**Examen HAVO**

**2024**

tijdvak 2

maandag 24 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Wortelgrafiek en parabool*** |
|  |  | De functies en worden gegeven door en  De grafiek van heeft een  randpunt en de grafiek van **figuur**  heeft een top. |
| 4p | **1** | Onderzoek op exacte wijze  of deze top hetzelfde punt is  als dat randpunt. |
|  |  | **Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijving** |
|  |  | De lijn met vergelijking  snijdt de grafiek van in de  punten en , waarbij rechts  ligt van . De lijn snijdt de  grafiek van in het punt .  Zie de figuur. |
| 5p | **2** | Bereken exact de afstand . |
|  |  |  |
|  |  | De lijn raakt de grafiek van in het punt met -coördinaat 15.  De lijn met vergelijking raakt de grafiek van . |
| 5p | **3** | Bewijs dat en loodrecht op elkaar staan. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Zonsopkomst en zonsondergang*** |
|  |  | Voor elke dag van het jaar is te bepalen hoe laat de zon opkomt en hoe laat de zon ondergaat.  Op elke dag van het jaar 2015 is volgens de lokale **zomertijd** bepaald hoe laat de zon in de Australische stad Sidney opkomt1). De 365 meetpunten zijn in een assenstelsel getekend. Ze liggen bij benadering op een sinusoïde. In figuur 1 is deze sinusoïde getekend; een deel daarvan is gestippeld. Onder het gestippelde deel is de grafiek getekend volgens de tijdstippen van zonsopkomst volgens de **wintertijd**. De zonsopkomst volgens de wintertijd is 1 uur eerder dan volgens de zomertijd.  Afbeelding met diagram, lijn, Perceel, helling  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 1 Zonsopkomst in Sydney** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Het laagste punt van de grafiek van de **zomertijd** is (341; 5,62). Dit betekent dus dat de zon op dagnummer 341 volgens de zomertijd het vroegst opkomt. Dat is op tijdstip 5,62 (dus 5 uur en 37 min). Het hoogste punt van het gestippelde deel van de grafiek van de zomertijd bevindt zich op hoogte 8,00.  De grafiek van de **wintertijd** is te benaderen met een formule van de vorm:  , met  Hierin is het tijdstip van zonsopkomst en het dagnummer met op 1 januari.  Door gebruik te maken van de grafiek van de **zomertijd** kunnen mogelijke waarden voor , en worden berekend. |
| 4p | **4** | Bereken mogelijke waarden voor , en van . Geef je eindantwoorden in twee decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Voor een plaats in Nederland zijn op dezelfde manier als voor Sydney volgens de lokale zomertijd de tijdstippen van zonsopkomst bepaald. Ook zijn de tijdstippen van zonsondergang volgens de zomertijd bepaald. De grafieken waarop de meetpunten liggen, zijn in figuur 2 weergegeven.  Afbeelding met lijn, schets, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 2 Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland**  Bij de grafiek van de zonsopkomst hoort de formule:  , met  en bij de grafiek van de zonsondergang hoort de formule:  , met  Hierin is het tijdstip van zonsopkomst en het tijdstip van zonsondergang. Opnieuw is het dagnummer met op 1 januari. Voor kunnen dus alleen gehele waarden worden ingevuld. Voor elke dag kan de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang worden bepaald.  De langste dag is de dag waarop deze tijd zo groot mogelijk is. |
| 4p | **5** | Bereken de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang op de langste dag. Geef je eindantwoord in een geheel aantal uren en minuten. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Door het snijpunt*** |
|  |  | De functie wordt gegeven door **figuur**  .  De grafiek van snijdt de -as in de punten  (-6, 0), (0, 0) en (2, 0).  Het punt is het midden van lijnstuk .  Het punt ligt recht boven op de grafiek  van . Zie de figuur.  De raaklijn aan de grafiek van in gaat door . |
| 7p | **6** | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingBewijs dit. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Borstcrawl*** |
|  |  | Bij het zwemmen van de borstcrawl is er een verband **foto**  Afbeelding met sport, buitenshuis, zwemmen, grond  Automatisch gegenereerde beschrijvingtussen de handkracht waarmee de handen van de  zwemmer tegen het water duwen en de zwemsnelheid.  Zie foto en figuur 1.  Het verband tussen de handkracht en de  zwemsnelheid kan worden benaderd door de formule:  Afbeelding met schets, tekening, Menselijk gezicht, kunst  Automatisch gegenereerde beschrijvingHierin geldt: **figuur 1**   * is de handkracht in newton (N); * is de zwemsnelheid in meters per seconde (m/s); * is de oppervlakte van het vooraanzicht van de   zwemmer in m2 gedurende een zwemslag;  wordt frontaal oppervlak genoemd;   * is een positieve constante die afhankelijk is van de   zwemtechniek van de zwemmer.  Tijdens een zwemwedstrijd over 100 m zwemt Ian een  persoonlijk record. Tijdens elke zwemslag is zijn  handkracht 105 N en zijn frontaal oppervlak is 0,2 m2.  Zijn waarde van is 0,35.  Samy wil bij een toekomstige zwemwedstrijd over  100 m 0,5 seconden sneller zwemmen dan de snelste  tijd van Ian. Om dit te bereiken, gaat hij extra op  handkracht trainen. Het frontaal oppervlak van Samy  is 0,21 m2. Zijn waarde van is 0,33. In dit model nemen  we aan dat Samy’s waarden voor en gelijk blijven.  Verder nemen we aan dat beide zwemmers met constante  snelheid zwemmen. |
| 6p | **7** | Bereken de handkracht die Samy nodig heeft om 0,5 seconden sneller te zwemmen dan de snelste tijd van Ian. Geef je eindantwoord als geheel getal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Van twee zwemmers is 10 keer de handkracht **figuur 2**  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel, tekst  Automatisch gegenereerde beschrijvinggemeten bij verschillende snelheden. De  techniek van de ene zwemmer is beter dan  die van de andere zwemmer. Het frontaal  oppervlak tijdens een zwemslag is voor beide  zwemmers 0,2 m2.  In figuur 2 zijn de meetresultaten weergegeven  in een assenstelsel, waarbij is uitgezet  tegen . Voor beide zwemmers is een lijn  getekend die de meetresultaten benadert.  Bij elke lijn hoort een andere constante  waarde van , passend bij de zwemtechniek  van de zwemmer. Figuur 2 staat ook op de  uitwerkbijlage. |
| 3p | **8** | Bereken met behulp van figuur 2 op de uitwerkbijlage de waarde van van de zwemmer met de betere techniek. Geef hierbij aan welke lijn je hebt gebruikt en licht deze keuze toe. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Twee logaritmische functies*** |
|  |  | Voor wordt de functie gegeven door .  Voor wordt de functie gegeven door .  De grafieken van en snijden elkaar in het punt . Zie figuur 1.  Afbeelding met schets, lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 1** |
| 6p | **9** | Bereken exact de oplossing van de ongelijkheid . |

Afbeelding met lijn, diagram

Automatisch gegenereerde beschrijving

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De grafiek van ontstaat uit de grafiek van door een serie transformaties. Hiervoor zijn verschillende mogelijkheden. |
| 6p | **10** | Geef één zo’n serie transformaties en geef daarbij aan in welke volgorde ze worden toegepast. |
|  |  |  |
|  |  | De grafiek van snijdt de -as in het punt en snijdt de -as in het punt . De lijn gaat door en . Lijn snijdt de grafiek van in het punt . Zie figuur 2.  Afbeelding met lijn, schets, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 2** |
| 6p | **11** | Bereken de coördinaten van . Geef de coördinaten in je eindantwoord in twee decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Op de grafiek van wordt een **figuur 3**  willekeurig punt gekozen. Punt ,  met een -coördinaat die 7 keer zo  groot is als de -coördinaat van ,  ligt ook op de grafiek van .  In figuur 3 is de grafiek van  weergegeven met een mogelijke  positie van en van .  In en kan met behulp van de  grafische rekenmachine de helling  worden bepaald.  Voor elke keuze van is de uitkomst van  de breuk hetzelfde. |
| 3p | **12** | Bereken deze uitkomst. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |

Afbeelding met diagram, schets, cirkel, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Rondom exponentiële grafieken*** |
|  |  | De functie wordt gegeven door . **figuur 1**  Afbeelding met lijn, diagram, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie wordt gegeven door .  De grafieken van en snijden elkaar in de  punten (0, 1) en (3, 8).  In figuur 1 zijn de grafieken van en en de  punten en weergegeven.  De punten en zijn de enige snijpunten van  de grafieken van en . |
| 3p | **13** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
|  |  | In figuur 2 zijn opnieuw de grafieken **figuur 2**  van en met hun snijpunten  en weergegeven. Ook zijn twee  cirkels en weergegeven.  Het lijnstuk is een middellijn van .  Cirkel heeft hetzelfde middelpunt  als . De oppervlakte van is drie  keer zo groot als de oppervlakte van . |
| 5p | **14** | Stel op exacte wijze een vergelijking op van cirkel . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Vuurtorens*** |
|  |  | In figuur 1 is een rechte kustlijn weergegeven die van west naar oost loopt. Op deze kustlijn staat in punt een vuurtoren. In punt bevindt zich een schip op 9 km van de kustlijn. Het schip vaart evenwijdig aan de kustlijn. De horizontale afstand tussen en is 20 km. Het licht van de vuurtoren is zichtbaar binnen een straal van 11 km rondom de vuurtoren. Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.  Afbeelding met diagram, lijn, schermopname, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 1**  In positie is het licht van de vuurtoren nog niet zichtbaar voor de kapitein van het schip. |
| 5p | **15** | Bereken na hoeveel kilometer varen het licht van de vuurtoren zichtbaar wordt. Geef je eindantwoord als geheel getal. |
|  |  |  |
|  |  | In een andere situatie staan twee vuurtorens en met een onderlinge afstand van 14 km op een rechte kustlijn. De kustlijn loopt van west naar oost. De afstand van een schip tot de kustlijn wordt tegenwoordig met moderne navigatieapparatuur bepaald. Er is ook een methode zonder deze apparatuur, die in het verleden werd gehanteerd. Hierbij wordt het licht van de twee vuurtorens gebruikt. Vanaf het schip worden de hoeken gemeten waaronder het licht van de vuurtorens ten opzichte van de noordrichting wordt gezien. Vanaf een schip op positie is deze hoek voor vuurtoren 52° en voor vuurtoren 65°. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel, tekst  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 2**  Op basis van de twee gemeten hoeken en de onderlinge afstand van de vuurtorens, kan de afstand van het schip tot de kustlijn worden berekend. |
| 4p | **16** | Bereken deze afstand in km. Geef je eindantwoord in één decimaal. |

**Wiskunde B** **2024-II**

**Uitwerkbijlage.**

**NAAM: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

Afbeelding met lijn, diagram, Perceel, tekst

Automatisch gegenereerde beschrijving**vraag 8**

**vraag 15**

Afbeelding met diagram, lijn, schermopname, tekst

Automatisch gegenereerde beschrijving

**vraag 16**

Afbeelding met lijn, diagram, Perceel

Automatisch gegenereerde beschrijving

**Wiskunde B** **2024-II**

**Uitwerkingen. (N=1,4)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Wortelgrafiek en parabool*** |  |
| **1** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft randpunt: (-3, 0) | 2 |
|  | * top: (-3, 0), dus ze zijn gelijk | 2 |
| **2** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * en | 1 |
|  | * geeft ofwel | 2 |
|  | * afstand | 1 |
| **3** | **maximumscore 5** |  |
|  | * en | 3 |
|  | * : richtingscoëfficiënt is -6 | 1 |
|  | * , dus en staan loodrecht op elkaar | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Zonsopkomst en zonsondergang*** |  |
| **4** | **maximumscore 4** |  |
|  | * en dus | 2 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **5** | **maximumscore 2** |  |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe het maximum van met de GR berekend kan worden | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * langste dag is 16,77 uur ofwel 16 uur en 46 minuten | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Door het snijpunt*** |  |
| **6** | **maximumscore 7** |  |
|  | * (-3, 0) en (-3, | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * en | 2 |
|  | * met | 1 |
|  | * geeft : de raaklijn gaat door | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Borstcrawl*** |  |
| **7** | **maximumscore 6** |  |
|  | * Ian: | 1 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden: m/s | 2 |
|  | * Tijd Ian over de 100 m: s | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | * Tijd Samy over de 100 m: 57,2…s, dus m/s | 1 |
|  | * N | 1 |
| **8** | **maximumscore 3** |  |
|  | * de bovenste lijn geeft de zwemmer aan met de betere techniek: bij elke handkracht is de snelheid hoger | 1 |
|  | * deze lijn gaat door (60, 1.8) | 1 |
|  | * oplossen geeft | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee logaritmische functies*** |  |
| **9** | **maximumscore 6** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 2 |
|  | * geeft | 2 |
|  | * de oplossing van : | 1 |
| **10** | **maximumscore 4** |  |
|  | * spiegeling in de -as: | 2 |
|  | * verschuiving van 10 naar links: | 1 |
|  | * verschuiving van 2 omhoog: | 1 |
| **11** | **maximumscore 6** |  |
|  | * dus (0, 1) | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * ofwel dus (90, 0) | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe de vergelijking opgelost kan worden | 1 |
|  | * en | 1 |
| **12** | **maximumscore 3** |  |
|  | * en | 2 |
|  | * de uitkomst: 0,14 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Rondom exponentiële grafieken*** |  |
| **13** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * en | 1 |
| **14** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * als de oppervlakte 3x zo groot is, dan is de straal x zo groot | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Vuurtorens*** |  |
| **15** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 2 |
|  | * geeft ofwel | 2 |
|  | * zichtbaar na km varen | 1 |
| **16** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden | 1 |
|  | * antwoord: km | 1 |