Hoofdstuk 21: ***Afsluiting analyse***

**V1** domein: nulpunt:

**a**

**b**

**c**

en (-1, 0) en (1, 0)

**d** (0, 0)

**e** (2, 0)

en

**f**

geen oplossing -

**V2**

**a** verticale asymptoten: en

horizontale asymptoot:

**b** verticale asymptoten: en

horizontale asymptoot:

**c** verticale asymptoten: en

horizontale asymptoot:

**d** verticale asymptoot:

horizontale asymptoot:

**V3**

**a**

**b**

**c**

**d** horizontale asymptoot:

**V4**

**a** als heel groot negatief is, gaat naar 0. Horizontale asymptoot:

**b** geeft verticale asymptoot:

**c** verticale asymptoot:

horizontale asymptoot:

horizontale asymptoot:

**d**

De verticale asymptoten zijn: en

**V5**

**a**

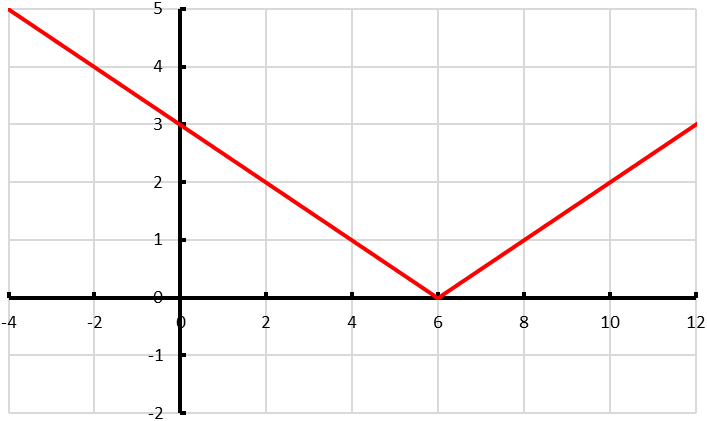
**b** De grafiek van heeft verticale asymptoten als en

**c** heeft een maximum als maximaal is.

Dat is bij

Het minimum is

**d** Bereik:

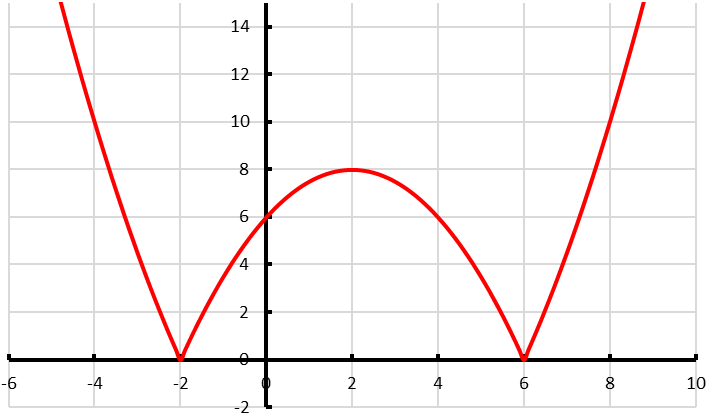
****

**V6**

**a**

**b**

**c**

**V7**

**a**

**b**

en

**c** Deze is maximaal als . Het maximum is 8.

**d** heeft twee minima van 0 als en

.

**Limieten en perforaties**

**1**

**a** van de rechterkant wordt de waarde van ) oneindig groot negatief en vanaf de linkerkant naar oneindig groot positief.

**b** de grafiek van heeft een verticale asymptoot: .

**c** mits

**d** als van rechts of van links tot -3 nadert, dan nadert naar -6.

**e** De grafiek van heeft een perforatie in (-3, -6).

**2**

**a**

**b** als van de rechterkant tot -3 nadert is de functiewaarde van gelijk aan 1.

als van de linkerkant tot -3 nadert is de functiewaarde van gelijk aan -1.

De grafiek van maakt een sprong.

**3**

**a**

en

**b** mits

**c** De grafiek van heeft bij een sprong en de grafiek van heeft een

perforatie (5, 6).

**4**

**a** mits

horizontale asymptoot:

Verticale asymptoot:

**b** mits

De grafiek van heeft een verticale asymptoot: en een horizontale asymptoot: .

de grafiek van heeft en perforatie:

**c**

en : de grafiek van heeft een sprong bij

**d** mits

De grafiek van heeft een verticale asymptoot: en een horizontale asymptoot: .

De grafiek van heeft ook een perforatie: .

**5**

**a** mits

perforatie:

**b** mits

perforatie:

**c** mits

perforatie:

**d** mits en

perforaties: en

**6** en bestaat niet (wordt heel erg groot).

De linkertak van de grafiek van heeft een perforatie (asymptotisch punt): (1, 0)

en de rechtertak van de grafiek heeft een verticale asymptoot:

**X1**

**a** mits

de grafiek van heeft en perforatie:

geeft (-3, 0)

gaat door (-3, 0). Dit geeft

Raaklijn in : Als dan is

De raaklijn gaat door de perforatie.

**X2**

**a**

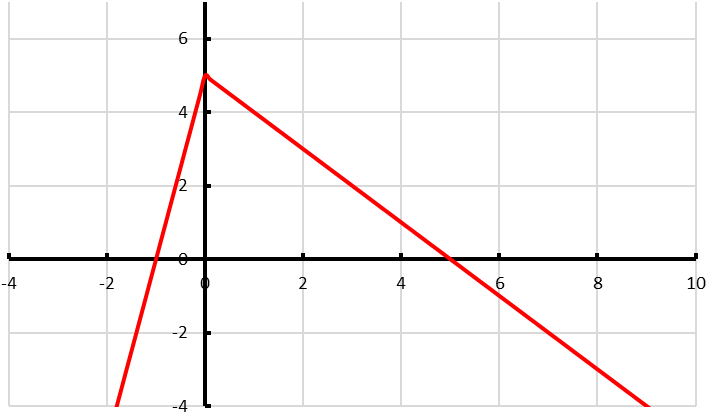
(en )

Verticale asymptoten: en

**b**

perforaties: (0, 1) en

**Functies met absolute waarde**

**7**

**a** Voor is

**b** voor is

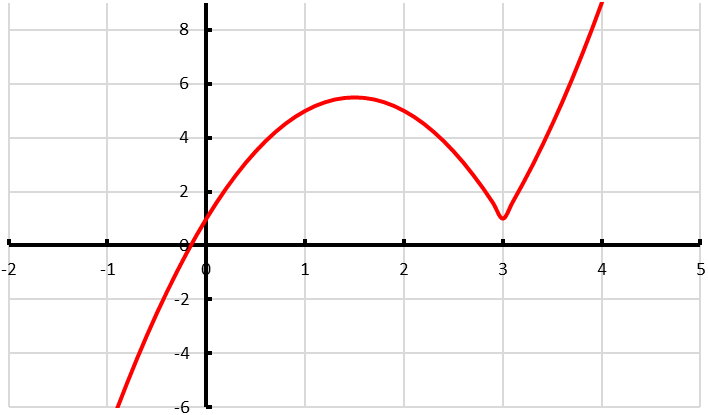
**c**

**d** links van de knik is de richtingscoëfficiënt 5 en rechts van de knik -1.

**e** het maximum is 5 (voor )

**8**

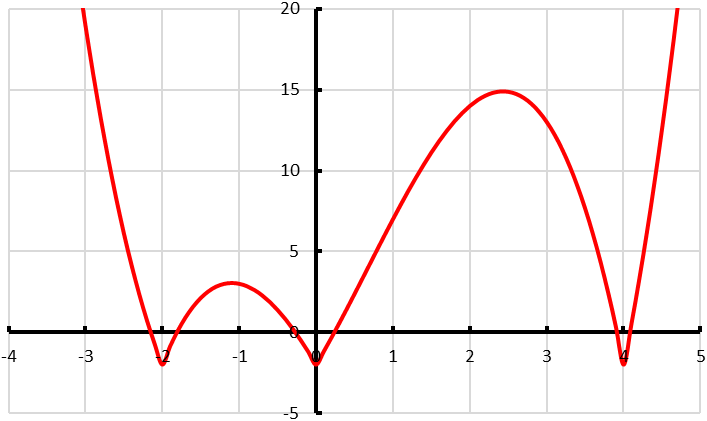
**a/b**



**9**

**a**

**b** geeft

**c**

**10**

**a** geeft

voor en voor

**b** het minimum is 0 voor .

**c** voor

voor

**d** en

**11**

**a**

**b** de extreme waarde is een maximum

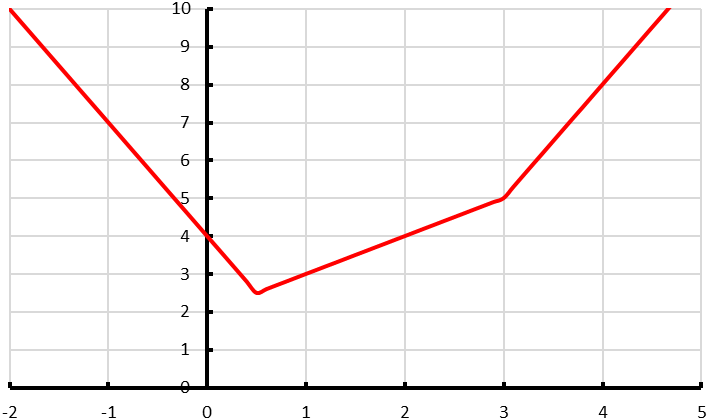
**12**

**a** geeft

en

**b** De grafiek vertoont nog knik in (3, 9)

en



**13**

**a**

**b** en

**c**

**d** de extreme waarde is voor .

**14** geeft en geeft

Voor is

geeft

Knikpunten bij o.a. . Dit geeft .

**X3**

**a** als : een rechte lijn met rc

**b** als

verticale asymptoot:

**c** de knik doet zich voor bij .

De coördinaten van de knik zijn (, 1).

**d**

De noemer is altijd positief, omdat

Als dan is . De teller is altijd kleiner dan de noemer, dus

**X4**

**a** geeft

gaat door (8, 5):

**b**

en

Andere snijpunt: (-4, 41)

**Extreme waarden en buigpunten**

**15**

**a**

geen oplossing



**b** Bij heeft f geen extreme waarde.

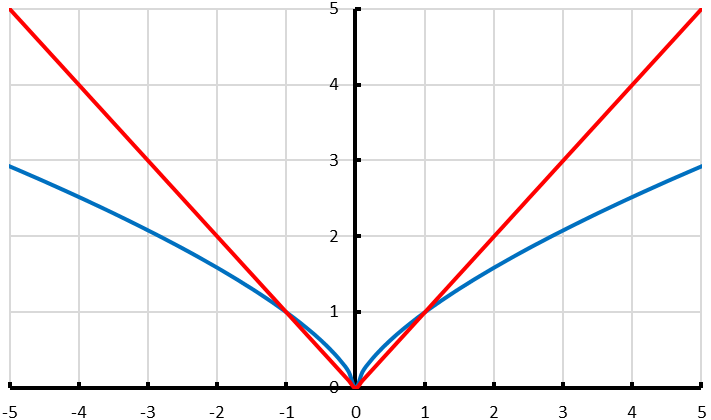
**c**

geen oplossing

**d** Dit zijn de -coördinaten van de buigpunten van de grafiek van .

**16**

**a**

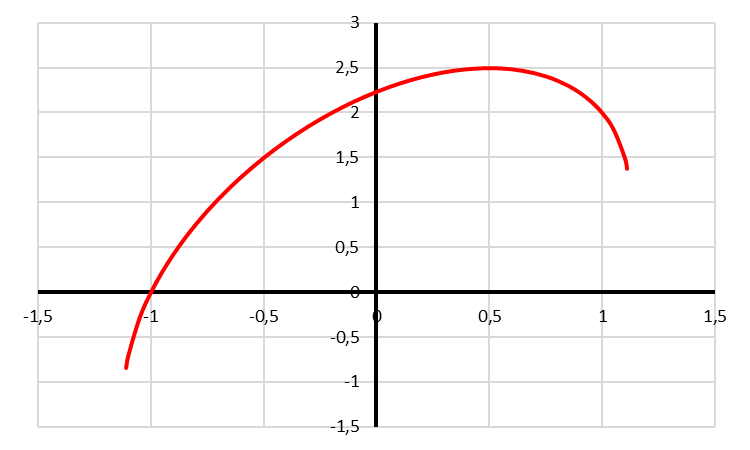


*f*

*g*

**b** De grafieken hebben in een knik, dus de afgeleide bestaat daar niet.

**c** De minimale waarde is 0.

**17**

**a**

**b**

**c**

**d**

Oplossen wortelvergelijking:

* isoleren
* kwadrateren
* oplossen
* controleren

De extreme waarde is

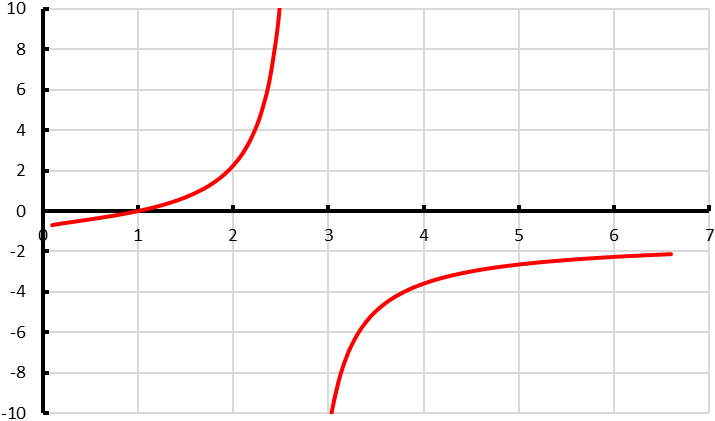
heeft ook nog twee randextremen: en

**18**

**a** Voor het domein moet vanwege gelden:

Domein:

**b**



(0, -1) is een asymptotisch punt.

**c** De verticale asymptoot:

De horizontale asymptoot:

**d**

de afgeleide wordt nooit gelijk aan 0, dus de functie heeft geen uiterste waarde.

**19**

**a**

**b** Bij heeft de grafiek van geen buigpunt

**c** en

**20**

**a**

en bestaan niet. De raaklijn in (1, 2) is verticaal.

Zie voorbeeld boven deze opdracht: buigpunt (1, 2)

**b** Buigraaklijn:

**21**

**a**

geeft

Extreme waarden zijn en

**b**

**c** alleen bij heeft de grafiek van een extreme waarde.

**22**

**a**

geeft

geen oplossingen

Buigpunten: en

**b**

**X5**

**a**

: alle grafieken van gaan door (0, 0)

: alle grafieken hebben een horizontale raaklijn in (0, 0); raken de -as.

**b**

geen oplossing

Extreme waarden: en

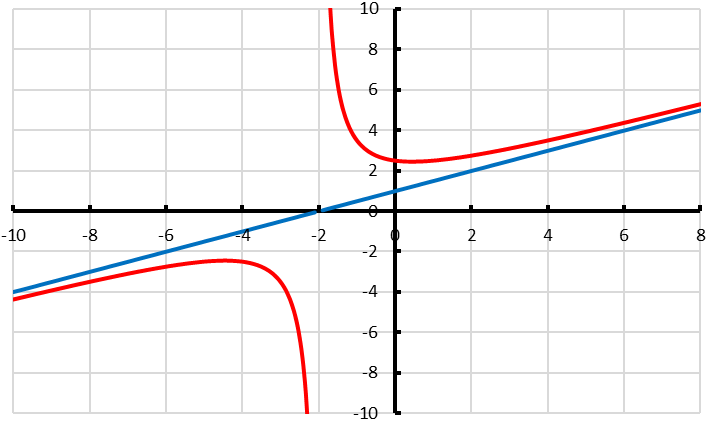
**c** geeft

Top:

**X6**

Extreme waarden: (randminimum); ; ;

; ; ;

**Scheve asymptoten**

**23**

**a**

**b** de afstand tussen de grafieken van en wordt voor grote positieve en negatieve waarden van vrijwel gelijk aan 0.

**24**

Omdat wordt het verschil van de grafiek van en de lijn vrijwel gelijk aan 0.

**25**

**a**

**b** en ook

**c**

**26**

**a** scheve asymptoot:

**b** scheve asymptoot:

**27**

**a**

, dus S.A.:

**b**

**28**

**a**

**b** en

**c** -12

**d**

**e**

**f** scheve asymptoot:

**29**

**a** S.A.:

**b** S.A.:

**c** S.A.:

**d** S.A.:

**30**

**a** omdat voor grote waarden van de grafiek de lijn nadert en dan zijn de hellingen nagenoeg gelijk aan elkaar.

**b** De lijn gaat door (0, 0) en de scheve asymptoot door (0, )

Voor grote waarden van is de functie gelijk aan de scheve asymptoot, dus het verschil tussen en de lijn is .

**31**

**a**

**b** bestaat niet

De grafiek van heeft geen scheve asymptoot.

**X7**

**a**

**b**

S.A.:

Het minimum is

**c** de hellingshoek is 60°, dus of

**X8**

**a**

, dus de scheve asymptoot is

De hoek die de scheve asymptoot maakt met de verticale asymptoot () is gelijk aan 90° min de hellingshoek van de scheve asymptoot.

Dus

**b**

De scheve asymptoot is

De scheve asymptoot van snijdt de -as in punt

**c**

door de oorsprong, dus

**Functies onderzoeken**

**32**

**a**

Voor alle waarden van is . De teller van de afgeleide is voor alle waarden van negatief en de noemer, vanwege het kwadraat, altijd positief. De afgeleide is dus altijd negatief. De grafiek van is dalend en heeft dus geen uiterste waarden.

**b**

g.o.

, dus (0, 0) is het buigpunt van de grafiek.

**c** en (omdat en )

horizontale asymptoten: en

**d**

De grafiek van is symmetrisch in de oorsprong (0, 0).

**33**

**a**

en

**b**

Voor heeft de grafiek buigpunten. De minima zijn voor

en de maxima voor .

**c**

omdat

**34**

**a** Je kunt de derdemachtswortel uit een negatief getal trekken. Het domein is .

**b**

geeft , ofwel . De top is .

**c**

In beide nulpunten bestaat de afgeleide niet. De raaklijnen lopen in de nulpunten verticaal.

**d**

**e** De grafiek van is symmetrisch in de lijn .

**35**

**a**

voor welke waarden van heeft geen oplossingen?

Voor heeft de vergelijking geen oplossingen en de grafiek dus geen extreme waarden.

**b** en

**c** en

dus is de scheve asymptoot voor alle grafieken van .

**d** en deze wordt nooit 0.

**36**

**a**

Als dan is het domein niet . Voor is voor alle waarden van en is het domein .

**b**

**c**

**d**

Dus is de scheve asymptoot van de grafiek van .

**37**

rechtertak: linkertak:

: één snijpunt : één snijpunt

: twee snijpunten : twee snijpunten

En nu combineren:

: drie snijpunten : twee snijpunten : één snijpunt

**X9**

**a** **b**

of

of

of

**c**

:

**X10**

**a** voor alle waarden van . De teller en de noemer is altijd positief. Dus de grafiek van ligt geheel boven de -as.

**b**

Het maximum van is

**c** , dus de grafiek van is symmetrisch in de -as.

**d**

**38**

**a** **b** op de -as:

, dus voor heeft

de grafiek een top:

**c** en

uit de tweede vergelijking volgt dat

**39**

**a** mits .

De grafiek is de rechte lijn met een perforatie in (0, 0)

**b**

en

**c** en

**40**

**a**

: de grafiek raakt de -as in (1, 0)

**b**

(teller is 1)

V.A.: S.A.:

**c**

**d**

**41**

**a** **b** verschuif de grafiek 1 naar links en 20 omhoog:

geeft

Buigpunt: (1, -20)

Puntsymmetrisch in (0, 0)

**c**

De middelloodlijn van is:

en

gaat door

, dus de raaklijn gaat door .

**42**

**a**

Vanwege het domein van moet , dus

Als dan bestaat voor geen enkele waarde van . Dus voor

**b** en

, dus voor

, dus voor .

**c** buigpunten:

en

Deze vergelijking heeft oplossingen als dus en

Maar voor bestaat de functie niet (zie a), dus als heeft de grafiek van buigpunten.

verticale asymptoot:

Dus voor  zijn er verticale asymptoten.

**43**

Voor en heeft de grafiek van een perforatie.

Voor alle andere waarden van heeft de grafiek van een verticale en een scheve asymptoot.

**Samenvatting**

**S1**

**a** mits perforatie:

**b**

en , de grafiek van heeft een sprong.

**S2**

**S3**

In (-1, 2): en

In (2, 0): en

**S4** voor :

geeft , ofwel

Extreme waarde:

Verder heeft een randminimum en een minimum .

**S5**

voor Buigpunt: (-1, 0)

**S6**

, dus is de scheve asymptoot van .

**S7**

, dus is de scheve asymptoot.

**S8**

**a**

en dus en raken elkaar in (0, -12)

**b**

De hoek waaronder f en g elkaar snijden in B is

**c**

of

Extreme waarden: en

**d**

geeft . Buigpunt: (1, -6)

**e**

**f** perforatie als , dus als

mits perforatie:

**g**

en ( vervalt, want daar is ook gelijk aan 0)

, dus is de horizontale asymptoot.

**Test jezelf**

**T1**

**a** geeft (-2, 0)

**b**

en

**T2**

**a**

Extreme waarde is

**b/c**

De afgeleide bestaat niet voor en

De grafiek van heeft een verticale raaklijn in buigpunt (5, 0) (zie plot)

**T3**

**a**

, dus scheve asymptoot:

**b**

, dus scheve asymptoot:

**T4**

en

de grafiek maakt een sprong bij .

**T5**

**a** **b**

**c**

**d** De grafiek van is symmetrisch in de -as.

**e** De grafiek van is symmetrisch in de lijn .

**T6**

**a**

Met is in de discriminant kleiner dan 0.

De vergelijking heeft geen oplossingen.

**b** , dus scheve asymptoot:

, dus scheve asymptoot:

**T7**

**a**

**b**

geen oplossing

Buigpunten: (0, 0) en

**c**

**d**

voor alle waarden van , dus de vergelijking heeft twee oplossingen

(en de grafiek van dus twee buigpunten).

**T8**

**a**

én : of én : .

**b**

geen oplossing

**c**

en deze vergelijking heeft geen oplossingen

**d** bestaat niet en bestaat ook niet

**e** verticale asymptoten: en .

horizontale asymptoot:

**T9**

**a**

**b**

De grafiek van is symmetrisch in de -as, dus is ook een scheve asymptoot van de grafiek van .