Hoofdstuk 18: ***Toepassingen van integreren***



.

**V1**

**a**

**b**  en 

**c**  voor  en 

 voor  en 

**d** De periode is 

**e**  en 



..

 voor  en 

 voor  en 

De periode is 

**V2**

**a** *f*(*x*) is symmetrisch in de lijn 

**b** *g*(*x*) is symmetrisch in de *y*-as

**c** *f*(*x*) is puntsymmetrisch in 

**d** *g*(*x*) is puntsymmetrisch in  en symmetrisch in de lijn 

**e** *g*(*x*) is puntsymmetrisch in 

**f** *f*(*x*) is puntsymmetrisch in 

**V3**

**a**  **d**  **g** 

**b**  **e**  **h** 

**c**  **f** 

**V4**



*g(x)*

*h(x)*

*f(x)*

*m(x)*

*n(x)*

*k(x)*

**a** *g*(*x*) ontstaat uit de grafiek van *f*(*x*) door een lijnvermenigvuldiging toe te passen t.o.v. de *x*-as met factor 3.

De grafiek van *h*(*x*) ontstaat door op *f*(*x*) een lijnvermenigvuldiging toe te passen t.o.v. de *y*-as met factor .

**b** De grafiek van *m*(*x*) ontstaat uit die van *k*(*x*) door de grafiek van *k*(*x*) 2 omhoog te verschuiven. Als je de grafiek van *k*(*x*) 2 naar links verschuift, krijg je de grafiek van *n*(*x*).

**V5**

**a** Vermenigvuldiging t.o.v. de *y*-as met factor . Amplitude: 1 en periode: .

**b** Een verschuiving van 0,22 naar links en een vermenigvuldiging t.o.v. de *x*-as met factor -1. Amplitude: 1 en periode: .

**c** Een vermenigvuldiging t.o.v. de *x*-as met factor  en een vermenigvuldiging t.o.v. de *y*-as met factor . Amplitude:  en periode: .

**d** Een vermenigvuldiging t.o.v. de *x*-as met factor –2 en een verschuiving van 1 naar boven. Amplitude : 2 en periode: .

**V6**

**a**  **b** 

 

**c**  **d** 

 

**V7**

**a**  **b** 

 

**c**  **d** 

 



**Harmonische trillingen**

**1**

**a** De periode van *u* is s.

**b** 

**c** 

**2**

**a** amplitude: 1 periode:  frequentie:  Hz.

**b** amplitude: 0,02 periode:  frequentie:  Hz.

**c** amplitude: 1 periode:  frequentie:  Hz.

**d** amplitude: 9 periode:  frequentie:  Hz.

**3**

**a** De periode is . De frequentie van deze trilling is . Deze wordt verdubbeld tot . Dan wordt de periode  en .

De nieuwe formule wordt: 

**b** De frequentie wordt dan . De periode wordt  en .

De nieuwe formule wordt: .

**4** Het beginpunt bij een sinusfunctie ligt een kwart periode voor , dus bij .



**O5**

**a** van minimum(bij ) naar maximum (bij ) is een halve periode. De periode is dan 

**b**  en 

**c** 

**d** punt (-1, 3) 

**e** 

**5**

**a**  en 

de halve periode is 8, de periode is 16 en 

een beginpunt voor een cosinusfunctie is (-7, 14)



**b** 

Een beginpunt voor een cosinusfunctie is (-5, 2)



**c**  en  de periode is 4, dus 



**6** de periode is  en dus  

**7**

**a** frequentie van 20 Hz: de periode is  en 

frequentie van 20.000 Hz: de periode is  en 

**b** bij een frequentie van *f* HZ hoort een periode van  en een 

Wordt de frequentie 1,5 keer zo groot, dan wordt de periode  en de 

(dus 1,5 keer zo groot)

**8**

**a** de periode is  

**b** 

invoer:  en  intersect: 

gedurende 7 uur en 33 minuten meer dan 4 meter

**U1**



..

**a**

**b** maximum is  en het minimum : amplitude

is  en de evenwichtsstand . De periode

is  en de horizontale verschuiving  naar

rechts. Dus .

**c** maximum is  en het minimum : amplitude is  en de evenwichtsstand . De periode is en de horizontale verschuiving  naar rechts. Dus .



..

**U2**

**a** voor alle waarden van *t* geldt: 

**b**  

 

De gemeenschappelijke punten vallen samen met de toppen van *u*(*t*).

**Goniometrische formules**

**9**

**a** de grafiek van sin(*x*) wordt  verschoven: 

**b** 

Afbeelding met grafiek

Automatisch gegenereerde beschrijving**10**

**a** De grafiek van *f*(*x*) is symmetrisch in de lijn 

**b**

**c** Nee: de grafiek van de cosinus is niet symmetrisch in de lijn , maar puntsymmetrisch in 



**d** De grafiek van de cosinus is symmetrisch in de *y*-as.

**11**

**a** verschuiving van  naar rechts.

**b** 

**c** Als je de grafiek van *f*  naar links verschuift, krijg je de grafiek van *g*.

**O12**

**a**/**b**/**c** 

**d** 

**12**

**a** 

**b** 

**c** 

**d** 

**13**

**a** 

**b** 



**O14**

**a**  en 

**b**  en dus 

**c** voor  is 

**d** 

**e**  **f** 

 

**g**  **h** 

 

**14**

**a**  **c** 

 

**b**  **d** 

 

**15** 



**16**

**a** 



**b** 

**U3**

**a** minimum is 0 en maximum is 1  en 

de periode is 

**b** 



**c** 

**d** bij een verschuiving van  naar links

**e** 

**Vergelijkingen oplossen**

**17**

**a**  

 

**b** De grafiek van  is symmetrisch in de lijn .

Daarom is 

**d** 

 (vanwege de symmetrie in )

**c** 

**O18**

**a** 

**b** 

**c**/**d** 

**18**

**a**  **b** 

 

**c** 



**d** 



**e** 



**f** 



**19**

**a** 



**b** 



**c** 



**d** 



**20**

**a** 



**b** 



**c** 



**d** 



**e** 



**21** 



**22** 



**O23**

**a**  dus 

**b** vermenigvuldigd met -1

**c** 



**d** 

**e** 

**23**

**a**  **d** 

 



**b**  **c** 

 



**24**

**a**  en , dus 

**b**  **c** 

 



**U4**

**a** 



**b** 



**c** 



**Differentiëren**

**25**

**a** De helling is 0 in  en 

**b**/**c**  tekent de hellinggrafiek van  

**d** 

**e** De hellinggrafiek moet dan ook  naar links verschoven worden: 

**O26**

**a**  en 

**b**/**c**  en   

**d**  **e** 

**f**  **g** 

**h**  **i** 

**26**

**a**  en  

**b**  en  

**c** 

**d** 

**e**  en  

**f**  en  

**O27**

**a**  en 

**b** 

**d** 



**27**

**a** 

**b** 

**c** 

**d** 

**28**

**a** 



**b** 

**c** 

**29**

**a**  **b** 

 

**30**

**a** 



**b** 



de extreme waarden is 

**c** 

  voor 

**31**

**a** periodes

**b** 

. De afgeleide is negatief, de luchtdruk daalt, dus de persoon ademt uit.

**c** Maximale snelheid is  (amplitude van *p*'(*t*)) en komt voor op de tijdstippen 

Afbeelding met grafiek

Automatisch gegenereerde beschrijving

**32**

**a**

**b** 



 en 

**c** er zijn 3 perioden getekend op het interval . Eén periode is .



**33**

**a**  en  **b**  (*a* is de amplitude)

 

De tweede vergelijking geldt voor alle waarden van *a* en *b*.

Afbeelding met grafiek

Automatisch gegenereerde beschrijving

**34**

**a** 



 (maximum) en  (minimum)

**b**  

**c** 



**U5**

**a** de extreme waarden van  zijn 1 en -1. Omdat  een stijgende functie is zijn de extreme waarden van *f*(*x*) gelijk aan *e* en .

**b** 



**c**  geeft 



**d** dit geeft 

De buigpunten zijn: (0,67; 1,86) en (2,48; 1,86)

**U6**

**a**  

 

**b** geen gemeenschappelijke punten als  of .

**Integreren**

**35**

**a**  **b** 

**c**  **d** 

**36**

**a**  **c** 

**b**  **d** 

**37**

**a**   

**b** Elk deel ingesloten door de grafiek van *f* en de *x*-as heeft een oppervlakte van 2.

**c** 



**38**

**a**  **c** 

**b**  **d** 

**39**

**a**   

  

**b** 

**40**

**a** 



**b** 

**41**

**a** voor een exponentiële functie geldt dat  voor alle waarden van *x*.

**b** 

**O42**

**a** 

**b**  geeft 

**c**  geeft 

**d**  geeft 

**42**

**a**  geeft 

**b** 



**43**

**a**  en 

**b** 

**c** 

**d** De gemiddelde temperatuur tussen 6 uur ’s morgens en 6 uur ’s avonds.

**44**

**a** 



**b** 



**U7** 



**U8**

**a** 

**b**  geeft 

**c** 



**d** De grafiek is symmetrisch in de *y*-as en puntsymmetrisch in , dus de gebieden ingesloten door de grafiek van *f* en de *x*-as zijn allemaal even groot.

**Tangensfunctie**

**45**

**a**

**b** Verticale asymptoten als 



**c** 



De periode van *f*(*x*) is .

**46**

**a** 

**b**     bestaat niet

**47** 



**48**

**a**

**b**  **c** 

 

**49**

**a**  **b** 

 **c**  en 

**O50**

**a**  **b**/**c** 

**50**

**a**  **b** 

 

**c**  **d**   

**O51**

**a**  **b**/**c**  **d** 

  

**e**  **f**  **g** 

  

**51**

**a**  **b**  **c** 

  

**d** 



**52**

**a** 



**b** 

**53**

**a** 

**b** ,  

**c** 

**d**  

**54**

**a** 

**b** 



**55**

**a**  en  

**b** 

**c** 

**U9** 



Voor  heeft  geen oplossingen op . Er is één oplossing

Voor  heeft de vergelijking ook maar één oplossing

Voor  heeft  ook geen oplossingen. Voor  valt de tweede oplossing samen met .

En voor  heeft de vergelijking  twee oplossingen op , en zijn er in totaal drie oplossingen.

**Gemengde opdrachten**

**56**

**a** 

 en 



**b** 



**c** 

**57**

**a**

**b** 



**c**  en 

**d** Bij  is de afgeleide positief en de grafiek van *f* stijgend. De top ligt dus rechts van 2.

**e** 



**58**

**a**

**b** 



**c** 

**d**  en 

 



**59**

**a** voor de hoek tussen  en  geldt



En voor  geldt dan  als  de hoek is die  maakt met de *x*-as.

**b** 

**c** 



**60** parabool: 

 maximale afwijking met  is 0,056

kettinglijn:  geeft 

 maximale afwijking:

**Samenvatting**

**S1** maximale uitwijking: 2,5 trillingstijd:  s frequentie: 320 Hz

**S2** periode:  nulpunten:  asymptoten: 

**S3**

**a**  **b** 

 

**S4**

**a** 

**b** 

**S5**

**a** 



**b** 



**S6**

**a**  **b** 

 

**S7**

**a** 

**b** 

**S8**

**a**  

**b** 

**S9**

**a**  **b**  **c** 

  

 

**Test jezelf**

**T1**

**a** periode

**b** periode is s:  

**T2**

**a** *f* en *g* hebben dezelfde periode: 4. Dus 



**b**/**c** 

**T3**

**a** 

**b**  **c** 

 

**T4**

**a** 



**b** 



**c** 



**d** 



**T5**

**a** 

**b** 

**c** 

**d** 



**T6**

**a** 

**b** 

**c** 

**d** 

**T7**

**a** 



dus de lijn  raakt de grafiek van *f* in (0, 0).

**b** nee. Als  dan is er één snijpunt namelijk (0, 0). En als  zijn er naast (0, 0) altijd minstens 1 paar andere snijpunten (voor een positieve en negatieve waarde van *x* vanwege de puntsymmetrie in (0, 0)).

**c** 

****

**T8**

a. Voer in:  en 

intersect: 

b. 

**T9** 

 





**T10**

a.

b. 



c. 



d. Voer in:  en  intersect: 

e. 



f. 



**T-10** 

 

Er zijn dus 6 nulpunten

Extra oefening – **Basis**

**B-1**

a. de frequentie is 200; de periode  en 



b. de periode is 6:   en 

 

**B-2**

a.  c. 

b.  d. 

**B-3**

a. 



b. 



c. 



d. 



**B-4**

a. 

b. 

c. 

d. 

**B-5**

a. 

b. 

c. 

d. 



**B-6**

a.

b.  c. 

 



Extra oefening – **Gemengd**

**G-1**

a. 



b. Voer in:  en  voor verschillende waarden van *a*.

Voor  raakt de lijn de grafiek van 

Dus er is één snijpunt voor  en 

c. Nee dat is niet mogelijk. Als er nog een snijpunt is naast (0, 0), dan is het spiegelpunt ook een snijpunt.

d. Dan moet de lijn in de buurt van de tweede top raken. Dat is voor 

e. De lijn gaat door het punt : 



**G-2**

a. De amplitude is 8 en de evenwichtsstand is 

100 omwentelingen per 60 seconden: periode is : 

Op tijdstip  op hoogte 4:  periode naar rechts verschoven



b. 

c. Na 5 seconden is de snelheid bijna gelijk aan 0: de zuiger bevindt zich in de hoogste stand.

d. De maximale snelheid is  cm/sec

**G-3**

a. 





b. 

 



c. 

d. 

