**Examen HAVO**

**2021**

tijdvak 1

woensdag 26 mei

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Gebroken functie en wortelfunctie*** | |
|  |  | De functie *f* wordt gegeven door: .  De grafiek van *f* gaat door de oorsprong *O*. Zie figuur 1.  **figuur 1 figuur 2** |
| 4p | **1** | Bereken exact de helling van de grafiek van *f* in *O*. |
|  |  |  |
|  |  | Het functievoorschrift van *f* is ook anders te schrijven, namelijk: .  De functie *g* wordt gegeven door .  De grafieken van *f* en *g* hebben twee punten gemeenschappelijk, *O* en *B*.  Zie figuur 2. |
| 6p | **2** | Bereken exact de *x*-coördinaat van *B*. |
|  |  |  |
|  |  | De grafiek van *f* heeft een **figuur 3**  horizontale en een verticale  asymptoot. Het punt *S* is het  snijpunt van deze twee asymptoten.  De grafiek van *g* snijdt de verticale  asymptoot van *f* in het punt *R*.  Zie figuur 3, waarin de asymptoten  van *f* gestippeld zijn. |
| 4p | **3** | Bereken exact de afstand tussen  *R* en *S*. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee cirkels en twee lijnen*** | |
|  |  | De cirkel *c1* wordt gegeven door:  .  De lijn *k* wordt gegeven door:  .  Lijn *k* raakt cirkel *c1*. |
| 3p | **4** | Bewijs dit. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Het punt *M* is het middelpunt van *c1*. **figuur**  De lijn *l* gaat door *M* en staat loodrecht op *k*.  Het punt *S* is het snijpunt van *l* met de *y*-as.  De cirkel *c2* is de cirkel door *M* met middelpunt *S*.  Zie de figuur. |
| 6p | **5** | Stel op exacte wijze een vergelijking op van *c2*. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Oppervlakte onder een grafiek*** | |
|  |  | De functie *f* is gegeven door .  De grafiek van *f* is een parabool. |
| 2p | **6** | Bewijs dat de top van de parabool op de *x*-as ligt. |
|  |  |  |
|  |  | De lijn *m* is de verticale lijn met vergelijking , met .  We kijken naar het gebied dat aan de bovenkant wordt begrensd door de grafiek van *f*, aan de onderkant door de x-as, aan de linkerkant door de *y*-as en aan de rechterkant door lijn *m*.  **figuur 1 figuur 2**  In de figuren 1 en 2 is dit gebied  grijs gemaakt: in figuur 1 voor de  situatie , in figuur 2 voor de  situatie .  De oppervlakte van dit grijze  gebied noemen we *A*. De waarde  van *A* hangt dus af van de keuze  van *p*. Een formule voor *A* is:    Zo is bijvoorbeeld  als  en dus is de oppervlakte  van het grijze gebied in figuur 2  gelijk aan .  Voor een bepaalde waarde van *p* is de oppervlakte van het grijze gebied gelijk aan 42 |
| 4p | **7** | Bereken exact deze waarde van *p*. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Zonder de voorgaande formule te gebruiken kun je toch een goede benadering vinden van de oppervlakte. In de rest van de opgave doen we dit voor het geval  De benadering van de oppervlakte van het grijze **figuur 3**  gebied in figuur 1 gaat als volgt:   * De lijn *l* is de raaklijn aan de grafiek van *f* in het   punt   * *K* is het snijpunt van lijn *l* met de *y*-as. * *M* is het snijpunt van lijn *l* met lijn *m*. * *S* is het punt met coördinaten (1, 0) * De oppervlakte van vierhoek *OSMK* is de benadering.   Zie figuur 3, waarin de oppervlakte van vierhoek *OSMK*  grijs is gemaakt.  Een vergelijking van *l* is . |
| 3p | **8** | Bewijs dat  inderdaad een vergelijking  van *l* is. |
|  |  |  |
|  |  | De oppervlakte van de grijs gemaakte vierhoek *OSMK*  in figuur 3 wijkt een beetje af van de oppervlakte van  het grijze gebied in figuur 1. |
| 5p | **9** | Bereken algebraïsch hoeveel procent deze afwijking is. Geef je eindantwoord in één decimaal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Roeien*** | |
|  |  | In sportscholen vind je apparaten **foto**  waarmee je een roeibeweging  simuleert. Zo’n apparaat wordt een  roei-ergometer genoemd. Zie de foto.  In figuur 1 zie je een serie zijaanzichten  van de beweging van een roeier op een  roei-ergometer.  Doordat het voetenbord vast zit, blijven  de voeten vast op één punt. Wanneer de  roeier de benen strekt en weer buigt,  beweegt het zitje horizontaal van voor  naar achter en weer terug.  **figuur 1**  De roeibeweging begint op moment 1, waarna de roeier zijn benen strekt (momenten 2 en 3). Daarna worden de benen weer gebogen (momenten 4 en 5). |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In figuur 2 zie je een model van een roeier op de momenten 1 en 3. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. Het punt *V* is de voet, *K* is de knie en *H* is de heup (die in dit model samenvalt met het zitje.  **figuur 2**  In dit model geldt:   * De lengte van het bovenbeen is 48 cm. * De lengte van het onderbeen is 42 cm. * Het hoogteverschil tussen heup en voet is 15 cm. * Tussen de momenten 1 en 3 schuift het zitje 45 cm naar achteren. * De hoek tussen bovenbeen en onderbeen op moment 1 is 60°. * *A* is het punt recht onder de heup, op dezelfde hoogte als de voet. * Met *A1* wordt de positie van A op moment 1 bedoeld enzovoorts.   Op moment 1 is de afstand tussen de heup en de voet (*H1V*) ongeveer 45,3 cm. Deze afstand kan exact berekend worden. |
| 2p | **10** | Bereken exact de afstand in cm tussen de heup en de voet op moment 1.  Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken. |
|  |  |  |
|  |  | Ga bij het volgende onderdeel uit van .  Op moment 3 is het been bijna gestrekt, dus hoek *H3K3V* is bijna 180°. Om deze hoek te berekenen, is het handig om gebruik te maken van de driehoeken *A1VH1* en *A3VH3*. |
| 5p | **11** | Bereken hoek *H3K3V*. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken. Geef je eindantwoord in gehele graden. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een sinusoïde en nog een sinusoïde*** | |
|  |  | De functie *f* wordt gegeven door .  Het punt *A* is het eerste snijpunt van de grafiek van *f* met de positieve *x*-as. Het punt *B* is de derde top rechts van de *y*-as.  De lijn *k* gaat door *A* en *B*. In figuur 1 is de hoek  aangegeven die lijn *k* met de *x*-as maakt.  **figuur 1** |
| 6p | **12** | Bereken algebraïsch hoe groot hoek  is. Geef je eindantwoord in gehele graden. |
|  |  |  |
|  |  | In figuur 2 is de grafiek van *f* getekend en ook de lijn met vergelijking . Deze lijn heeft oneindig veel snijpunten met de grafiek van *f*. Het eerste snijpunt rechts van de *y*-as is *K*, het vierde is *L*.  In figuur 2 is met een stippellijn nog een sinusoïde weergegeven. Voor deze sinusoïde geldt:   * De eerste top rechts van de *y*-as valt samen met *K*. * De derde top rechts van de *y*-as valt samen met *L*. * De sinusoïde raakt de lijn met vergelijking .   **figuur 2**  De functie *g* die bij de gestippelde grafiek hoort, heeft een functievoorschrift van de volgende vorm:    Hierin zijn *a*, *b*, *c* en *d* getallen. |
| 7p | **13** | Bereken exact voor elk van deze vier getallen een mogelijke waarde. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Driehoek met maximale oppervlakte*** | |
|  |  | De functie *f* wordt gegeven door **figuur 1**  .  Het punt *T* is de top van de grafiek van *f*.  Zie figuur 1. |
| 4p | **14** | Bereken exact de coördinaten van *T*. |
|  |  |  |
|  |  | Op het deel van de grafiek van *f* dat boven  de *x*-as ligt, wordt een punt *P* gekozen. Het  punt *A* ligt op de *x*-as en heeft dezelfde  *x*-coördinaat als *P*.  In figuur 2 en figuur 3 is de situatie voor twee posities van *P* geschetst. In figuur 3 is de oppervlakte van driehoek *OAP* groter dan in figuur 2.  **figuur 2 figuur 3**  Er is een positie van *P* op de grafiek van *f* zo dat de oppervlakte van driehoek *OAP* maximaal is. Deze positie van *P* kun je vinden door de oppervlakte van driehoek *OAP* in *x* uit te drukken, waarbij *x* de lengte van zijde *OA* is. |
| 4p | **15** | Bereken de maximale oppervlakte van driehoek *OAP*. Geef je eindantwoord in drie decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***De invloed van leeftijd op hardloopprestaties*** | |
|  |  | Gemiddeld leveren langeafstandslopers de beste prestaties op een leeftijd van ongeveer 30 jaar. Daarna nemen de prestaties met de jaren af. Er bestaan meerdere modellen om de prestaties van langeafstandslopers van verschillende leeftijden met elkaar te vergelijken. In deze opgave komen twee van zulke modellen aan bod.  **Model 1**  Dit model gaat ervan uit dat tussen 35 en 55 jaar de gemiddelde **snelheid** van langeafstandslopers bij wedstrijden met 0,8% per levensjaar afneemt. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De halve marathon is een hardloopwedstrijd over een afstand van 21,0975 km. De Nederlandse hardloper Aart Stigter heeft meerdere keren aan de halve marathon van Egmond deelgenomen.  In 1993 liep hij op 36-jarige leeftijd deze halve marathon met een gemiddelde snelheid van 19,5 km per uur. Precies 12 jaar later, in 2005, liep hij dezelfde halve marathon in een tijd van 1 uur, 10 minuten en 4 seconden.  Uitgaande van zijn gemiddelde snelheid in 1993 en een afname van die gemiddelde snelheid met 0,8% per levensjaar, heeft Aart Stigter in 2005 sneller gelopen dan model 1 voorspelt. |
| 5p | **16** | Bereken hoeveel seconden sneller. Geef je eindantwoord als geheel getal. |
|  |  |  |
|  |  | **Model 2**  Dit model maakt gebruik van correctiegetallen voor de **tijd**.  De World Master Athletics-bond (WMA) heft tabellen uitgegeven met correctiegetallen om prestaties van hardlopers van verschillende leeftijden met elkaar te kunnen vergelijken. Met deze correctiegetallen kun je de tijd van elke hardloper omrekenen naar een tijd die hoort bij een 30-jarige met een gelijkwaardige prestatie.  In de tabel zie je de correctiegetallen voor 36-jarigen **tabel**  en 49-jarigen op de halve marathon. Door de tijd van   |  |  | | --- | --- | | **leeftijd** | **correctiegetal**  **t.o.v. 30-jarige** | | 36 | 0,9920 | | 49 | 0,9039 |   een 36-jarige hardloper met 0,9920 te  vermenigvuldigen krijg je de tijd die hoort bij een  30-jarige hardloper met een gelijkwaardige prestatie.  Neem aan dat de correctiegetallen voor de leeftijden  tussen 36 en 49 jaar bij benadering exponentieel  afnemen met de leeftijd.  Bij de NK halve marathon 2019 was de 47-jarige Marcel Laros met een tijd van 4279 seconden de snelste in de categorie 45-49 jaar. Bij diezelfde halve marathon was de 36-jarige Wynfrith Meijwes de snelste in de categorie 35-39 met een tijd van 4130 seconden. |
| 6p | **17** | Onderzoek op algebraïsche wijze welke van de twee hardlopers de beste prestatie heeft geleverd volgens model 2. |

**Wiskunde B** **2021-I**

**Uitwerkbijlage.**

**NAAM: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**vraag 10**



**vraag 11**

**Wiskunde B** **2021-I**

**Uitwerkingen. (N=1,8)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Gebroken functie en wortelfunctie*** |  |
| **1** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
| **2** | **maximumscore 6** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * (want ) | 2 |
| **3** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft verticale asymptoot: | 1 |
|  | * horizontale asymptoot: | 1 |
|  | * , dus | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee cirkels en twee lijnen*** |  |
| **4** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * dus de lijn raakt aan de cirkel | 1 |
| **5** | **maximumscore 6** |  |
|  | * geeft  *M*(2, 3) | 2 |
|  | * gaat door *M*:  *S*(0, 7) | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * *c2*: | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Oppervlakte onder een grafiek*** |  |
| **6** | **maximumscore 2** |  |
|  |  | 1 |
|  | * de top is (-2, 0) en ligt dus op de *x*-as. | 1 |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft | 2 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **8** | **maximumscore 3** |  |
|  | * en | 2 |
|  | * door *R*, dus | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **9** | **maximumscore 5** |  |
|  | * , dus  en | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * afwijking: | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Roeien*** |  |
| **10** | **maximumscore 2** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
| **11** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een sinusoïde en nog een sinusoïde*** |  |
| **12** | **maximumscore 6** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * *A*(4, 0) | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * *B*(10, 3) | 1 |
|  | * geeft | 2 |
| **13** | **maximumscore 7** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * hieruit volgt | 1 |
|  | * en | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * periode is , dus | 1 |
|  | * maximum is  en minimum -1, dus  en | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Driehoek met maximale oppervlakte*** |  |
| **14** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft  ofwel | 2 |
|  | * dus | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **15** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  | * beschrijven hoe het maximum op de GR berekend kan worden | 1 |
|  | * antwoord: | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***De invloed van leeftijd op hardloopprestaties*** |  |
| **16** | **maximumscore 5** |  |
|  | * zijn snelheid zou  km/u zijn | 2 |
|  | * de tijd die hij dan zou moeten lopen is  uur | 1 |
|  | * dat is 1 uur, 11 minuten en 29 seconden | 1 |
|  | * hij heeft  seconden sneller gelopen | 1 |
| **17** | **maximumscore 6** |  |
|  |  | 2 |
|  | * correctiegetal Marcel Laros: | 1 |
|  | * prestatie Laros:  seconden | 1 |
|  | * prestatie Meijwes:  seconden | 1 |
|  | * Laros heeft de beste prestatie geleverd volgens model 2 | 1 |