**Examen HAVO**

**2021**

tijdvak 2

dinsdag 22 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Rakende grafieken*** | |
|  |  | De functie is gegeven door . **figuur 1**  De grafiek van snijdt de -as in punt en de -as in punt .  Zie figuur 1. |
| 4p | **1** | Bereken exact de afstand tussen en . |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie is gegeven door .  De grafieken van en raken elkaar in het punt .  Zie figuur 2.  De -coördinaat van noemen we en er geldt: |
| 3p | **2** | Bereken . Geef je eindantwoord in één decimaal. **figuur 2** |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingDat de grafieken van en elkaar raken in punt betekent  dat de helling van beide grafieken in dat punt gelijk is. De  -coördinaat van is hierboven in twee decimalen benaderd. |
| 6p | **3** | Bereken met behulp van differentiëren de waarde van  nauwkeuriger. Geef je eindantwoord in drie decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Stedelijke gebieden*** | |
|  |  | De Amerikaan Bettencourt heeft **figuur**  Afbeelding met diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingonderzoek gedaan naar een mogelijk  verband tussen het aantal inwoners  en de lengte van het wegennet in  mijlen in een stedelijk gebied. Om van  een aantal stedelijke gebieden de  gegevens in één figuur duidelijk te  kunnen weergeven is van elk gebied  log() uitgezet tegen log().  Het resultaat is de puntenwolk in de figuur.  Bettencourt heeft een verband tussen  log( ) en log() opgesteld. In de figuur  is de lijn getekend die dit verband  weergeeft. Deze figuur staat ook op de  uitwerkbijlage. |
| 3p | **4** | Bepaal met behulp van lijn op de uitwerkbijlage de lengte van het wegennet in een gebied met 1 miljoen inwoners. Geef je eindantwoord in honderden mijlen. |
|  |  |  |
|  |  | Een formule voor is van de vorm  (1)  Uit de figuur volgt dat een gebied met 100 000 inwoners een wegennet heeft van ongeveer 650 mijl en een gebied met 10 000 000 inwoners een wegennet heeft van ongeveer 31 000 mijl. |
| 4p | **5** | Bereken en met behulp van deze gegevens. Geef de getallen in je eindantwoord in twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In zijn onderzoek komt Bettencourt tot de formule:  (2)  Voor de volgende vraag vergelijken we twee stedelijke gebieden met elkaar:  gebied A en gebied B. Voor gebied B geldt dat het twee keer zoveel inwoners heeft als gebied A. |
| 3p | **6** | Bereken met behulp van formule (2) hoeveel procent de lengte van het wegennet van gebied B groter is dan de lengte van het wegennet van gebied A. Geef je eindantwoord in hele procenten. |
|  |  |  |
|  |  | De verhouding tussen en wordt **verkeersdruk** genoemd. Dus:  (3)  Hierin is het aantal inwoners per mijl.  In de praktijk geldt: als in een stedelijk gebied het aantal inwoners toeneemt, neemt de verkeersdruk ook toe (ondanks de toename van de lengte van het wegennet).  Voor moet dus gelden dat de grafiek van als functie van stijgend is. In drie stappen kan dit worden onderzocht:   1. Druk met behulp van de formules (2) en (3) uit in . 2. Bepaal de afgeleide van de bij stap a gevonden formule. 3. Onderzoek of deze afgeleide voor alle waarden van groter is dan 0. |
| 4p | **7** | Onderzoek met dit stappenschema of de grafiek van als functie van inderdaad stijgend is. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Rechthoek om cirkels*** | |
|  |  | Cirkel met middelpunt wordt **figuur 1**  Afbeelding met cirkel, diagram, lijn, patroon  Automatisch gegenereerde beschrijvinggegeven door .  Cirkel met straal 2 en middelpunt  raakt .  De twee cirkels worden omsloten door  een rechthoek zodanig dat:   * de hoekpunten en op de -as liggen; * de lengte van zijde gelijk is aan de   diameter van ;   * de zijden , en raakt; * de zijden en raakt.   Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. |
| 5p | **8** | Bereken exact de coördinaten van . Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Verder is gegeven cirkel **figuur 2**  Afbeelding met diagram, cirkel, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijvingmet middelpunt . Deze  cirkel raakt en de zijden  en . Zie figuur 2.  In figuur 2 is ook de driehoek  aangegeven, waarbij  punt dezelfde -coördinaat  heeft als en dezelfde  -coördinaat als .  In driehoek is  en is hoek een rechte hoek.  Er geldt:    Hierin is de straal van .  Zie figuur 2. |
| 3p | **9** | Bewijs de juistheid van deze formule. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Exoten en rodelijstsoorten*** | |
|  |  | De bruine rat, de Japanse oester en de Amerikaanse vogelkers zijn voorbeelden van dier- en plantensoorten die oorspronkelijk niet in Nederland voorkwamen, maar die bewust of onbewust door de mens in Nederland zijn ingevoerd. Zulke soorten worden **exoten** genoemd.  **figuur 1**  Afbeelding met lijn, Parallel, tekst, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 1 is voor de periode  1910 – 2000 eens per tien jaar,  telkens op 1 januari van het  aangegeven jaar, het aantal  exoten in Nederland  weergegeven. In deze figuur is  ook een grafiek weergegeven  die de ontwikkeling van deze  aantallen benadert.  Uit figuur 1 valt af te lezen dat het  aantal exoten in Nederland in de  periode van 1 januari 1910 tot  1 januari 1950 van 22 tot 46 is  toegenomen. Neem aan dat het aantal exoten sinds 1 januari 1910 exponentieel is gegroeid. Dan volgt uit de gegevens voor de periode 1910 – 1950 dat dit aantal elke tien jaar met ongeveer 20% is toegenomen. |
| 4p | **10** | Bereken met behulp van de gegevens van 1910 en 1950 dit percentage nauwkeuriger. Geef je eindantwoord in één decimaal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | We gaan bij de volgende vraag uit van een toename van 20% per tien jaar. |
| 4p | **11** | Bereken na hoeveel jaar het aantal exoten volgens de bovenstaande exponentiële groei voor het eerst verdubbeld is. Geef je eindantwoord in hele jaren. |
|  |  |  |
|  |  | Er bestaat een zogenaamde rode lijst van diersoorten in Nederland die met uitsterven bedreigd worden. Daarom worden deze diersoorten ook wel **rodelijstsoorten** genoemd.  Afbeelding met tekst, lijn, schermopname, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 2 is de ontwikkeling van **figuur 2**  de rodelijstsoorten in de periode  1997 – 2012 te zien. Hierbij zijn de  aantallen aangegeven als percentage  ten opzichte van het aantal in 1997.  In figuur 2 is ook een rechte lijn  getekend die de ontwikkeling van het  aantal rodelijstsoorten benadert.  Volgens deze benadering neemt het  aantal rodelijstsoorten vanaf 1997  lineair af. Figuur 2 staat ook vergroot  op de uitwerkbijlage.  In 2004 was het werkelijke aantal rodelijstsoorten 694.  Met behulp van de lineaire afname volgens de getekende rechte lijn werd in 2013 een voorspelling gedaan voor het aantal rodelijstsoorten in 2020. Het daadwerkelijke aantal rodelijstsoorten in 2020 bleek 551 te zijn. Dit aantal is duidelijk hoger dan het aantal volgens de voorspelling. |
| 5p | **12** | Bereken hoeveel het daadwerkelijke aantal rodelijstsoorten in 2020 verschilt met de voorspelling volgens de rechte lijn. Gebruik hiervoor de figuur op de uitwerkbijlage. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Drie snijpunten*** | |
|  |  | Op het domein is **figuur**  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingde functie gegeven door    Op het gegeven domein is  het punt de eerste top  rechts van de -as van de  grafiek van. Zie de figuur. |
| 4p | **13** | Bereken exact de coördinaten  van . |
|  |  |  |
|  |  | De punten , en zijn de  drie snijpunten van de grafiek  van met de -as. Lijnstuk is keer zo lang als lijnstuk . |
| 5p | **14** | Bereken exact de waarde van . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Functie met log*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel, Parallel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie is gegeven door  De grafiek van snijdt de -as  in de punten en .  De asymptoten van de grafiek  van snijden de -as in en .  Zie de figuur. |
| 3p | **15** | Bereken exact de -coördinaat  van . |
|  |  |  |
| 5p | **16** | Bereken exact de coördinaten  van en . |
|  |  |  |
|  |  | Op het domein is functie f ook te schrijven als: |
| 3p | **17** | Toon dit aan. |

Afbeelding met lijn, diagram, driehoek

Automatisch gegenereerde beschrijving

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***In de schijnwerper*** | |
|  |  | Een lichtspot geeft een bundel licht. **foto**  Afbeelding met schermopname, zwart-wit, Lensschittering, duisternis  Automatisch gegenereerde beschrijvingZie de foto.  Voor de lichtbundel van een bepaalde  lichtspot geldt dat in figuur 1 een  zijaanzicht de buitenste lichtstralen een  hoek van 50° met elkaar maken. Zie  figuur 1.  Deze lichtspot hangt 300 cm boven een  vloer. Als de lichtbundel recht naar  beneden wordt gericht, ontstaat op de  vloer een cirkelvormige lichtvlek. In  figuur 2 is een zijaanzicht van deze  situatie schematisch weergegeven. **figuur 1 figuur 2**  Afbeelding met statief  Automatisch gegenereerde beschrijvingHierin is de lichtspot. |
| 3p | **18** | Bereken de oppervlakte van de  cirkelvormige lichtvlek. Geef je  eindantwoord in gehele cm2. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De lichtspot kan gedraaid worden, zodat de lichtbundel ook op andere delen van de vloer gericht kan worden. Hierbij blijft in een zijaanzicht de hoek tussen de buitenste lichtstralen 50°. Het is mogelijk om de lichtspot zo ver naar rechts te draaien dat er een 500 centimeter lange lichtvlek op de vloer ontstaat. Een zijaanzicht van deze situatie is in figuur 3 schematisch weergegeven.  Afbeelding met lijn, driehoek  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 3**  In figuur 3 is de lengte van de lichtvlek. is het punt op de vloer recht onder en . Er geldt dus: .  is uit te drukken in . Met behulp van de sinusregel in driehoek kan ook uitgedrukt worden in . Er geldt:  (1) |
| 3p | **19** | Toon dit aan. |
|  |  |  |
|  |  | In driehoek geldt:  (2)  Met behulp van formule (1) en formule (2) is hoek te berekenen. |
| 4p | **20** | Bereken hoeveel graden de lichtspot vanuit de situatie in figuur 2 naar rechts gedraaid moet worden om de situatie van figuur 3 te krijgen. Geef je eindantwoord in gehele graden. |

**Wiskunde B** **2021-II**

**Uitwerkbijlage.**

**NAAM: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**vraag 4**

Afbeelding met diagram

Automatisch gegenereerde beschrijving

Afbeelding met cirkel, diagram, lijn, patroon

Automatisch gegenereerde beschrijving**vraag 8**

Afbeelding met tekst, diagram, lijn, Perceel

Automatisch gegenereerde beschrijving**vraag 12**

**Wiskunde B** **2021-II**

**Uitwerkingen. (N=1,5)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Rakende grafieken*** |  |
| **1** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **2** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **3** | **maximumscore 6** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe de vergelijking opgelost kan worden | 2 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Stedelijke gebieden*** |  |
| **4** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * mijlen | 1 |
| **5** | **maximumscore 4** |  |
|  | * en (7; 4,49…) | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
| **6** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 2 |
|  | * dus 78% groter wegennet | 1 |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * voor positieve waarden van is positief, dus is positief. |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Rechthoek om cirkels*** |  |
| **8** | **maximumscore 5** |  |
|  | * en straal 3 | 1 |
|  | * en , dus | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | * , dus | 2 |
|  |  | 1 |
| **9** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * , dus | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Exoten en rodelijstsoorten*** |  |
| **10** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * groeipercentage per 10 jaar is 20,2% | 1 |
| **11** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * na 39 jaar voor het eerst verdubbeld. | 1 |
| **12** | **maximumscore 5** |  |
|  | * 2004: 89% komt overeen met 694 | 1 |
|  | * het aantal in 1997 was dan | 1 |
|  | * in 7 jaar neemt het percentage met 11% af | 1 |
|  | * dus in 2020: %, ofwel ongeveer 498 soorten. | 1 |
|  | * verschil: 53 rodelijstsoorten | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Drie snijpunten*** |  |
| **13** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * stijgend door de evenwichtsstand in | 1 |
|  |  | 2 |
| **14** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * , en | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Functie met log*** |  |
| **15** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft en | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **16** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * en | 1 |
| **17** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***In de schijnwerper*** |  |
| **18** | **maximumscore 3** |  |
|  | * geeft cm | 2 |
|  | * cm2 | 1 |
| **19** | **maximumscore 3** |  |
|  | * , dus | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **20** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * de spot moet over een hoek van 37° gedraaid worden | 1 |