**Examen HAVO**

**2021**

tijdvak 3

donderdag 8 juli

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Transistors en opslagcapaciteit*** | |
|  |  | Afbeelding met stroomkring, elektronica, Elektronische engineering, Elektronisch onderdeel  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn een smartphone zit een processor. Zo’n  processor bestaat meestal uit veel uiterst  kleine transistors. Het aantal transistors in  een processor is in de loop van de jaren  enorm toegenomen.  Een producent van smartphones bracht in  september 2013 een telefoon op de markt  met een processor die 1 miljard transistors  bevatte. Diezelfde producent heeft elk  opvolgend jaar, steeds in september, een  nieuwe telefoon uitgebracht. In 2018 bracht deze producent een telefoon uit met een processor die 6,9 miljard transistors bevatte. Neem aan dat het aantal transistors in een processor in de tussentijd exponentieel groeide en dat deze groei zich in de jaren daarna voortzette. Je kunt dan voor de telefoon die de producent in 2021 uitbrengt, berekenen hoe groot het aantal transistors is dat de processor van die telefoon zal bevatten. |
| 3p | **1** | Bereken dit aantal in miljarden. Geef je eindantwoord als geheel getal. |
|  |  |  |
|  |  | Op 1 januari 1992 was de prijs per miljoen transistors 222 dollar. Vanaf dat moment nam de prijs per miljoen transistors af met 32% per jaar. Er komt een moment dat de prijs per miljoen transistors voor het eerst minder is dan 0,1 dollarcent, dus minder dan 0,001 dollar. |
| 4p | **2** | Bereken in welk jaar dat het geval is. |
|  |  |  |
|  |  | Als je een computerbestand opslaat, dan komt zo’n bestand bijvoorbeeld op een harde schijf (harddisk) terecht. De **opslagcapaciteit** van een harde schijf is het aantal GB (gigabyte) dat op die schijf kan worden opgeslagen.  Afbeelding met lijn, Perceel, diagram, ontvangst  Automatisch gegenereerde beschrijvingOp basis van de opslagcapaciteit van een harde schijf en de prijs van de schijf kun je berekenen wat de prijs per GB is. Deze prijs per GB is in de afgelopen jaren enorm gedaald. In de figuur is deze prijsdaling te zien. Op de verticale as is uitgezet. Hierin is de prijs per GB in dollars.  In het jaar 2004 was het heel gebruikelijk om te werken met een harde schijf van 250 GB. In 2013 waren harde schijven van 2 TB (terabyte) gebruikelijk.  Er geldt: TB GB.  Met deze gegevens kun je berekenen hoeveel procent goedkoper een harde schijf van 2 TB uit 2013 was dan een harde schijf van 250 GB uit 2004. |
| 4p | **3** | Bereken dit percentage. Geef je eindantwoord als geheel getal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Hetzelfde snijpunt met de -as*** | |
|  |  | De functies en worden gegeven door:      De grafieken van en snijden elkaar in twee punten. Dit zijn de punten en .  De lijn door en snijdt de -as in het punt .  Het snijpunt van de grafiek van met de -as is het punt . |
| 7p | **4** | Bewijs dat en dezelfde -coördinaat hebben. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee transformaties*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, schets, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie f wordt gegeven door **figuur 1**  .  De lijn heeft vergelijking .  Lijn wordt eenheden omhoog geschoven.  Hierdoor ontstaat de lijn die en raaklijn is  aan de grafiek van . Zie figuur 1. |
| 8p | **5** | Bereken exact met behulp van differentiëren  de waarde van . |
|  |  |  |
|  |  | Lijn heeft twee punten gemeenschappelijk **figuur 2**  Afbeelding met lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingmet de grafiek van *f*.  Door lijn te vermenigvuldigen ten opzichte  van de -as met factor *p* ontstaat een nieuwe  lijn. Er is één waarde van *p* met  waarvoor die nieuwe lijn precies één punt  gemeenschappelijk heeft met de grafiek van .  Deze situatie is weergegeven in figuur 2. |
| 6p | **6** | Bereken exact deze waarde van . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Bouwkraan*** | |
|  |  | Afbeelding met diagram, lijn, Parallel  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn de zesde eeuw voor **figuur 1**  Christus vonden de Grieken  de bouwkraan uit, waarmee  je zware voorwerpen kunt  optakelen.  In de figuren 1a tot en met 1d  zie je dat een blok wordt  opgetakeld en 2,5 meter  verderop op een stapel  blokken wordt neergelaten.  De kraan bestaat uit:   * een paal van 9 meter,   die kan scharnieren om ;   * een kabel met een   lengte die aangepast kan  worden;   * een kabel recht omlaag   vanuit met een lengte die  aangepast kan worden.  Verder geldt:   * de afstand tussen en is 5,5 meter; * het te verplaatsen blok hangt aan de kabel ergens onder .   De verplaatsing gaat als volgt:   * Het blok in figuur 1a takelt men omhoog door de kabel onder korter te maken. Hierdoor ontstaat de situatie van figuur 1b. * Vervolgens maakt men kabel langer, waardoor paal linksom scharniert en het blok naar links beweegt. Zo ontstaat de situatie van figuur 1c. * Ten slotte laat men het blok recht omlaag zakken door de kabel onder weer langer te maken. Zo ontstaat de situatie van figuur 1d.   **figuur 2 beginsituatie**  Afbeelding met lijn, driehoek, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 2 zie je de situatie van de figuren 1a  en 1b schematisch weergegeven. Het punt op  de grond recht onder punt , noemen we .  Ergens op lijnstuk bevindt zich het midden  van het blok.  Als de bouwkraan zich in de situatie van de  figuren 1a en 1b bevindt, is de lengte van  gelijk aan 12 meter. is dan afgerond 71  graden. Deze hoek kan nauwkeuriger berekend  worden. |
| 4p | **7** | Bereken algebraïsch in graden.  Geef je eindantwoord in één decimaal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Zoals in figuur 1 is te zien, moet het blok 2,5 meter naar links worden verplaatst. Kabel moet dus zo veel langer worden dat de afstand tussen en met 2,5 meter toeneemt.  Figuur 2, de beginsituatie, staat ook op de uitwerkbijlage. |
| 4p | **8** | Bereken algebraïsch de lengte van kabel in de situatie van de figuren 1c en 1d. Geef je eindantwoord in meters in één decimaal. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Prooidieren en roofdieren*** | |
|  |  | Er bestaan wiskundige modellen die het verband aangeven tussen aantallen prooidieren en roofdieren. Deze modellen worden **prooi-roofdiermodellen** genoemd.  Als er in een gebied veel prooidieren zijn, dan zal na verloop van tijd het aantal roofdieren in dat gebied sterk toenemen, omdat die zich voldoende kunnen voeden met de prooidieren. Door die toename van het aantal roofdieren zal het aantal prooidieren teruglopen. Hierdoor kunnen de roofdieren minder voedsel vinden en zullen zij in aantal afnemen. Als gevolg daarvan zal het aantal prooidieren weer toenemen. En daarmee begint deze cyclus weer opnieuw. In figuur 1 wordt een model van zo’n cyclus weergegeven.  **Afbeelding met diagram, Perceel, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijvingfiguur 1**  De grafieken van het aantal roofdieren en het aantal prooidieren zijn in dit model sinusoïden. |
| 4p | **9** | Stel op algebraïsche wijze een functievoorschrift voor op waarmee je het aantal roofdieren in figuur 1 kunt berekenen als functie van de tijd in jaren. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In de rest van deze opgave gaan we uit van een ander prooi-roofdiermodel:      Hierin is het aantal prooidieren, het aantal roofdieren en de tijd in jaren. In figuur 2 zijn de grafieken van en geschetst.  **figuur 2**  Afbeelding met diagram, Perceel, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijving  In elke periode is er één moment waarop de groeisnelheid van het aantal prooidieren maximaal is. In het bijbehorende punt op de grafiek is de helling dus maximaal. |
| 3p | **10** | Bereken deze maximale groeisnelheid. Geef je eindantwoord in gehele honderdtallen prooidieren per jaar. |
|  |  |  |
|  |  | Iemand zegt: “Op de momenten dat er 4300 prooidieren zijn, zijn er … roofdieren of … roofdieren.” |
| 4p | **11** | Bereken welke twee getallen op de plaats van de puntjes moeten staan, zodat de uitspraak juist is. Geef deze getallen in gehele honderdtallen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Raaklijn aan cirkel*** | |
|  |  | Afbeelding met diagram, lijn, cirkel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe cirkel heeft vergelijking **figuur 1**  .  Het middelpunt van is . Het punt  ligt op . De lijn is de  raaklijn aan de cirkel in . Lijn snijdt  de -as in het punt . Cirkel snijdt de  -as in de punten en . Zie figuur 1.  Een vergelijking van is . |
| 3p | **12** | Bewijs dat inderdaad een  vergelijking van is. |
|  |  |  |
|  |  | Er geldt . |
| 5p | **13** | Bewijs dat voor de situatie van figuur 1 inderdaad geldt . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De gelijkheid geldt algemener, **figuur 2**  Afbeelding met diagram, lijn, cirkel, Parallel  Automatisch gegenereerde beschrijvingnamelijk voor elke situatie waarin geldt:   * , en zijn drie willekeurige punten op   een cirkel;   * het punt is het snijpunt van de lijn door   en met de raaklijn aan de cirkel in .  In figuur 2 is de cirkel met middelpunt  en straal 3 weergegeven. De punten , en  zijn drie punten op de cirkel.  De lijn is de raaklijn aan de cirkel in . Het  punt is het snijpunt van lijn en de lijn door  en . Verder is gegeven dat en  . Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage. |
| 4p | **14** | Bereken exact de afstand tussen punt en  cirkel . Je kunt hierbij de figuur op de  uitwerkbijlage gebruiken. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Logaritmen en snijpunten*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, schets, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functies en worden gegeven **figuur 1**  door  Beide grafieken hebben een  verticale asymptoot. Het punt is  het snijpunt van de grafieken van  en . Zie figuur 1.  De afstand van tot de asymptoot  van de grafiek van is groter dan  de afstand van tot de asymptoot  van de grafiek van . **figuur 2** |
| 5p | **15** | Bereken exact hoeveel keer zo groot. |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Parallel, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe lijn met vergelijking ligt  rechts van en snijdt de grafieken  van en in de punten en .  De waarde van is zo gekozen  dat de lengte van lijnstuk gelijk  is aan 1. Zie figuur 2. |
| 5p | **16** | Bereken exact de waarde van . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Maximale richtingscoëfficiënt*** | |
|  |  | Op het domein wordt de functie gegeven door:    Het punt ligt op de grafiek van . De -coördinaat van is . De -coördinaat van is dus . De lijn gaat door de oorsprong en door . De richtingscoëfficiënt van noemen we . Er geldt:    In de figuren 1 en 2 is lijn voor twee posities van getekend. In figuur 2 is groter dan in figuur 1.  **figuur 1 figuur 2**  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijving  Er is een waarde van waarvoor maximaal is. Deze waarde van kun je berekenen door eerst uit te drukken in . |
| 5p | **17** | Bereken exact de waarde van waarvoor maximaal is. |

**Wiskunde B** **2021-III**

**Uitwerkbijlage.**

**NAAM: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

Afbeelding met lijn, diagram, Parallel

Automatisch gegenereerde beschrijving**vraag 8**

Afbeelding met diagram, lijn, cirkel

Automatisch gegenereerde beschrijving**vraag 14**

**Wiskunde B** **2021-III**

**Uitwerkingen. (N=1,1)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Transistors en opslagcapaciteit*** |  |
| **1** | **maximumscore 3** |  |
|  | * geeft | 2 |
|  | * in 2021: miljard transistors | 1 |
| **2** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden | 1 |
|  | * , dus in 2023 minder dan 0,001 dollar | 1 |
| **3** | **maximumscore 4** |  |
|  | * in 2004: en in 2013: | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * dat is goedkoper | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Hetzelfde snijpunt met de -as*** |  |
| **4** | **maximumscore 7** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft en | 2 |
|  | * en | 2 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee transformaties*** |  |
| **5** | **maximumscore 8** |  |
|  |  | 2 |
|  | * geeft | 2 |
|  | * dus | 2 |
|  | * gaat door | 1 |
|  | * invullen geeft | 1 |
| **6** | **maximumscore 6** |  |
|  | * heeft één oplossing | 1 |
|  | * geeft heeft één oplossing | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Bouwkraan*** |  |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | * en dit geeft | 2 |
| **8** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * nieuwe situatie: en daarmee | 2 |
|  | * meter | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Prooidieren en roofdieren*** |  |
| **9** | **maximumscore 4** |  |
|  | * maximum: 5000 en minimum: 1000 geeft en | 1 |
|  | * stijgend door de evenwichtsstand: en | 2 |
|  |  | 2 |
| **10** | **maximumscore 3** |  |
|  | * beschrijven hoe de hellingfunctie op de GR getekend kan worden | 1 |
|  | * beschrijven hoe het maximum op de GR berekend kan worden | 1 |
|  | * antwoord: 2700 roofdieren per jaar | 1 |
| **11** | **maximumscore 4** |  |
|  | * beschrijven hoe de vergelijking opgelost kan worden | 2 |
|  | * en | 1 |
|  | * en | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Raaklijn aan cirkel*** |  |
| **12** | **maximumscore 3** |  |
|  | * en dus is | 2 |
|  | * gaat door : | 1 |
| **13** | **maximumscore 5** |  |
|  | * en | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
| **14** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * , dus | 2 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Logaritmen en snijpunten*** |  |
| **15** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * asymptoot : en asymptoot : | 2 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **16** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Maximale richtingscoëfficiënt*** |  |
| **17** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |