafiek van in stijgt. |
|  |  |  |
|  |  | Het lijnstuk is horizontaal en heeft  lengte .  De eindpunten en van dit lijnstuk  liggen op de grafiek van .  Zie figuur 2. |
| 4p | **2** | Bereken de -coördinaat van .  Geef je eindantwoord in drie decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Wachttijden*** |
|  |  | Een **wachttijd** is de tijd die je op een dienst moet wachten. Denk daarbij bijvoorbeeld aan de tijd die nodig is om een medewerker van een klantenservice aan de telefoon te krijgen of de tijd die nodig is voordat je wordt geholpen bij de bakker.  In 1909 ontwikkelde de Deense wiskundige Agner Erlang een wiskundig model om te berekenen in hoeveel procent van de gevallen bepaalde wachttijden voorkomen. Dit percentage komt overeen met de oppervlakte onder een grafiek.  In deze opgave gaan we uit van een dienst waarbij het volgende model van Erlang hoort:  met  Hierbij is de tijd in minuten.  Stel dat je wilt weten in hoeveel procent  van de gevallen de wachttijd tussen 3 en  4 minuten ligt. Je bepaalt dan de oppervlakte  van het gebied dat wordt ingesloten door de  grafiek van , de -as en de lijnen met  vergelijking en . Deze oppervlakte  blijkt (afgerond) 8,8 te zijn. Dit wil zeggen dat  in 8,8% van alle gevallen de wachttijd tussen  3 en 4 minuten ligt. Zie de figuur. |
| 3p | **3** | Bereken algebraïsch in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 0 en 3 minuten ligt. Geef je eindantwoord in één decimaal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Een wachttijd van meer dan twintig minuten komt in dit voorbeeld zelden voor. Daarom wordt de **gemiddelde wachttijd** berekend met:  Om de gemiddelde wachttijd te kunnen berekenen, maakt iemand gebruik van het gegeven dat een primitieve is van (met . |
| 3p | **4** | Bewijs dat inderdaad een juiste primitieve is van voor elke waarde van (met ). |
|  |  |  |
| 4p | **5** | Bereken algebraïsch de gemiddelde wachttijd in minuten voor de situatie met  . Geef je eindantwoord als geheel getal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Verschuiven*** | |
|  |  | De functie wordt gegeven door worden gegeven door: .  De grafiek van wordt naar rechts en omhoog verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie .  De grafiek van gaat door het punt . De helling van de raaklijn in aan de grafiek van is . |
| 6p | **6** | Stel op exacte wijze een functievoorschrift van op. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Logaritme, wortel en exponent*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie wordt gegeven door **figuur**  .  De functie is de inverse functie van .  In de figuur zijn de grafieken van  en weergegeven.  Het gestippelde lijnstuk in de figuur  is het kortst mogelijke verticale lijnstuk  dat de grafieken van en met elkaar  verbindt. |
| 5p | **7** | Bereken de lengte van dit lijnstuk.  Geef je eindantwoord in twee decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Op de grafiek van ligt punt met  -coördinaat en punt met -coördinaat .  Voor elke waarde van kan het verschil worden bepaald. |
| 6p | **8** | Onderzoek op exacte wijze of er een waarde van is waarvoor dit verschil gelijk is aan 3. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Klavertje drie*** | |
|  |  | Het punt beweegt over een baan gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:  met in seconden en  De baan waarover punt beweegt, is weergegeven in de figuur.  Het punt beweegt ook over deze baan. Punt loopt seconden voor op punt . De bewegingsvergelijkingen van zijn dus:  met in seconden en  Er zijn twee momenten waarop en recht boven elkaar liggen, dus dan geldt  .  In de figuur is zo’n situatie weergegeven.  Afbeelding met diagram, lijn, cirkel  Automatisch gegenereerde beschrijving |
| 5p | **9** | Bereken exact de afstand tussen  en in deze situaties. |
|  |  |  |
|  |  | Op tijdstip bevindt het punt  zich in . |
| 6p | **10** | Bereken exact de scherpe hoek in  graden tussen de raaklijn aan de  baan in punt en de -as. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Halve cirkel*** | |
|  |  | Gegeven zijn de punten en . Verder is gegeven de cirkel met middellijn . De lijn gaat door de oorsprong en snijdt cirkel in punt . De afstand tussen en is gelijk aan . In figuur 1 zijn lijn en de bovenste helft van cirkel getekend.  **figuur 1** **figuur 2** |
| 4p | **11** | Bereken exact de -coördinaat van . |
|  |  |  |
|  |  | In figuur 2 is de driehoek getekend met , punt boven de -as en . De lijn door en snijdt in het punt S. Driehoek is dan een driehoek met . Vierhoek is grijs weergegeven. |
| 5p | **12** | Bereken exact de oppervlakte van vierhoek . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Top, asymptoot en geen perforatie*** | |
|  |  | Voor elke waarde van wordt de functie gegeven door:  Er bestaat geen waarde van waarvoor de grafiek van een perforatie heeft. |
| 4p | **13** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn het volgende onderdeel zijn de  mogelijke waarden van de positieve  getallen, dus .  De grafiek van heeft één top en deze  ligt op de -as. Verder heeft de grafiek van  een horizontale asymptoot. Punt is het  snijpunt van de horizontale asymptoot en  de -as. Als voorbeeld is in de figuur de  grafiek van weergegeven.  De lengte van lijnstuk is afhankelijk van  . Deze lengte heeft een minimum. |
| 6p | **14** | Bereken exact voor welke positieve waarde van de lengte van lijnstuk minimaal is. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Vereenvoudigde sterrenkunde*** | |
|  |  | De Wet van Titius-Bode1) is een wet uit de astronomie die door Johann Titius werd opgesteld in de achttiende eeuw. Deze wet legt een verband tussen het **rangnummer** van een planeet en de afstand van die planeet tot de zon. Met het rangnummer van een planeet wordt bedoeld: ‘de zoveelste planeet geteld vanaf de zon’. De planeet die het dichtst bij de zon staat krijgt nummer 1, de volgende 2 enzovoorts.  De wet luidt:  Hierin is de afstand van de planeet tot de zon uitgedrukt in AE (Astronomische Eenheid, 1 AE = afstand van de aarde tot de zon) en is het rangnummer van de planeet.,  Saturnus heeft volgens de Wet van Titius-Bode een afstand van 10 AE tot de zon. |
| 2p | **15** | Bereken exact welk rangnummer Saturnus dan zou hebben. |
|  |  |  |
|  |  | We bekijken de planeten **figuur 1 (afstanden in AE)**  Afbeelding met cirkel, diagram, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijvingMars, Venus en de aarde. We  gaan uit van het volgende  eenvoudige model:  De drie planeten draaien ieder  in een cirkelvormige baan met  de zon als middelpunt. De drie  banen liggen in één plat vlak.  De afstand van Venus tot de  zon is 0,7 AE, de afstand van  de aarde tot de zon is 1,0 AE  en de afstand van Mars tot de  zon is 1,6 AE.  Het is mogelijk dat de drie  planeten op één lijn liggen waarbij  Venus precies midden tussen  Mars en de aarde in ligt. Deze  situatie is weergegeven in figuur 1.  De afstand in AE van de aarde tot Venus is *d* en de hoek AVZ in graden is .  Met behulp van figuur 1 kan het volgende verband tussen d en worden gevonden: |
| 3p | **16** | Bewijs dat dit verband juist is |
|  |  |  |
| 3p | **17** | Bereken algebraïsch de afstand in AE van de aarde tot Venus in de gegeven situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |

|  |  |
| --- | --- |
| noot 1 | Er is geen wetenschappelijke onderbouwing voor deze wet en er wordt tegenwoordig aangenomen dat de wet alleen berust op een toevallige overeenkomst met de werkelijke afstanden. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Meestal wordt gezegd dat de planeten in ons zonnestelsel om de zon draaien. Dat klopt echter niet helemaal: de zon en de planeten draaien allemaal om hun gemeenschappelijke zwaartepunt.  Stel dat het zonnestelsel alleen zou bestaan uit Jupiter en de zon. We beschouwen deze twee hemellichamen als twee puntmassa’s. Jupiter is verreweg de zwaarste planeet in ons zonnestelsel met een massa van kg en een afstand tot de zon van km. De zon heeft een massa van kg. Zie figuur 2 (niet op schaal).  Afbeelding met tekst, diagram, lijn, Lettertype  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 2**  De kleine cirkel in figuur 2 is de baan van de zon om het zwaartepunt. |
| 4p | **18** | Bereken de straal van deze baan in km. Geef je eindantwoord in honderdduizendtallen. |

**Wiskunde B** **2024-I**

**Uitwerkingen. (N=2,1)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Stijgend en horizontaal*** |  |
| **1** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 2 |
|  | * dus stijgt in *A* | 1 |
| **2** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  | * invoer: en | 1 |
|  | * intersect: | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Wachttijden*** |  |
| **3** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * een primitieve is | 1 |
|  | * antwoord: | 1 |
| **4** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
| **5** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * een primitieve is: | 1 |
|  | * antwoord: 2 | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Verschuiven*** |  |
| **6** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * geeft ofwel | 1 |
|  | * geeft ofwel | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Logaritme, wortel en exponent*** |  |
| **7** | **maximumscore 5** |  |
|  | * uit volgt | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * dit geeft | 1 |
|  | * invoer: optie minimum | 1 |
|  | * antwoord: | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **8** | **maximumscore 6** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 2 |
|  | * en deze vergelijking heeft geen oplossing, dus er is geen waarde van waarvoor het verschil gelijk is aan 3 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Klavertje drie*** |  |
| **9** | **maximumscore 5** |  |
|  | * en | 2 |
|  | * geeft ofwel | 1 |
|  | * geeft of | 1 |
|  | * : en |  |
|  | : en | 1 |
| **10** | **maximumscore 6** |  |
|  | * en | 3 |
|  |  | 2 |
|  | * geeft | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Halve cirkel*** |  |
| **11** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * voor geldt: | 1 |
|  | * geeft | 2 |
| **12** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * met vergrotingsfactor | 1 |
|  | * dus en | 1 |
|  |  | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Top, asymptoot en geen perforatie*** |  |
| **13** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft | 2 |
|  | * geeft en deze vergelijking heeft geen oplossing | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **14** | **maximumscore 6** |  |
|  | * , dus | 2 |
|  | * , dus | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Vereenvoudigde sterrenkunde*** |  |
| **15** | **maximumscore 2** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * en dus | 1 |
| **16** | **maximumscore 3** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
| **17** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
| **18** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |