Hoofdstuk 15: ***Meetkunde: rekenen of redeneren***

**V1**

**a**  **b** 

**c** 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *graden* | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
| *sinus* | 0 |  |  |  | 1 |
| *cosinus* | 1 |  |  |  | 0 |

**V2**

**V3**

**a** de overeenkomstige hoeken zijn even groot: ,  en .

**b** de factor is 3

**c**  en 

**V4**

**a**  (F-hoeken) en  (F-hoeken)

(En hoek *C* is gemeenschappelijk.)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

**b** 



**c** 

**V5**

**a**  (Z-hoeken) en  (Z-hoeken)

(En  (overstaande hoeken))

**b** 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |



**c** de verhouding is   en 

**V6**

**a**/**b** omdat ligt op de middelloodlijn van

**c**/**d**  (straal)

is dus gelijkbenig: 

Verder is  (gegeven), dus volgt uit de hoekensom van een driehoek dat . Ofwel Q ligt op de bissectrice van .

**Sinusregel**

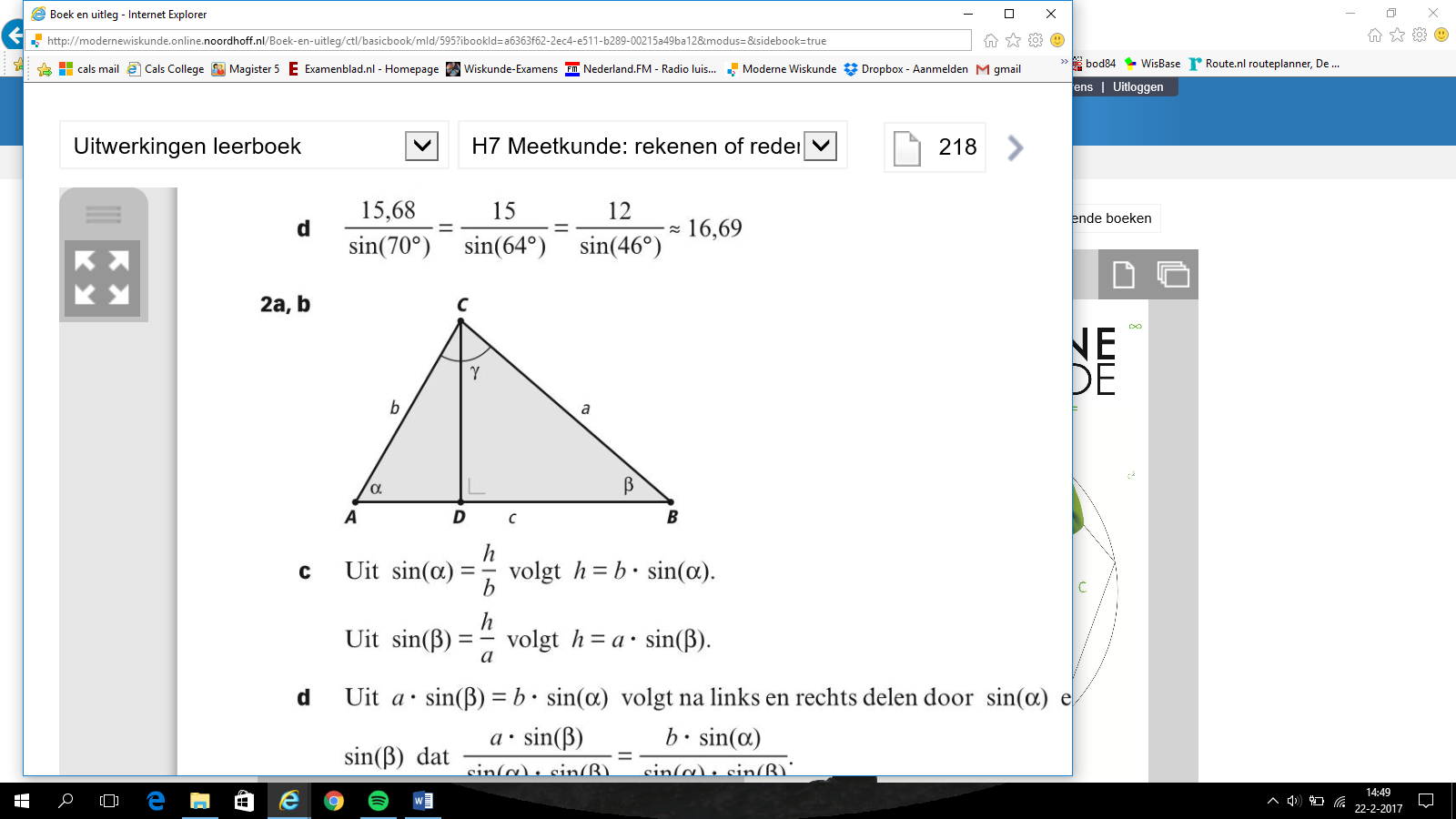
**1**

**a**  **b**  

**c** ,  en 

**d** ,  en ook 

**2**

**a**/**b**

**c**  

**d** 

 en dus 

**e** de hoogtelijn uit *A*.

**O3**

**a** **b**

**c** **d** geeft

**3**

**a** **c**

**b** **d**

en

geeft

**4**

**a** geeft en

**b** en

**c**

**O5**

**a** geeft

**b**

**c**

**d** en of en

**5**

**a**

**b** zie **a**

**c** : klopt

**d** 

**6**

**a** 



**b**  (gestrekte hoek)

 (gelijkbenige driehoek)

 (hoekensom van een driehoek)

 (hoekensom van een driehoek)

**c**  

**U1**

**a**

**b** in driehoek is en

geeft

**c** geeft

**d** uit **c** volgt:

dit substitueren in **b**:

**Cosinusregel**

**8**

**a** Als de loodrechte projectie van op de -as is, dan is een rechthoekige driehoek. Hierin geldt de stelling van Pythagoras:



**b** -

**9**

**a**  

**b**  en 

**c** 

**10**

**a**  

**b** 

**c** 

**O11**

**a** -

**b**/**c** geeft

**d** -

**e** ligt tegenover hoek .

**f**

**g**

**11**

**a**  

**b** geeft

**c**  

**12**

**a** 



**b** is een rechthoekige driehoek

**c**  en dan blijft over: 

**13**

**a**  **c**/**d** 

**b**  



**14**

**15**

**a** ,  en 

**b** 



**16** 



*8*

*T*

*P*

*M*

*Q*

*S*

**U2** halve tophoek:

geeft

cm

**Stelling van Thales**

**17**

**a**  (straal), dus  (gelijkbenige driehoek)

 (hoekensom van een driehoek)

 (gestrekte hoek)

 (straal), dus 



**b**  (gelijkbenige driehoek)

 (hoekensom van een driehoek)

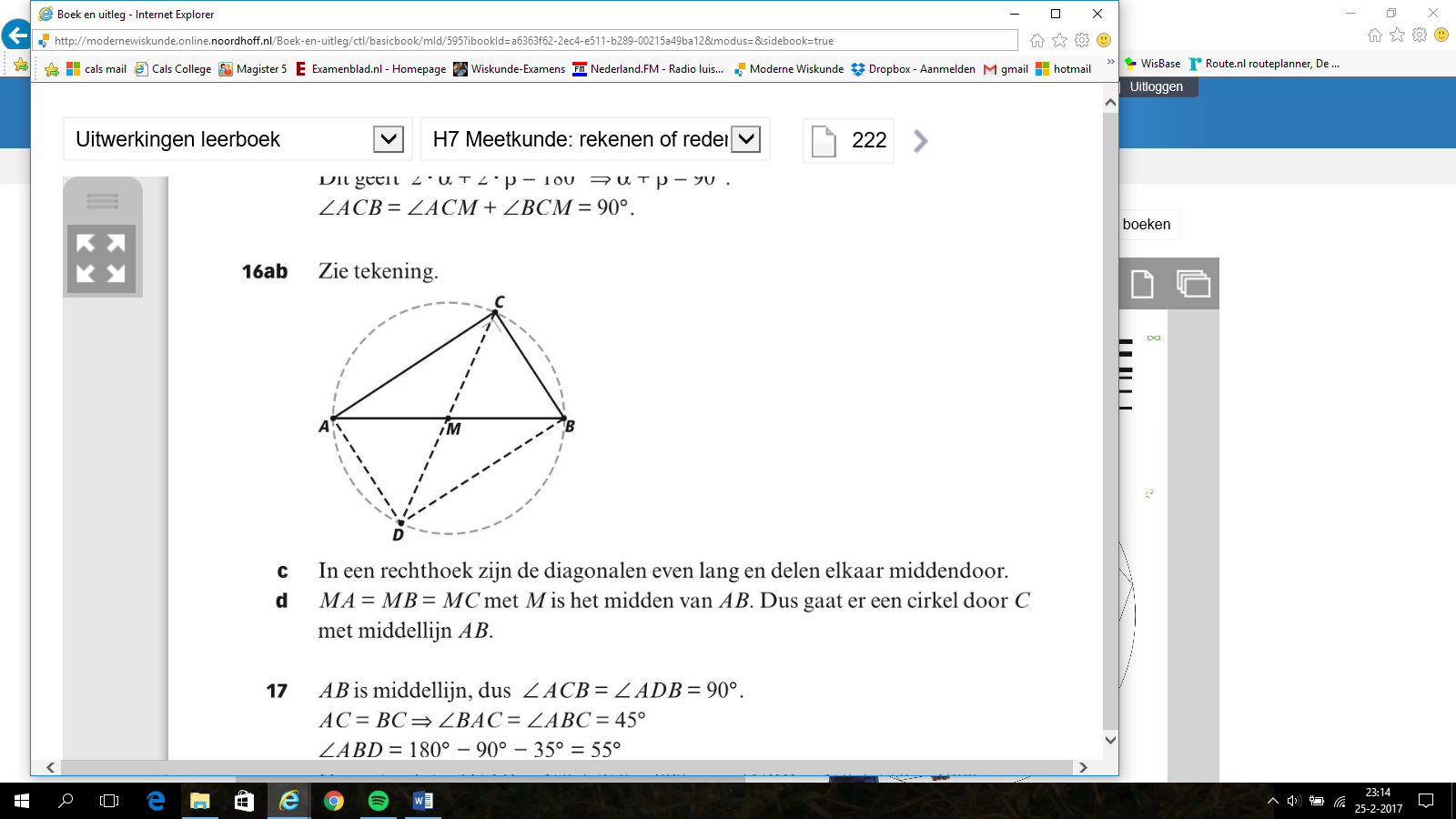
 (gestrekte hoek)





**c** en (beide gelijkbenige driehoeken)

(hoekensom )

**18**

**a**/**b**

**c** de diagonalen van een rechthoek delen elkaar middendoor.

**d** , dus *M* is het midden van *AB* en *CD*.

**19**

**a** (raaklijn aan cirkel)

ligt op de cirkel met middellijn (Thales)

(raaklijn aan cirkel). ligt op de cirkel met middellijn (Thales)

**b** Het midden van is het middelpunt van deze cirkel

**c** Neem het midden van . Teken een cirkel met middelpunt en straal . De snijpunten van deze cirkel met de cirkel met middelpunt zijn en .

**20**  (gelijkbenige driehoek)

 (Thales)



(gelijkbenige driehoek)

 (gelijkbenige driehoek)

en

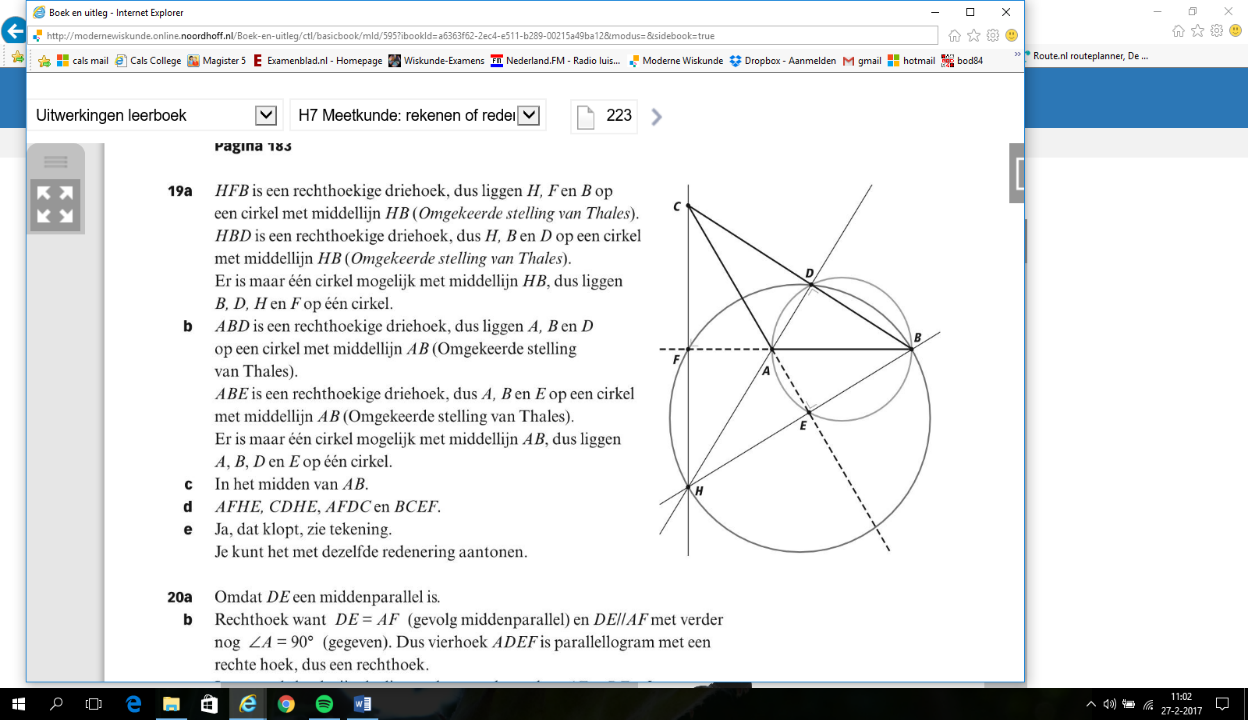
**O21**

**a** is een rechthoekige driehoek.

**b** , dus ligt op de cirkel met middellijn (Thales). ligt in het midden van .

**c** ligt op de cirkel met middellijn (Thales). ligt in het midden van .

**d** is gemeenschappelijk en



**e**

**21**

**a** en liggen beide op de cirkel met middellijn (Thales)

**b** en liggen beide op de cirkel met middellijn (Thales)

**c** op het midden van

**d** , , ,

**e** Ja, dan kloppen de beweringen ook: zie tekening

**22**

**a** omdat op het midden ligt van en op het midden van

**b** is een rechthoek

**c**/**d** , dus volgt uit de stelling van Thales dat *D*, *F* en *G* op een cirkel liggen met middellijn *AE*.

**O23**

**a** ligt op cirkel met middellijn , dus (Thales)

**b** ligt op cirkel met middellijn , dus (Thales)

**c** , dus ligt op .

**23** , want ligt op de halve cirkel met middellijn (Thales)

, want ligt op de halve cirkel met middellijn (Thales)

, want ligt op de halve cirkel met middellijn (Thales)

Vierhoek is een rechthoek. De diagonalen van een rechthoek zijn evenlang, dus .

**24**

**a**  (Thales)



**b** 



 (Thales)

is een gelijkbenige driehoek (), dus .

 en dus is ook 

De driehoeken *ABC* en *ABE* zijn gelijkvormig met factor 1. Dus .

**U3**

**a** (Thales)

(overstaande hoeken)

De overeenkomstige hoeken zijn gelijk, dus

**b** geeft

**c**

**Cirkels en raaklijnen**

**25**

**a** is de symmetrieas

**b**

**c** Omdat de symmetrieas is.

**d** omdat een gelijkbenige driehoek is.

**26**

**27**

**O28**

**a** Dan is een gelijkbenige driehoek en geldt

**b**

**c** (straal), dus is gelijkbenig. Hieruit volgt:

**d** (raaklijn aan cirkel)

(hoekensom driehoek)

(overstaande hoeken)

Dus

**28**

**a** (raaklijn aan cirkel)

(hoekensom )

(raaklijn aan cirkel)

**b** In :

en de overeenkomstige zijde De vergrotingsfactor is 2

. Dus

**O29**

**a** de gestrekte hoek bij (2 stippen en 2 rondjes) is 180°

Dus (1 stip en 1 rondje)

**b** Thales

**c** -

**29**

**a** (raaklijn aan cirkel). Dus .

**b** en . Dus en hieruit volgt dat in het midden ligt van

**c** en

**30** (raaklijn aan cirkel)

met verkleiningsfactor

en en dus is

**31** Teken een lijn door // : dit geeft snijpunt op

want (raaklijn aan cirkel)

(raaklijn aan cirkel), dus

**U4** (raaklijn aan cirkel)

(Thales)

Noem

**Algebraïsch of meetkundig**

**32**

**a** **b**

**c** geeft

**d** geeft ook

**O33**

**a** dus

gaat door (3, -4):

raaklijn :

en

**b** , en

, dus

**c** Neem (5, 0) en (-5, 0)

(raaklijn aan cirkel) en ook

en dus met factor 1. Hieruit volgt

(raaklijn aan cirkel) en ook

en dus met factor 1. Hieruit volgt

**d**

**33**

**a**

vergelijking raaklijn: gaat door (5, -12), dus

en

, dus

**b** Neem (-13, 0) en (13, 0)

met factor 1 en dus is

met factor 1 en dus is

Hieruit volgt:

**34**

**a** ligt op de bissectrice van omdat

**b** : en :

**c**

Het middelpunt van de cirkel is (12, 12) en de straal 12.

**d** en

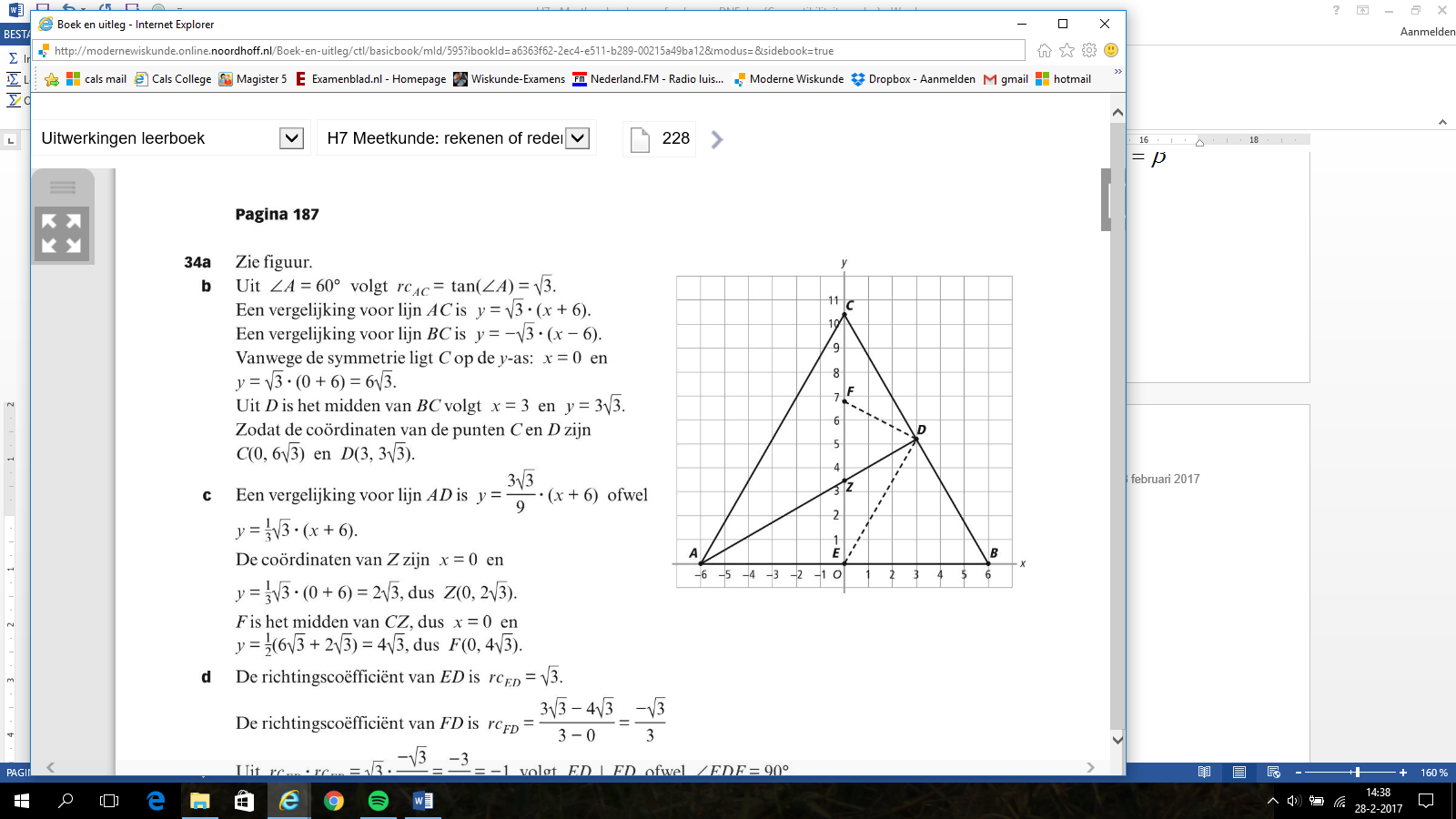
**e**

**f** en

**g**

**35**

**a** de zwaartelijnen gaan door een hoekpunt en het midden van de overliggende zijde.

**b**

is het midden van :

**c** :

De coördinaten van zijn:

**d** en

dus

**36** De zwaartelijnen van een gelijkzijdige driehoek zijn even lang en delen elkaar in de verhouding 1:2. Dus

. De punten , en liggen even ver van . Dus ligt op een cirkel met middellijn . Dan volgt hieruit dat (Thales).

**37**

**a** en :

snijden met :

en

**b** is een gelijkbenige driehoek. Omdat het midden is van geldt:

en

en

en

**38**

**a** en

**b** (5, 0), (5, 10) en

**c** en

**d** het snijpunt van en is .

en dus is

**O39**

**a** en

en dus

**b**

**c** , dus (Z-hoeken)

met factor 2, dus ( is het midden van )

is de middelloodlijn van , dus

**39** zie opgave O39

**40**

(raaklijn aan cirkel) en (raaklijnstukken), dus

Hieruit volgt:

is een gelijkbenige driehoek, dus

**U5** (straal grootste cirkel)

(straal kleine cirkel)

Hieruit volgt: met factor 1

en dus is een raaklijn aan de kleine cirkel.

**Gemengde opdrachten**

**41** Noem het midden van

is een gelijkbenige driehoek met en tophoek 30°

**42**

**43**

**a** en

snijpunt van en is (5, 5)

. Voor de loodlijn geldt dan: met

Snijpunt en : geeft

**b** Stel

(raaklijn aan cirkel). Dan is

(overstaande hoeken)

( is gelijkbenig)

en ook (Z-hoeken)

( is gelijkbenig) en (raaklijnstukken).

**44** is het snijpunt van en . is rechthoekig (raaklijn aan cirkel)

met factor 3

Dus (zelfde gelijkvormigheid)

(-1, 0)

**45**

(hoekensom van een driehoek)

en

is het snijpunt van de verticale lijn door en de horizontale lijn door

is het snijpunt van de verticale lijn door en de horizontale lijn door

geeft

(gestrekte hoek)

(200,8; 426,9)

**46**

is gelijkbenig:

ligt op een cirkel met middellijn (Thales)

**d** ?

**Samenvatting**

**S1**

**a**

en

**b** of

of

of

**S2**

**a**

**b**

**S3** (Thales)

en

Hieruit volgt:

**S4** snijdt loodrecht in het midden .

(raaklijn aan cirkel), dus

is een gelijkbenige driehoek ( (raaklijnstukken)), dus

**S5**

**a** ***Hier zou (0, 0) gegeven moeten zijn.***

is een middellijn, dus (0, 5) en (0, 10)

. Een vergelijking van is:

:

en snijden met lijn geeft en

is het midden van .

**b** is een gelijkbenige driehoek ( (raaklijnstukken))

**c** (Z-hoeken) en (overstaande hoeken),

dus

**d** Omdat is ook

(raaklijnstukken), dus ( is het midden van .)

**Test jezelf**

**T1**

**T2**

**T3**

**a** (gelijkbenige driehoek)

**b** (Thales)

**c** Als op de cirkel ligt dan is . buiten de cirkel:

**d**

(omdat (Thales))

en

**T4**

**a**/**b** en staan loodrecht op (raaklijn aan cirkel)

met factor

**T5**

**T6**

**a** (0, 8), (0, 4), (4, 0) en (4, 8)

**b** : en :

en

en

en

**T7** ligt op de cirkel met middellijn : (Thales)

(Z-hoeken)

met factor 1 want

Dus

**T8**

**a**/**b** met factor **c**

**Extra oefening**

**E1**

**a** 



 en 

**b**



En dan is hoek *E* ongeveer 113° of ongeveer 25°

**E2**

**a** 



**b**  



**E3** *CE* is een middellijn, dus  (Thales)

De twee rechte hoeken zijn F-hoeken waardoor *AB* // *DE*.

**E4**

**a** *CR* en *CP* zijn raaklijnen, dus 

Zo zijn ook  en 



**b** 



**E5**

**a** 

is een gelijkbenige driehoek. De loodlijn door op gaat door het midden van : 

 en dus is 

*MP*:  met 

**b**  (Thales)

met factor

**E6**

**E7**

**a** (Thales) en (overstaande hoeken)

Dus

**b** geeft

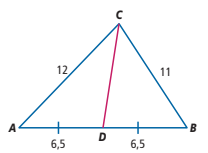
**c** met rechthoekzijde

(in )

**d** en dus is

**E8** Teken de loodlijn op door *M* op *PQ*. (Deze gaat door het midden *S* van *PQ*)

( en  is gemeenschappelijk) met factor

**E9**

**a**

**b**

**c**

**d**