**Examen HAVO**

**2021**

tijdvak 2

dinsdag 22 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Rakende grafieken*** |
|  |  | De functie is gegeven door . **figuur 1**De grafiek van snijdt de -as in punt en de -as in punt .Zie figuur 1. |
| 4p | **1** | Bereken exact de afstand tussen en . |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie is gegeven door .De grafieken van en raken elkaar in het punt .Zie figuur 2.De -coördinaat van noemen we en er geldt:  |
| 3p | **2** | Bereken . Geef je eindantwoord in één decimaal. **figuur 2** |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingDat de grafieken van en elkaar raken in punt betekentdat de helling van beide grafieken in dat punt gelijk is. De-coördinaat van is hierboven in twee decimalen benaderd. |
| 6p | **3** | Bereken met behulp van differentiëren de waarde van nauwkeuriger. Geef je eindantwoord in drie decimalen. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Stedelijke gebieden*** |
|  |  | De Amerikaan Bettencourt heeft **figuur**Afbeelding met diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingonderzoek gedaan naar een mogelijkverband tussen het aantal inwoners en de lengte van het wegennet inmijlen in een stedelijk gebied. Om vaneen aantal stedelijke gebieden degegevens in één figuur duidelijk tekunnen weergeven is van elk gebiedlog() uitgezet tegen log().Het resultaat is de puntenwolk in de figuur.Bettencourt heeft een verband tussenlog( ) en log() opgesteld. In de figuuris de lijn getekend die dit verbandweergeeft. Deze figuur staat ook op deuitwerkbijlage. |
| 3p | **4** | Bepaal met behulp van lijn op de uitwerkbijlage de lengte van het wegennet in een gebied met 1 miljoen inwoners. Geef je eindantwoord in honderden mijlen. |
|  |  |  |
|  |  | Een formule voor is van de vorm (1)Uit de figuur volgt dat een gebied met 100 000 inwoners een wegennet heeft van ongeveer 650 mijl en een gebied met 10 000 000 inwoners een wegennet heeft van ongeveer 31 000 mijl. |
| 4p | **5** | Bereken en met behulp van deze gegevens. Geef de getallen in je eindantwoord in twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In zijn onderzoek komt Bettencourt tot de formule: (2)Voor de volgende vraag vergelijken we twee stedelijke gebieden met elkaar:gebied A en gebied B. Voor gebied B geldt dat het twee keer zoveel inwoners heeft als gebied A. |
| 3p | **6** | Bereken met behulp van formule (2) hoeveel procent de lengte van het wegennet van gebied B groter is dan de lengte van het wegennet van gebied A. Geef je eindantwoord in hele procenten. |
|  |  |  |
|  |  | De verhouding tussen en wordt **verkeersdruk** genoemd. Dus: (3)Hierin is het aantal inwoners per mijl.In de praktijk geldt: als in een stedelijk gebied het aantal inwoners toeneemt, neemt de verkeersdruk ook toe (ondanks de toename van de lengte van het wegennet). Voor moet dus gelden dat de grafiek van als functie van stijgend is. In drie stappen kan dit worden onderzocht:1. Druk met behulp van de formules (2) en (3) uit in .
2. Bepaal de afgeleide van de bij stap a gevonden formule.
3. Onderzoek of deze afgeleide voor alle waarden van groter is dan 0.
 |
| 4p | **7** | Onderzoek met dit stappenschema of de grafiek van als functie van inderdaad stijgend is. |

|  |  |
| --- | --- |
|   | ***Rechthoek om cirkels*** |
|  |  | Cirkel met middelpunt wordt **figuur 1**Afbeelding met cirkel, diagram, lijn, patroon  Automatisch gegenereerde beschrijvinggegeven door .Cirkel met straal 2 en middelpunt raakt .De twee cirkels worden omsloten dooreen rechthoek zodanig dat:* de hoekpunten en op de -as liggen;
* de lengte van zijde gelijk is aan de

diameter van ;* de zijden , en raakt;
* de zijden en raakt.

Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. |
| 5p | **8** | Bereken exact de coördinaten van . Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Verder is gegeven cirkel **figuur 2**Afbeelding met diagram, cirkel, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijvingmet middelpunt . Dezecirkel raakt en de zijden en . Zie figuur 2.In figuur 2 is ook de driehoek aangegeven, waarbijpunt dezelfde -coördinaatheeft als en dezelfde-coördinaat als .In driehoek is en is hoek een rechte hoek.Er geldt: Hierin is de straal van .Zie figuur 2. |
| 3p | **9** | Bewijs de juistheid van deze formule. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Exoten en rodelijstsoorten*** |
|  |  | De bruine rat, de Japanse oester en de Amerikaanse vogelkers zijn voorbeelden van dier- en plantensoorten die oorspronkelijk niet in Nederland voorkwamen, maar die bewust of onbewust door de mens in Nederland zijn ingevoerd. Zulke soorten worden **exoten** genoemd. **figuur 1**Afbeelding met lijn, Parallel, tekst, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 1 is voor de periode1910 – 2000 eens per tien jaar,telkens op 1 januari van hetaangegeven jaar, het aantalexoten in Nederlandweergegeven. In deze figuur isook een grafiek weergegevendie de ontwikkeling van dezeaantallen benadert.Uit figuur 1 valt af te lezen dat hetaantal exoten in Nederland in deperiode van 1 januari 1910 tot1 januari 1950 van 22 tot 46 istoegenomen. Neem aan dat het aantal exoten sinds 1 januari 1910 exponentieel is gegroeid. Dan volgt uit de gegevens voor de periode 1910 – 1950 dat dit aantal elke tien jaar met ongeveer 20% is toegenomen. |
| 4p | **10** | Bereken met behulp van de gegevens van 1910 en 1950 dit percentage nauwkeuriger. Geef je eindantwoord in één decimaal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | We gaan bij de volgende vraag uit van een toename van 20% per tien jaar. |
| 4p | **11** | Bereken na hoeveel jaar het aantal exoten volgens de bovenstaande exponentiële groei voor het eerst verdubbeld is. Geef je eindantwoord in hele jaren. |
|  |  |  |
|  |  | Er bestaat een zogenaamde rode lijst van diersoorten in Nederland die met uitsterven bedreigd worden. Daarom worden deze diersoorten ook wel **rodelijstsoorten** genoemd.Afbeelding met tekst, lijn, schermopname, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 2 is de ontwikkeling van **figuur 2**de rodelijstsoorten in de periode1997 – 2012 te zien. Hierbij zijn deaantallen aangegeven als percentageten opzichte van het aantal in 1997.In figuur 2 is ook een rechte lijngetekend die de ontwikkeling van hetaantal rodelijstsoorten benadert.Volgens deze benadering neemt hetaantal rodelijstsoorten vanaf 1997lineair af. Figuur 2 staat ook vergrootop de uitwerkbijlage.In 2004 was het werkelijke aantal rodelijstsoorten 694.Met behulp van de lineaire afname volgens de getekende rechte lijn werd in 2013 een voorspelling gedaan voor het aantal rodelijstsoorten in 2020. Het daadwerkelijke aantal rodelijstsoorten in 2020 bleek 551 te zijn. Dit aantal is duidelijk hoger dan het aantal volgens de voorspelling. |
| 5p | **12** | Bereken hoeveel het daadwerkelijke aantal rodelijstsoorten in 2020 verschilt met de voorspelling volgens de rechte lijn. Gebruik hiervoor de figuur op de uitwerkbijlage. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Drie snijpunten*** |
|  |  | Op het domein is **figuur**Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingde functie gegeven door Op het gegeven domein ishet punt de eerste toprechts van de -as van degrafiek van. Zie de figuur. |
| 4p | **13** | Bereken exact de coördinatenvan . |
|  |  |  |
|  |  | De punten , en zijn dedrie snijpunten van de grafiekvan met de -as. Lijnstuk is keer zo lang als lijnstuk . |
| 5p | **14** | Bereken exact de waarde van . |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Functie met log*** |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel, Parallel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie is gegeven doorDe grafiek van snijdt de -asin de punten en .De asymptoten van de grafiekvan snijden de -as in en .Zie de figuur. |
| 3p | **15** | Bereken exact de -coördinaatvan . |
|  |  |  |
| 5p | **16** | Bereken exact de coördinatenvan en . |
|  |  |  |
|  |  | Op het domein is functie f ook te schrijven als:  |
| 3p | **17** | Toon dit aan. |



|  |  |
| --- | --- |
|  | ***In de schijnwerper*** |
|  |  | Een lichtspot geeft een bundel licht. **foto**Afbeelding met schermopname, zwart-wit, Lensschittering, duisternis  Automatisch gegenereerde beschrijvingZie de foto.Voor de lichtbundel van een bepaaldelichtspot geldt dat in figuur 1 eenzijaanzicht de buitenste lichtstralen eenhoek van 50° met elkaar maken. Ziefiguur 1.Deze lichtspot hangt 300 cm boven eenvloer. Als de lichtbundel recht naarbeneden wordt gericht, ontstaat op devloer een cirkelvormige lichtvlek. Infiguur 2 is een zijaanzicht van dezesituatie schematisch weergegeven. **figuur 1 figuur 2**Afbeelding met statief  Automatisch gegenereerde beschrijvingHierin is de lichtspot. |
| 3p | **18** | Bereken de oppervlakte van decirkelvormige lichtvlek. Geef jeeindantwoord in gehele cm2. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De lichtspot kan gedraaid worden, zodat de lichtbundel ook op andere delen van de vloer gericht kan worden. Hierbij blijft in een zijaanzicht de hoek tussen de buitenste lichtstralen 50°. Het is mogelijk om de lichtspot zo ver naar rechts te draaien dat er een 500 centimeter lange lichtvlek op de vloer ontstaat. Een zijaanzicht van deze situatie is in figuur 3 schematisch weergegeven.Afbeelding met lijn, driehoek  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 3**In figuur 3 is de lengte van de lichtvlek. is het punt op de vloer recht onder en . Er geldt dus: . is uit te drukken in . Met behulp van de sinusregel in driehoek kan ook uitgedrukt worden in . Er geldt: (1) |
| 3p | **19** | Toon dit aan. |
|  |  |  |
|  |  | In driehoek geldt: (2)Met behulp van formule (1) en formule (2) is hoek te berekenen. |
| 4p | **20** | Bereken hoeveel graden de lichtspot vanuit de situatie in figuur 2 naar rechts gedraaid moet worden om de situatie van figuur 3 te krijgen. Geef je eindantwoord in gehele graden. |

**Wiskunde B** **2021-II**

**Uitwerkbijlage.**

**NAAM: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**vraag 4**



**vraag 8**

**vraag 12**

**Wiskunde B** **2021-II**

**Uitwerkingen. (N=1,5)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Rakende grafieken*** |  |
| **1** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft
 | 1 |
|  | * geeft
 | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **2** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **3** | **maximumscore 6** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe de vergelijking opgelost kan worden
 | 2 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Stedelijke gebieden*** |  |
| **4** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * mijlen
 | 1 |
| **5** | **maximumscore 4** |  |
|  | * en (7; 4,49…)
 | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
| **6** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 2 |
|  | * dus 78% groter wegennet
 | 1 |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * voor positieve waarden van is positief, dus is positief.
 |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Rechthoek om cirkels*** |  |
| **8** | **maximumscore 5** |  |
|  | * en straal 3
 | 1 |
|  | * en , dus
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | * , dus
 | 2 |
|  |  | 1 |
| **9** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * , dus
 | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Exoten en rodelijstsoorten*** |  |
| **10** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * groeipercentage per 10 jaar is 20,2%
 | 1 |
| **11** | **maximumscore 4** |  |
|  | *
 | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * na 39 jaar voor het eerst verdubbeld.
 | 1 |
| **12** | **maximumscore 5** |  |
|  | * 2004: 89% komt overeen met 694
 | 1 |
|  | * het aantal in 1997 was dan
 | 1 |
|  | * in 7 jaar neemt het percentage met 11% af
 | 1 |
|  | * dus in 2020: %, ofwel ongeveer 498 soorten.
 | 1 |
|  | * verschil: 53 rodelijstsoorten
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Drie snijpunten*** |  |
| **13** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * stijgend door de evenwichtsstand in
 | 1 |
|  |  | 2 |
| **14** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft
 | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * , en
 | 1 |
|  | *
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Functie met log*** |  |
| **15** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft en
 | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **16** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft
 | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * en
 | 1 |
| **17** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | *
 | 1 |
|  | *
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***In de schijnwerper*** |  |
| **18** | **maximumscore 3** |  |
|  | * geeft cm
 | 2 |
|  | * cm2
 | 1 |
| **19** | **maximumscore 3** |  |
|  | * , dus
 | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **20** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden
 | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * de spot moet over een hoek van 37° gedraaid worden
 | 1 |