**Examen HAVO**

**2025**

tijdvak 2

donderdag 19 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Raken aan de -as*** | |
|  |  | De functie wordt gegeven door .  De grafiek van heeft twee toppen.  De rechter top ligt op de -as. **figuur** |
| 5p | **1** | Afbeelding met diagram, lijn, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingBewijs dit. |
|  |  |  |
|  |  | Verder worden de volgende twee raaklijnen aan de grafiek  van gegeven:   * lijn met vergelijking ; * lijn met vergelijking .   Lijnen en snijden elkaar in punt . De cirkel heeft  middelpunt en raakt de -as. Zie de figuur. |
| 5p | **2** | Stel op exacte wijze een vergelijking op van cirkel . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Sloeproeien*** | |
|  |  | Afbeelding met water, buitenshuis, Varen, meer  Automatisch gegenereerde beschrijvingBij een wedstrijd sloeproeien wordt er geroeid in **foto**  houten sloepen. Zie de foto.  Bij zo’n wedstrijd kunnen de vorm en de grootte  van de sloepen en het aantal roeiers per sloep  verschillen. Hiermee wordt rekening gehouden bij  het bepalen van de uitslag van de wedstrijd.  De sloep waarin het gemiddelde geleverde  vermogen per roeier het grootst is, wint. De  waarde van wordt na afloop van de wedstrijd als volgt berekend:   * Eerst wordt op basis van de tijd die een sloep nodig had om de wedstrijdafstand af te leggen de gemiddelde snelheid van de sloep berekend. * Daarna wordt voor de sloep een waarde berekend die aangeeft hoe makkelijk of moeilijk de sloep door het water glijdt. De waarde van is afhankelijk van de vorm van de sloep en de gemiddelde snelheid van de sloep. Er geldt:   (formule 1)  Hierin zijn en constanten die afhankelijk zijn van de vorm van de sloep en is de gemiddelde snelheid van de sloep in m/s.   * Ten slotte wordt het gemiddelde geleverde vermogen per roeier in watt berekend:   (formule 2)  Hierin is het aantal roeiers in de sloep, de waarde die volgt uit formule 1 en de gemiddelde snelheid van de sloep in m/s. |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Bij een wedstrijd hebben de roeiers in sloep 1 en sloep 2 een afstand van 17,3 km geroeid. Na afloop van de wedstrijd wordt voor beide sloepen de waarde van berekend. De sloep met de hoogste waarde wint. Voor sloep 1 is de waarde van al berekend. Zie de tabel.  tabel   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **sloep** |  |  |  | **(m/s)** | **P (watt)** | | 1 | 8 | 21,36 | 0,05 | 2,62 | 73,1 | | 2 | 10 | 23,04 | 0,08 | … | … |   Sloep 2 heeft de afstand van 17,3 km afgelegd in een tijd van 1 uur, 53 minuten en 58 seconden. |
| 4p | **3** | Onderzoek welk van de twee sloepen de wedstrijd heeft gewonnen. |
|  |  |  |
|  |  | Stel dat een van de acht roeiers in sloep 1 niet mee roeit maar alleen stuurt en dat voor de overige zeven roeiers het gemiddelde geleverde vermogen P per roeier 73,1 watt blijft. Volgens de formules zou dan de gemiddelde snelheid van deze sloep - met nu dus zeven roeiers - lager zijn dan de 2,62 m/s in de tabel. |
| 3p | **4** | Bereken de gemiddelde snelheid van sloep 1 in m/s in deze situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | De gemiddelde snelheid van sloep 1 ligt ook tijdens andere wedstrijden tussen 2 en 3 m/s. Voor de waarde van sloep 1 geldt:  (formule 3)  Met formule 3 kan voor sloep 1 beredeneerd worden dat hoe groter de waarde van is, hoe groter de waarde van is. |
| 3p | **5** | Geef deze redenering. Het geven van een getallenvoorbeeld of een verwijzing naar een grafiek is niet voldoende. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een exponentiële functie*** | |
|  |  | De functie wordt gegeven door  Op de grafiek van ligt punt met -coördinaat 4. De -coördinaat van kan geschreven worden in de vorm . |
| 3p | **6** | Bereken exact mogelijke waarden van en . |
|  |  | **figuur** |
|  |  | Afbeelding met diagram, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijvingOp de grafiek van ligt het punt zodanig dat de  rechterbovenhoek is van een vierkant waarvan twee  zijden samenvallen met de assen.  De oorsprong (0, 0) is de linkeronderhoek van dit  vierkant. Zie de figuur. |
| 3p | **7** | Bereken de oppervlakte van het vierkant.  Geef je eindantwoord in één decimaal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De grafiek van ontstaat door op de standaardgrafiek met formule de volgende twee transformaties toe te passen:   * eerst een horizontale verschuiving 2 naar links; * dan een vermenigvuldiging ten opzichte van de -as met -1. |
| 3p | **8** | Bewijs dat de grafiek van inderdaad ontstaat door op deze standaardgrafiek de twee genoemde transformaties toe te passen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een wortelfunctie*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie wordt gegeven door **figuur 1**  .  De grafiek van heeft randpunt en snijdt de -as in  het punt .  Verder is gegeven het punt . Zie figuur 1.  Er geldt: . |
| 6p | **9** | Toon dit op algebraïsche wijze aan. |
|  |  |  |
|  |  | De grafiek van snijdt de -as in het punt . De lijn  gaat door de punten en en de lijn raakt de **figuur 2**  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvinggrafiek van in . Zie figuur 2.  De hoek tussen en is net geen 90°. |
| 8p | **10** | Bereken op algebraïsche wijze de scherpe hoek in  graden tussen en .  Geef je eindantwoord in één decimaal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Zonnepanelen*** | |
|  |  | Afbeelding met tekst, diagram, Perceel, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe hoeveelheid energie die een zonnepaneel **figuur 1**  ontvangt, is afhankelijk van de dag in het jaar  en de hellingshoek van het paneel.  Gedurende een jaar is door een weerstation  elke dag de hoeveelheid ontvangen energie  (in Wh) gemeten. Bij deze metingen is een zo  passend mogelijk model opgesteld. In figuur 1  is de bijbehorende grafiek getekend. Hierbij is  uitgezet tegen de tijd in dagen met  op 1 januari.  De formule die bij het model hoort heeft een  periode van 365 dagen en ziet er als volgt uit: |
| 5p | **11** | Bepaal mogelijke waarden van , , en .  Geef de waarde van in vier decimalen en de  waarden van , en als geheel getal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Afbeelding met Zonne-energie, zonnecel, zonne-energie, zonnepaneel  Automatisch gegenereerde beschrijvingZonnepanelen worden ten opzichte van de grond onder een **foto**  bepaalde hellingshoek geplaatst. Zie de foto.  Om een verband te vinden tussen deze hellingshoek en de  hoeveelheid ontvangen energie, heeft een onderzoeker tien  dezelfde zonnepanelen naast elkaar geplaatst, elk onder een  verschillende hoek .  Vervolgens heeft hij gemeten **figuur 2**  Afbeelding met tekst, lijn, nummer, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvinghoeveel energie elk zonnepaneel  een jaar lang ontvangen heeft.  Deze hoeveelheid per zonnepaneel  heeft hij vergeleken met de  hoeveelheid bij het zonnepaneel  met . De resultaten van zijn  onderzoek zijn weergegeven in  figuur 2.  In figuur 2 is af te lezen dat bij een  hellingshoek van 30 graden de  zogenaamde ‘tiltfactor’ 1,11 is. Dit betekent dat het zonnepaneel met in een jaar tijd 11 procent meer energie heeft ontvangen dan het zonnepaneel met . Het zonnepaneel met heeft de minste energie ontvangen. |
| 3p | **12** | Bereken met behulp van figuur 2 hoeveel procent minder energie dit zonnepaneel heeft ontvangen ten opzichte van de optimale situatie met . Geef je eindantwoord in één decimaal. |
|  |  |  |
|  |  | Het verband tussen de tiltfactor en de hellingshoek in graden kan voor hellingshoeken tussen 0 en 50 graden benaderd worden door een formule van de vorm:  (formule 2)  Hierin zijn en constanten.  We nemen aan dat de grafiek die bij formule 2 hoort de top (30; 1,11) heeft. Op basis van alleen deze top liggen de waarden van en in formule 2 vast. (Verder lezen we dus geen punten af.) |
| 5p | **13** | Bereken op algebraïsche wijze deze waarden van en . Geef je eindantwoorden in vier decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee driehoeken*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingGegeven is driehoek met  en .  Verder is gegeven driehoek met  , en .  Punt is het snijpunt van lijnstuk  en lijnstuk . Zie de figuur.  Zijde is de enige zijde waarvan de  lengte onbekend is. |
| 7p | **14** | Bereken op algebraïsche wijze de lengte  van deze zijde . Geef je eindantwoord  in één decimaal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Punten op een cirkelboog*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie wordt gegeven door **figuur 1**  .  Op de grafiek van ligt een punt met  -coördinaat . De coördinaten van punt  zijn dus ). Tussen oorsprong  en punt is een lijnstuk getekend. Zie figuur 1.  De helling van lijnstuk is . |
| 5p | **15** | Bereken exact de -coördinaat van . |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met diagram, lijn, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe grafiek van valt samen met de bovenste **figuur 2**  helft van een cirkel met middelpunt en  straal 2. In figuur 2 is de grafiek van  nogmaals weergegeven, maar nu met daarop  een ander punt, punt . Bovendien is hierin  het gebied onder de grafiek van én boven  lijnstuk grijs gemaakt.  Verder geldt  Voor de oppervlakte van het grijze gebied geldt:  met in **radialen**.  De positie van punt is zo gekozen dat oppervlakte de helft is van de oppervlakte van de halve cirkel. |
| 5p | **16** | Bereken hoek in **graden**. Geef je eindantwoord als geheel getal. |

**Wiskunde B** **2025-II**

**Uitwerkingen. (N=1,2)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Raken aan de -as*** |  |
| **1** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * en ligt dus op de -as | 1 |
| **2** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Sloeproeien*** |  |
| **3** | **maximumscore 4** |  |
|  | * m/s | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * , dus sloep 2 wint | 1 |
| **4** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * invoer: en intersect | 1 |
|  | * m/s | 1 |
| **5** | **maximumscore 3** |  |
|  | * als toeneemt, neemt ook toe | 1 |
|  | * dan neemt af | 1 |
|  | * en neemt dan weer toe | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een exponentiële functie*** |  |
| **6** | **maximumscore 3** |  |
|  | * uit volgt | 1 |
|  |  | 2 |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden | 1 |
|  | * en de oppervlakte wordt dan | 2 |
| **8** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een wortelfunctie*** |  |
| **9** | **maximumscore 6** |  |
|  | * geeft | 2 |
|  | * (-18, -16) | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * en | 2 |
| **10** | **maximumscore 8** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * uit volgt | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * ° | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Zonnepanelen*** |  |
| **11** | **maximumscore 5** |  |
|  | * en | 3 |
|  | * de grafiek gaat bij stijgend door de evenwichtsstand: | 1 |
|  |  | 1 |
| **12** | **maximumscore 3** |  |
|  | * Tiltfactor bij is 0,76 | 1 |
|  |  | 2 |
| **13** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * uit volgt | 1 |
|  | * door geeft | 1 |
|  | * geeft en | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee driehoeken*** |  |
| **14** | **maximumscore 7** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * (overstaande hoeken) | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * (hoekensom driehoek) | 1 |
|  | * geeft |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Punten op een cirkelboog*** |  |
| **15** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
| **16** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden | 1 |
|  | * rad, en dat is ongeveer 132° | 2 |