Hoofdstuk 13: ***Cirkels***

**V1**

**a** met de *x*-as: met de *y*-as:

  Dus (4, 0) en (0, 3)

**b** 



**c** De snijpunten van  met de coördinaatassen zijn (*a*, 0) en (0, *b*)

**d**  geeft 

**V2**

**a**  **b**  **c** 

**V3**

**a** *k*:  en *l*:   dus loodrecht

**b** *l*:   dus niet loodrecht

**V4**

**a**  gaat door (3, -4) **b**  gaat door *P*(-2, 8)

**c**  en *MAB*(2, 4)



**V5**

**a**  **b** 

**V6**

**a**  gaat door (1, -9), dus 

 ofwel: 

**b** 

**V7**

**a**  **b** 

**V8**

**a**  gaat door *P*(3, -11), dus 

**b** loodlijn:  gaat door *P*(5, 12), dus 



**Vergelijking van een cirkel**

**1**

**a**  als *P* rechts van *M* ligt;  als *P* links van *M* ligt.

**b**  (of )

**c** 

**d** de straal is 4, dus 

**e** 

**2**

**a**

**b** dus

**c** klopt

**3**

**a** *M*(3, 0) en 

**b** Spiegelen in de *y*-as is hetzelfde als een vermenigvuldiging t.o.v. de *y*-as met factor -1: de *x* in de vergelijking vervangen door .

 ofwel 

**c** de straal wordt 2 keer zo groot: 

**4**

**a** . De afstand van (7, 8) tot elk van de assen is kleiner dan de straal, dus er zijn vier cirkels mogelijk.

**b** Stel: *M*(*x*, 0) Stel: *M*(0, *y*)

 en   en 

**5**

**a** *M*(4, -1) en 

**b**  

**6**

**a**  **b** *M*(4, -1) en 



**O7**

**a** volgorde verwisseld

**b**  dus in stap 2 moet op de puntjes -25 staan

**c** op de puntjes tussen haakjes komt 

**d** 

**e** 

**f** 

**7**

**a** **b**

en en

**c**  **d** 

**8**

**a** Vul (0, 0) in: het klopt.

**b** *P*(1, 5):  en *Q*(6, 4): 

uit  volgt 

invullen in de tweede vergelijking:

en

**c**

en

**9**

**a**

De som van twee kwadraten kan niet negatief zijn.

**b**





**U1**

**a** geeft : een cirkel met en straal *r*.

**b** Uit volgt : een cirkel met en straal 7.

**U2** *M*(*x*, *y*)





**Snijpunten van lijn en cirkel**

**10**

**a**  **c** 

**b** (-1, -3) en (1, 3) *ABC*-formule



**11**

**a** 



**b** 

 geeft *S1*(-13, 0) en *S2*(5, 12)

**12**

**a**  **b** 

**O13**

**a**  **b** 

**c**  **d** 



**e** snijpunten: (0, 3) en (4, 1)

**13**

**a** 

 snijpunten: (-2, 6) en (6, 2)

**b** 

 snijpunten: (5, 0) en 

**14** *AB*: 



Er is één gemeenschappelijk punt: (3, 6)

**15**

**a** 



**b** 

**c**  geeft  Dus snijpunt: (1, 2)

**O16**

**a**  **b** 



**c** De vergelijking heeft dus geen oplossingen

**d**  **e** 

twee snijpunten geen snijpunten

**f** 



**16**

**a**  **b** 

Twee snijpunten geen snijpunten

**c**  

**17**

**a**  **b** 





**c**  en 

**18**

**a** *M*(-2, 3)

De loodlijn op *l* door *M*: 



**b** lijn *l* gaat door *M* dus de lijn en de cirkel hebben twee gemeenschappelijke punten

**U3** 



Geen gemeenschappelijke punten, dus discriminant kleiner dan 0:



De discriminant is kleiner dan 0 voor 

**Raaklijnen aan een cirkel**

**19**

**a** 

 Eén oplossing: raakpunt

**b** *R*(5, -1) en *M*(9, 1)

 en het product van de richtingscoëfficiënten van *l* en *MR* is -1

Dus 

**20**

**a** De afstand van punt *M* tot lijn *l* is de kleinste afstand (en dus de loodrechte afstand)

**b** *P* ligt op de cirkel, dus *MP* is gelijk aan de straal. Omdat  ligt *Q* dus in de cirkel.

**c** Als lijn *l* door *Q* gaat zouden er twee snijpunten moeten zijn met de cirkel.

**d** Ja.

**O21**

**a** *M*(6, 0) **b** 

**c** omdat de raaklijn loodrecht staat op de straal van de cirkel naar het raakpunt.

**d**  **e** 

**f** *M*(0, 0) **g** *M*(6, -2)

raaklijn:  raaklijn: 

**21**

**a** *M*(0, 0) **b** *M*(2, -3)

raaklijn:  raaklijn: 

**22**

**a**  **b** loodrecht op *MP*: 

**c** 

**23**

**a**  raaklijn: 

**b** 

 raaklijn: 

**24**

**a** de richtingsvector  komt overeen met  neem 

**b** als  gaat de lijn verticaal.

**c**  **d** De lijn moet een raaklijn worden: 



**e**  en 

**O25**

**a** *c* is een cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 

**b** substitueer:  en 

**c**  **d** 



**e**/**f**  en 

**25**

**a**  **b** 

**c**  Een vergelijking van een lijn door *P* is: 

**26**

**a** 





 en gaat door 

Dus:  en 

**b** 



 en gaat door *P*(-4, 13):

Dus:  en 

**27** loodlijn op *l* door *M*(5, 6): 

**U4**  en , dus 



  en dus is 

De oppervlakte van de cirkel links van *RMQ* is 

De oppervlakte van het gekleurde gebied is 

**U5** het middelpunt van de cirkel moet liggen op de bissectrices van de lijnen  en . Dat zijn:  en 

straal: 2 straal: 5

**Snijdende cirkels**

**28**

**a**/**b**  **c** 

*A*(0, 2) en *B*(3, 5)

**O29**

**a** de bovenste vergelijking – de onderste vergelijking

**b**  geeft 

**c** de lijn snijden met één van de cirkels:



**d** Snijpunten: (4, 4) en (6, -2)

**e**  **f**  **g** 

(2, 1) en (2, -1) (-8, -2) en (2, 8) (1, 2) en (1, 4)

**29**

**a**  **b**  **c** 

(3, -2) en (3, 2)  

 (4, 3) en (-3, -4)

(5, 5) en (-1, 7)

**30**

**a** 



*P*(3, 1)

**b** , dus raaklijn: 

**c** 

 en , dus 

**d** -

**31**  en , dus 

**32**

**a** inwendig:  en uitwendig: 

**b** De straal moet dan op de lijn  liggen

Als  het middelpunt is van de gevraagde cirkel dan moet 



**O33**

**a** 

 *R*(6, 8)

**b**  en , dus 

**c** de straal van *c* is 10 en de straal van *d* is 5 

**d** *M*(9, 12), dus *d*: 

**33** 

 *R*(0, 8)

De middelpunten van *d* liggen op de lijn . De lengte van de richtingsvector is  en de straal van *d* is . Dus *M1*(-4, 2) en *M2*(4, 14)

*d*:  of *d*: 

**34**

**a**  en  **b** 



**c** 

**d**  

**35** *Mc*(3, 0) en straal  

 en 

**36** *M*(0, *p*)



**U6**

**a** 

**b** 

**Afstand tot een cirkel**

**37**

**a** , ja punt *A* ligt op de cirkel.

**b** 

**c** 

 heeft geen oplossingen: dus nul punten gemeenschappelijk

**d** 



**38**

**a** omdat de straal naar het raakpunt (en dus ook *PA*) loodrecht staat op de raaklijn.

**b** 

**c** 

**d**  en dus is 

**39**

**a** : *P* ligt buiten de cirkel.

 en dus 

**b** : *P* ligt binnen de cirkel.

 en dus 

**c** : *P* ligt binnen de cirkel.

 en dus 

**40**

**a**  **b** 

**O41**

**a** *M*(2, 2) en *N*(6, 6) 

**b**  en  **c**  **d** 

**e** *M1*(1, -3) en  *M2*(7, 5) en 

 en  : de cirkels raken elkaar

**f**  

*M*(0, 6) en  *N*(1, 6) en 

*c2* ligt helemaal binnen *c1*: 

**41**

**a** *M1*(-2, 3) en *M2*(5, -3)



**b**  

*M1*(-1, -1) en  *M2*(2, 2) en 

 : de cirkels raken elkaar

**42** 

 is een cirkel met middelpunt *M*(0, 12) en straal 6.

Cirkel *c2* ligt buiten cirkel 1.



**43**

**a**  **b** zie plaatje.

**c** 

**O44**

**a** dat is de loodlijn door *M* op *l*; daarop ligt de kortste afstand.

**b**  **c** 

 **d** 



**44**

**a**  **b**  **c** 

**45** Deze lijnen moeten de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 3 raken!

 moet door (-5, 0) gaan:  of met lijn: 

 heeft slechts één oplossing



**U7** De afstand van  tot *N*(4, 7) is 



**U8** het middelpunt ligt op afstand 5 van (0, 0) en op afstand 7 van (6, 0)

 en 

 en 

**Ingeschreven en omgeschreven cirkel**

**46**

**a**  want 

**b** Er ontstaan twee rechthoekige driehoeken *ARQ* en *BRQ* waarvan de loodlijn *QR* gemeenschappelijk is en de schuine zijden *AQ* en *BQ* ook aan elkaar gelijk zijn.

Met de stelling van Pythagoras volgt dan dat  (*R* is het midden van *AB*).

**47**

**a**

**b** . Middelloodlijn van *AB*: 

 Middelloodlijn van *AC*:  en gaat door (1, 0)



Snijpunt *M*(2, -1)

**c** *M* ligt op de middelloodlijn van *AB*:  en *M* ligt op de middelloodlijn van

*AC*: . Hieruit volgt dat , dus dat *M* op de middelloodlijn van *BC* moet liggen.

**d** 



**O48**

**a** *P*(4, 1) **b**  **c** 

**d**  en  

**e**  **f**  **g** 



*M*(5, 3)

**48**

**a** middelloodlijn van *AB*: 

middelloodlijn van *BC*: , dus  en gaat door (3, 1)



M(2, 0) en straal : 

**b** . Richtingscoëfficiënt is  en gaat door (-1, 1): 

. Richtingscoëfficiënt is  en gaat door : 



**49**

**a** , dus 

**b** , dus  en omdat  is 

**c** De overstaande zijden zijn gelijk en de schuine zijde is gemeenschappelijk. De sinus van de hoeken zijn gelijk, dus de hoeken zijn gelijk.

**50**

**a** *D* ligt op de deellijn van , dus  en *D* ligt op de deellijn van , dus . Hieruit volgt dat  en dus ligt *D* op de deellijn van .

**b** de afstand van *D* tot de zijden is gelijk.

**51**

**a**  en *P*(2, 0)

**b**  is gelijkbenig. De loodlijn uit de tophoek is de bissectrice van de tophoek.

**c** De bissectrice van hoek *C* is .

midden van *PC* is *N*(1, 2)

 ofwel 

*M*(0, )

**d**  

**52**

**a** 

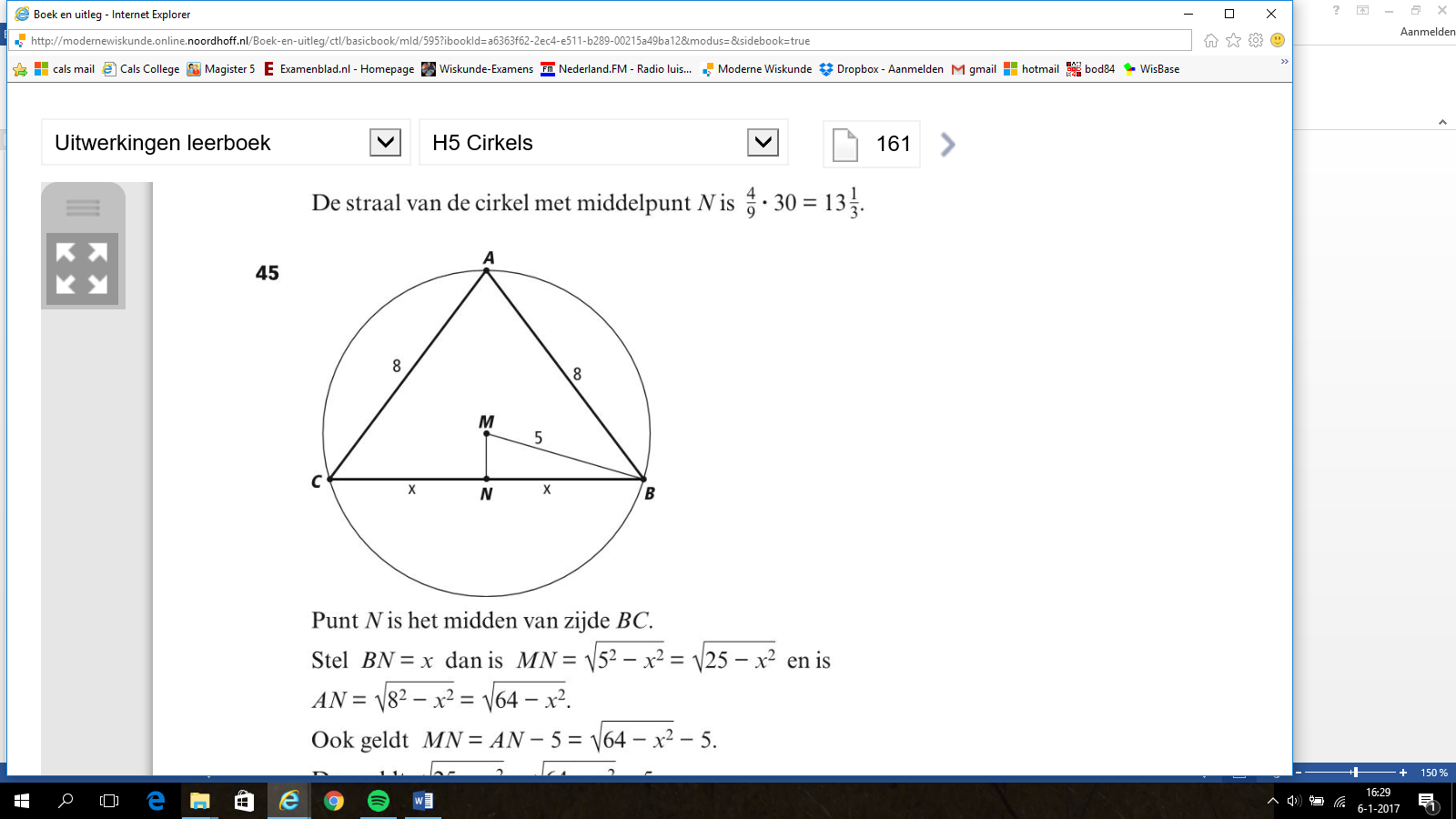
**b** ,  en 

**c** 



**d** 





**53** 



**U9**

**a** 

****

**b**  dus 

 en 

**U10**

**a** 

raaklijn in *A* heeft richtingscoëfficiënt  en gaat door *A*(-3, 4): 

 dus er is één raakpunt

b. De punten *C* en *D* liggen op de lijn .

 De vergrotingsfactor is 

**Gemengde opdrachten**

**54**

**a** de loodlijn op *l* door *M*(-12, 6) is: 

**b** 

**c** *P* ligt op de middelloodlijn van *MN*:  ofwel 

 dit geeft *P*(-2, 11)

**55**

Afbeelding met squash

Automatisch gegenereerde beschrijving**a**  is de helft van een gelijkzijdige driehoek

waarin de zijden zich verhouden als:



De driehoeken *MKC* en *NLC* zijn gelijkvormig met

driehoek *BAC*. Dus  en 



De straal van de grootste cirkel is 3 keer zo groot

als de straal van de kleinste cirkel. De oppervlakte

van de grootste cirkel is dan  keer zo groot die

van de kleinste cirkel.

**b** De zijden verhouden zich nu als 

 en 



De verhouding van de oppervlakten van de twee cirkels is nu 

**56**

**a** 

 De richtingscoëfficiënten zijn gelijk, dus ze zijn evenwijdig.

**b** loodlijn door de oorsprong: 



De afstand tussen *k* en *l* is de afstand tussen (0, 0) en (-4, 3). En die 5.

**c** *m* met *k*: *m* met *l*:

**d** de afstand tussen *k* en *l* is 5, dus de straal van de cirkel is .

Het middelpunt ligt precies in het midden van (3, 4) en (-4, 3): 



**57**

**a**  en 

**b** De lijn  snijdt de lijn  in punt *K* (het midden van *AB*).

daarmee zijn de coördinaten:  en 

**c** 



*C*(5, -5) en *D*(8, 4): 

**d** *E* en *F* liggen op de cirkel met middelpunt *P* en straal 

 geeft 



De coördinaten van *E* en *F* zijn (1, 3) en (5, 5)

**58**

**a** ja, het snijpunt van de diagonalen ligt even ver van alle hoekpunten.

**b** ja, omdat de vier bissectrices van de hoeken door één punt gaan.

**c** Het snijpunt van de diagonalen ligt even ver tot de zijden van de ruit.

De deellijnen van de hoeken gaan door één punt, dus elke ruit heeft een ingeschreven cirkel. De ruit heeft geen omgeschreven cirkel.

**d** als de diagonalen van de ruit even lang zijn.

**e** -

**59** hoogtelijn *AQ*:  en hoogtelijn *BR*:  *H*(4, 2)

middelloodlijn *EM*:  en middelloodlijn *FM*:  M(5, 5)

 en 

Negenpuntscirkel van Feuerbach: 

*D*(7, 6) *E*(2, 6) *F*(5, 0) *P*(8, 4) *Q*(1, 3) *R*(4, 0) *S*(2, 1) *T*(7, 1) en *U*(4, 7) liggen allemaal op de cirkel.

**Samenvatting**

**S1** -

**S2** *M1*(0, 8) en  *M2*(8, 2) en 

De raaklijn staat loodrecht op de lijn *M1M2*: 

Dus raaklijn: 

**S3**

**a**  **b** 

*M*(4, -3) en straal 5

**S4**

**a**  **b** 

snijpunten: (4, 2) en (-1, 3)

**S5**  raaklijn:  ofwel 

**S6** 





**S7**  

snijpunten: (6, 8) en (10, 0)

**S8**

**a** *M1*(-8, -10)  

**b** *M2*(0, 14)  

**S9** loodlijn door *M* op *l*:  ofwel 

**Test jezelf**

**T1**

**a**  **c** 

**b**  

De raaklijn heeft richtingscoëfficiënt 

 en gaat door *P*(3, 5)



**T2**

**a** middelloodlijn van *OA*:  en middelloodlijn van *OB*: 

Middelpunt (8, 6) en straal 

Omgeschreven cirkel: 

**b** de afstand van (4, 4) tot *OA* en *OB* is 4.

Loodlijn op *AB* door *I*(4, 4) is 

**c** ingeschreven cirkel: 

**T3**

**a** ,  en



**b** . Middelloodlijn van *AB* heeft een richtingscoëfficiënt van 3 en gaat door : 

. Middelloodlijn van *AC* heeft een richtingscoëfficiënt van -2 en gaat door (0, 4): 



**c** De omgeschreven cirkel: 

**­T4**

**a** *c*:  en *l*:  ofwel 



*P*(6, 2) en *Q*(2, 4)

**b**/**c** 

 en 

**T5** 



 De coördinaten van *P*(0, -1) en *Q*(2, 1)

Het middelpunt ligt ook op de middelloodlijn van *PQ*: 

 De cirkel wordt: 

**T6**

**a** 



**b** *R*(4, 2)

**c** De lijn door *R* loodrecht op *k* snijdt *m* in het raakpunt

 *m*: 

**T7**

**a**  

**b**  loodlijn op *l* door *M1*: 





**c** 

**d** 

**T8** 



**T9**

**a** 

 middelpunt (2, 1) en straal 5

**b** *Q* ligt op de lijn door *S* loodrecht op *PR*

 en dus *Q* op  en op de cirkel:

**c** 

b. 

c. 

d. 





De cirkels snijden elkaar, dus de afstand is 0

**T10**

**a** 



**b**  

*M1*(3, 0) en *M2*(0, 1)

 en  en hun product is -1, dus loodrecht op elkaar.

**Extra oefeningen**

**E1**

**a** 

**b** 

 middelpunt (1, -3) en straal 

**c**  geeft 

**E2**

**a**  geeft  **b** 

Snijpunten: (6, 0) en (1, 3) snijpunten: (1, -5) en (3, 3)

**E3**

**a**  **b**  dus 



**E4**

**a**  **b** 



**E5**

**a**  en 



**b**  en 

 dus geen snijpunten

**E6**

**a** 

**b**  

**c** 

**E7** loodlijn op *l* door *M*(4, -1): 



*S*(0, 3) 

**E8**

**a**  en 

**b** 

**E9**  

 gaat door (-6, 3)  gaat door 



Het middelpunt is (-4, -1) en de straal : 

**E10**

**a** 

 is gelijkbenig. De loodlijn uit *A* is bissectrice van hoek *A*

**b** bissectrice hoek *O*: 

 loodlijn uit *A*: 



**c** 

**E11**

**a** loodlijn op *l* door *M*(2, -3): 

**b** Die lijn gaat door (-1, -9): 