**Examen HAVO**

**2025**

tijdvak 1

dinsdag 20 mei

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Een parabool*** |
|  |  | De functie $f$ wordt gegeven door **figuur 1**$f\left(x\right)=2x^{2}+3x-4$.De lijn $l$ met vergelijking $y=2x-1$ snijdt degrafiek van $f$ inde punten $A$ en $B$.Zie figuur 1. |
| 4p | **1** | Bereken exact de coördinaten van $A$ en $B$. |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijving |
|  |  | Het punt $P$ ligt op de grafiek van $f$.De raaklijn $k$ aan de grafiek van $f$ in het punt $P$ staatloodrecht op lijn $l$. |
| 3p | **2** | Bereken exact de $x$-coördinaat van $P$. |
|  |  |  |
|  |  | De grafiek van $f$ wordt eerst vermenigvuldigd met-1 ten opzichte van de $x$-as en daarna vermenigvuldigdmet -1 ten opzichte van de $y$-as. Zo ontstaat de grafiekvan de functie $g$. |
| 3p | **3** | Onderzoek op exacte wijze of het punt $(-\frac{1}{4}, 3)$ op **figuur 2**de grafiek van $g$ ligt. |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met diagram, lijn, Parallel  Automatisch gegenereerde beschrijvingOp de grafiek van $f$ liggen twee punten $C$ en $D$ methetzelfde $y$-coördinaat.De afstand tussen $C$ en $D$ is $2\frac{1}{2}$.Zie figuur 2.Het punt $T$ is de top van de grafiek van $f$. |
| 5p | **4** | Bereken exact de afstand van $T$ tot lijnstuk $CD$. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Watertemperatuur*** |
|  |  | De temperatuur van het zeewater **figuur**Afbeelding met diagram, Perceel, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijvingvlak bij het strand ‘Playa de SanJuan’ bij het Spaanse Alicantevarieert door het jaar heen. Zie defiguur.Om deze figuur te kunnen maken, isruim twintig jaar1) lang op dezelfdeplek dagelijks de watertemperatuurgemeten. Daarna is van elke dag inhet jaar de gemiddelde watertemperatuur berekend. Dit geeft365 punten in een assenstelsel. Doordeze punten kan bij benadering eensinusoïde worden getekend. Dezesinusoïde staat in de figuur. |
|  |  |  |
| noot: | We gaan er in deze opgave van uit dat elk jaar 365 dagen heeft |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Bij de sinusoïde past een formule van de volgende vorm:$W=d+a\sin((b(t-c)))$ (formule 1)Hierin is $W$ de watertemperatuur in °C en $t$ het dagnummer, met $t=0$ op 1 januari. De minimale watertemperatuur is 14°C en deze wordt op 13 februari bereikt ($t=43$). De maximale watertemperatuur is 26°C en deze wordt op 15 augustus ($t=226$) bereikt. |
| 4p | **5** | Bereken mogelijke waarden van $a$, $b$, $c$ en $d$. Geef $a$, $c$ en $d$ als gehele getallen en $b$ in vijf decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Iemand beschrijft de temperatuur van het zeewater in het Nederlandse Bergen aan Zee met de volgende formule:$Z=12+6\sin((0,0172\left(t-150\right)))$ (formule 2)Hierin is $Z$ de watertemperatuur in °C en $t$ het dagnummer, met $t=0$ op 1 januari.Bij het zwemonderdeel van een triatlon zijn deelnemers verplicht een wetsuit te dragen als de watertemperatuur lager dan 16°C is. Stel dat in Bergen aan Zee een triatlon wordt georganiseerd. Je kunt dan berekenen wat volgens de formule de eerste dag van het jaar is waarop deelnemers aan deze triatlon bij het zwemonderdeel géén wetsuit meer hoeven te dragen. |
| 4p | **6** | Bereken met formule 2 het dagnummer van die dag. |

|  |  |
| --- | --- |
|   | ***Drie punten op een grafiek*** |
|  |  | De functie $f$ wordt gegeven door $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{6x-2}}$.De grafiek van $f$ heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y=0$. Dit kun je berekenen met behulp van het functievoorschrift van $f$. |
| 2p | **7** | Geef deze beredenering. **figuur 1 figuur 2**Afbeelding met lijn, diagram, Parallel, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingHet geven van een getallen-voorbeeld of een verwijzingnaar een grafiek is niet voldoende. |
|  |  |  |
|  |  | Het punt $P$ ligt op de grafiek van $f$.De $y$-coördinaat van $P$ is 2.Zie figuur 1. |
| 3p | **8** | Bereken exact de $x$-coördinaat van $P$. |
|  |  |  |
|  |  | Het punt $Q(\frac{1}{2}, 1)$ ligt op de grafiekvan $f$. De lijn $l$ is de raaklijn aan degrafiek van $f$ in $Q$. Lijn $l$ snijdt de$x$-as in het punt $A $en de $y$-as in het punt $B$. Zie figuur 2. |
| 7p | **9** | Bereken exact de oppervlakte van driehoek $OAB$. |
|  |  |  |
|  |  | Op de grafiek van $f$ ligt één punt $R$ waarvoor geldt dat de $y$-coördinaat gelijk is aan het kwadraat van de $x$-coördinaat. |
| 3p | **10** | Bereken de $x$-coördinaat van $R$. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Een cirkel met rakende en snijdende lijnen*** |
|  |  | De cirkel $c$ heeft vergelijking **figuur 1**$\left(x-4\right)^{2}+\left(y-4\right)^{2}=16$.Afbeelding met lijn, diagram, cirkel, origami  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe lijn $j$ is de verticale lijn door het middelpuntvan $c$.De lijn $k$ heeft vergelijking $y=-\frac{2}{3}x+8$.Het punt $S$ is het snijpunt van lijn *k* en lijn *j*.De lijn $l$ heeft vergelijking $y=8$.De lijn $m$ gaat door $O$ en $S$ en snijdt lijn $l$ inhet punt $Q$. Zie figuur 1.De $x$-coördinaat van $Q$ is 6. |
| 5p | **11** | Bewijs dat de $x$-coördinaat van $Q$ inderdaad gelijk is aan 6. |
|  |  |  |
|  |  | Het punt $P(12, 0)$ is het snijpunt van $k$ met **figuur 2** de $x$-as.De lijn $n$ is de lijn door $P$ en $Q$.Zie figuur 2. |
| 5p | **12** | Afbeelding met lijn, diagram, origami  Automatisch gegenereerde beschrijvingBewijs dat lijn $n$ cirkel $c$ raakt. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***De veldleeuwerik*** |
|  |  | Afbeelding met vogel, schets, zangvogel, tekening  Automatisch gegenereerde beschrijvingHet aantal veldleeuweriken in Nederland wordt jaarlijksbijgehouden. In de figuur is voor elk jaar in de periode1990-2014 met een stip het percentage veldleeuwerikenaangeven als percentage van het aantal in 1990.Bij 1990 is dus een stip op hoogte 100 getekend. Indeze figuur is bijvoorbeeld af te lezen dat in 2005 hetaantal veldleeuweriken 40% van het aantalAfbeelding met tekst, lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingveldleeuweriken in 1990 bedroeg.Het verloop van het percentageveldleeuweriken kan met een exponentieelverband worden benaderd. In de figuur is degrafiek bij dit exponentiële verband getekend.Hierbij wordt uitgegaan van een jaarlijkseafname van het percentage veldleeuwerikenmet 5%. Een vogelbeschermer beweert datvolgens dit model in het jaar 2040 minderdan 4% over zal zijn van het aantalveldleeuweriken in 1990. |
| 3p | **13** | Onderzoek of de uitspraak van de vogelbeschermer juist is. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De metingen voor de periode 1990-2014 kunnen ook worden benaderd met een kwadratisch verband waarvan de grafiek door het punt $(0,100)$ gaat. Een formule bij dit verband is dus van de vorm $P=at^{2}+bt+100$.Hierin is $P$ het percentage veldleeuweriken ten opzichte van 1990 en $t$ het aantal jaren na 1990.Andere punten op de grafiek van dit kwadratisch verband zijn $(10; 58,66)$ en$(20; 36,52)$. Je kunt hieruit afleiden dat $a=0,10$ en $b=-5,09$. Deze twee waarden zijn afgerond, en kunnen nauwkeuriger worden berekend. |
| 4p | **14** | Bereken algebraïsch de waarden van $a$ en $b$ in drie decimalen. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Dezelfde y-coördinaat*** |
|  |  | Afbeelding met schets, lijn, ontwerp, zwart-wit  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie $f$ wordt gegeven door $f\left(x\right)=8-2^{3x^{2}-6x}$Het punt $S$ is het snijpunt van de grafiek van $f$ met de $y$-as.Het punt $A$ is een ander punt op de grafiek van $f$ en heeftdezelfde $y$-coördinaat als $S$. Zie de figuur. |
| 4p | **15** | Bereken exact de $x$-coördinaat van $A$. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Driehoeken*** |
|  |  | Afbeelding met lijn, driehoek  Automatisch gegenereerde beschrijvingGegeven is de driehoek $ABC$ met $∠C=25°$ en$BC=7$. Het punt $D$ ligt op zijde $BC$ zó dat $BD=1$en $∠CAD=90°$. Zie de figuur. |
| 6p | **16** | Bereken $∠BAD$ in graden. Geef je eindantwoord als eengeheel getal. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Waterleiding*** |
|  |  | Afbeelding met buitenshuis, hemel, weg, zwart-wit  Automatisch gegenereerde beschrijvingEen waterleiding is van een bepaald materiaalgemaakt. De sterkte van dit materiaal, demateriaalsterkte, neemt door de druk van hetwater in de waterleiding in de loop van de tijd af.Bij het ontwerp van een waterleiding rekent mendaarom met de materiaalsterkte die een leidingna 50 jaar gebruik nog heeft. Deze materiaalsterktewordt aangegeven met $S\_{50}$. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Voor de materiaalsterkte van een bepaalde kunststof waterleiding geldt de volgende formule:$S\_{t}=+12,9$ met $t\geq 1$Hierin is:* $t$ het aantal jaar dat de leiding in gebruik is;
* $S\_{t}$ de materiaalsterkte na $t$ jaar gebruik in N/mm2.

De eerste onderhoudsinspectie vindt plaats zodra de materiaalsterkte is afgenomen tot een waarde die 20% hoger ligt dan $S\_{50}$. |
| 4p | **17** | Bereken algebraïsch na hoeveel jaar gebruik de eerste onderhoudsinspectie plaatsvindt. Geef je eindantwoord in één decimaal. |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met cirkel, tekst, schermopname, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe wand van een waterleiding moet dik **figuur**genoeg zijn om tegen de maximalewaterdruk in de waterleiding bestand te zijn.In de figuur is een dwarsdoorsnede van eencilindervormige waterleiding weergegeven,waarin aangegeven is wat met buitendiameter,binnendiameter en wanddikte bedoeld wordt.De minimale wanddikte van een bepaaldecilindervormige waterleiding kan berekendworden met de volgende formule:$$w=\frac{P∙D}{14+P}$$Hierin is:* $w$ de minimale wanddikte in mm;
* $D$ de buitendiameter in mm;
* $P$ de maximale waterdruk in N/mm2.

Voor deze waterleiding gelden bij eennieuwbouwproject de volgende ontwerpeisen:* De maximale waterdruk is 1,75 N/mm2.
* De binnendiameter is 312,9 mm.
 |
| 4p | **18** | Bereken in dit geval de minimale wanddikte w van de waterleiding in hele millimeters. |

**Wiskunde B** **2025-I**

**Uitwerkingen. (N=1,3)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een parabool*** |  |
| **1** | **maximumscore 4** |  |
|  | * $2x^{2}+3x-4=2x-1$ geeft $2x^{2}+x-3=0$
 | 1 |
|  | * $\left(2x+3\right)\left(x-1\right)=0$
 | 1 |
|  | * $x=-1\frac{1}{2}∨x=1$
 | 1 |
|  | * $A(-1\frac{1}{2}, -4)$ en $B(1, 1)$
 | 1 |
| **2** | **maximumscore 3** |  |
|  | * $f^{'}\left(x\right)=-\frac{1}{2}$ geeft $4x+3=-\frac{1}{2}$
 | 2 |
|  | * $x\_{P}=-\frac{7}{8}$
 | 1 |
| **3** | **maximumscore 3** |  |
|  | * vermenigvuldiging t.o.v. $x$-as met -1: $y=-2x^{2}-3x+4$
 | 1 |
|  | * vermenigvuldiging t.o.v. $y$-as met -1: $g\left(x\right)=-2∙\left(-x\right)^{2}-3∙-x+4$

 $=-2x^{2}+3x+4$ | 1 |
|  | * $g(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+4=3\frac{1}{8}$, dus ligt niet op de grafiek van $g$.
 | 1 |
| **4** | **maximumscore 5** |  |
|  | * $f^{'}\left(x\right)=0$ geeft $x\_{T}=-\frac{3}{4}$
 | 1 |
|  | * $y\_{T}=1\frac{1}{8}-2\frac{1}{4}-4=-5\frac{1}{8}$
 | 1 |
|  | * vanwege symmetrie: $x\_{C}=-\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}=-2$
 | 1 |
|  | * $y\_{C}=f\left(-2\right)=-2$ en dus is de gevraagde afstand $-2--5\frac{1}{8}=3\frac{1}{8}$
 | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Watertemperatuur*** |  |
| **5** | **maximumscore 4** |  |
|  | * $d=\frac{26+14}{2}=20$ en $a=26-20=6$
 | 2 |
|  | * periode: 365 dagen, dus $b=\frac{2π}{365}≈0,01721$
 | 1 |
|  | * stijgend door de evenwichtsstand: $c=226-\frac{1}{4}∙365≈135$
 | 1 |
| **6** | **maximumscore 4** |  |
|  | * $12+6\sin(\left(0,0172\left(t-150\right)\right)>16)$
 | 1 |
|  | * invoer: $y\_{1}=12+6\sin((0,0172\left(x-150\right)))$ en $y\_{2}=16$
 | 1 |
|  | * intersect: $x=192,4…$
 | 1 |
|  | * Op $t=193$ voor het eerst zonder wetsuit
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Drie punten op een grafiek*** |  |
| **7** | **maximumscore 2** |  |
|  | * voor hele grote waarden van $x$ wordt $y=\sqrt{6x-2}$ ook heel groot
 | 1 |
|  | * als de noemer heel groot wordt, nadert de breuk naar 0
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **8** | **maximumscore 3** |  |
|  | * $\frac{1}{\sqrt{6x-2}}=2$ geeft $\sqrt{6x-2}=\frac{1}{2}$
 | 1 |
|  | * $6x-2=\frac{1}{4}$
 | 1 |
|  | * $x\_{P}=\frac{3}{8}$
 | 1 |
| **9** | **maximumscore 7** |  |
|  | * $f\left(x\right)=\left(6x-2\right)^{-\frac{1}{2}}$
 | 1 |
|  | * $f^{'}\left(x\right)=-\frac{1}{2}∙\left(6x-2\right)^{-1\frac{1}{2}}∙6=-\frac{3}{\left(6x-2\right)^{1\frac{1}{2}}}$
 | 2 |
|  | * $f^{'}(\frac{1}{2})=-3$
 | 1 |
|  | * $y=-3x+b$ gaat door $Q$, geeft $b=1+3∙\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$
 | 1 |
|  | * $y=0$ geeft $x\_{A}=\frac{2\frac{1}{2}}{3}=\frac{5}{6}$
 | 1 |
|  | * $O\_{OAB}=\frac{1}{2}∙\frac{5}{6}∙2\frac{1}{2}=\frac{25}{24}$
 | 1 |
| **10** | **maximumscore 3** |  |
|  | * $R(p, p^{2})$ ligt op $f$, dus $\frac{1}{\sqrt{6p-2}}=p^{2}$
 | 1 |
|  | * invoer: $y\_{1}=\frac{1}{\sqrt{6x-2}}$ en $y\_{2}=x^{2}$ intersect: $x\_{R}≈0,78$
 | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een cirkel met rakende en snijdende lijnen*** |  |
| **11** | **maximumscore 5** |  |
|  | * $M(4, 4)$ en $j:x=4$
 | 1 |
|  | * $y\_{S}=-\frac{2}{3}∙4+8=5\frac{1}{3}$
 | 1 |
|  | * $m:y=1\frac{1}{3}x$
 | 1 |
|  | * $1\frac{1}{3}x=8$ geeft $x\_{Q}=6$
 | 2 |
| **12** | **maximumscore 5** |  |
|  | * $n:y=-1\frac{1}{3}x+16$
 | 2 |
|  | * $\left(x-4\right)^{2}+(-1\frac{1}{3}x+12)^{2}=16$
 | 1 |
|  | * $2\frac{7}{9}x^{2}-40x+144=0$
 | 1 |
|  | * $D=1600-4∙2\frac{7}{9}∙144=0$, dus er is maar één gemeenschappelijk punt
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***De veldleeuwerik*** |  |
| **13** | **maximumscore 3** |  |
|  | * $V=100∙0,95^{t}$ met $t=0$ in 1990
 | 1 |
|  | * in 2040: $100∙0,95^{50}=7,69…$
 | 1 |
|  | * de uitspraak van de vogelbeschermer is niet juist
 | 1 |
| **14** | **maximumscore 4** |  |
|  | * $100a+10b+100=58,66$ en $400a+20b+100=36,52$
 | 1 |
|  | * $20b=-82,68-200a$geeft $200a-82,68+100=36,52$
 | 1 |
|  | * $200a=19,2$ geeft $a=0,096$
 | 1 |
|  | * $b=-5,094$
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Dezelfde y-coördinaat*** |  |
| **15** | **maximumscore 4** |  |
|  | * $y\_{S}=f\left(0\right)=8-2^{0}=7$
 | 1 |
|  | * $8-2^{3x^{2}-6x}=7$ geeft $2^{3x^{2}-6x}=1$
 | 1 |
|  | * $3x^{2}-6x=3x\left(x-2\right)=0$
 | 1 |
|  | * $x\_{S}=0∨x\_{A}=2$
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Driehoeken*** |  |
| **16** | **maximumscore 6** |  |
|  | * $\cos((25°))=\frac{AC}{CD}=\frac{AC}{6}$, dus $AC=6\cos((25°))=5,437…$
 | 1 |
|  | * $∠ADC=65°$ en dus $∠ADB=180°-65°=115°$
 | 1 |
|  | * $AB^{2}=5,437…^{2}+7^{2}-2∙5,437…∙7∙\cos(\left(25°\right))=9,573…$
 | 1 |
|  | * $AB=\sqrt{9,537…}=3,094…$
 | 1 |
|  | * $\frac{1}{\sin(\left(∠BAD\right))}=\frac{3,094…}{\sin(\left(115°\right))}$ geeft $\sin((∠BAD))=0,292…$
 | 1 |
|  | * $∠BAD≈17°$
 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Waterleiding*** |  |
| **17** | **maximumscore 4** |  |
|  | * $1,20∙S\_{50}=1,20∙8,30…=9,963…$
 | 2 |
|  | * $+12,9=9,963…$ geeft $=-2,936…$
 | 1 |
|  | * $t=0,427^{-2,936…}≈12,2$
 | 1 |
| **18** | **maximumscore 4** |  |
|  | * $w=\frac{1,75∙(312,9+2w)}{14+1,75}$
 | 2 |
|  | * invoer: $y\_{1}=\frac{1,75∙(312,9+2w)}{15,75}$ en $y\_{2}=x$
 | 1 |
|  | * intersect: $x=44,7$, dus de minimale wanddikte is 45 mm
 | 1 |