Hoofdstuk 22: ***Afsluiting meetkunde***

**V1**

**a** $AFDE$ is een parallellogram, dus $ED=3$

$∆ABC\~∆EDC$, dus $CD=\frac{3}{9}∙8=2\frac{2}{3}$ en $EC=\frac{3}{9}∙7=2\frac{1}{3}$

**b** De vergrotingsfactor is $\frac{FB}{AB}=\frac{6}{9}$

**V2** In elke gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk aan elkaar. Als van twee gelijkbenige driehoeken de tophoeken gelijk zijn, dan zijn de basishoeken ook gelijk. De twee driehoeken zijn dan gelijkvormig (*hh*).

**V3**

**a** $∆ASM\~∆CSB$ (*hh*) met vergrotingsfactor $\frac{BC}{AM}=\frac{10}{5}=\frac{2}{1}$

 $BS=\frac{2}{3}∙BM=\frac{2}{3}∙\sqrt{5^{2}+12^{2}}=8\frac{2}{3}$

**b** $∆ABT\~∆CNT$ (*hh*) met vergrotingsfactor $\frac{CN}{AB}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

 $AT=\frac{3}{4}∙AC=\frac{3}{4}∙\sqrt{12^{2}+10^{2}}=1\frac{1}{2}\sqrt{61}$

**V4**

**a** $β=180°-50°-80°=50°$ **b** $γ=180°-60°-56°=64°$

$AC=6$ (gelijkbenige driehoek) $\frac{45}{\sin(\left(56°\right))}=\frac{BC}{\sin(\left(60°\right))}$ $BC=\frac{45\sin(\left(60°\right))}{\sin(\left(56°\right))}≈47,0$

$\frac{6}{\sin(\left(50°\right))}=\frac{AB}{\sin(\left(80°\right))}$ $\frac{45}{\sin(\left(56°\right))}=\frac{AB}{\sin(\left(64°\right))}$ $AB=\frac{45\sin(\left(64°\right))}{\sin(\left(56°\right))}≈48,8$

 $AB=\frac{6\sin(\left(80°\right))}{\sin(\left(50°\right))}≈7,7$

**c** $12^{2}=7^{2}+6^{2}-2∙7∙6∙\cos(\left(α\right))$ **d** $AC^{2}=9^{2}+8^{2}-2∙9∙8∙\cos(\left(45°\right))=43,1…$

 $\cos(\left(α\right))=-0,70…$ $AC≈6,6$

 $α≈135°$ $\frac{6,6}{\sin(\left(45°\right))}=\frac{8}{\sin(\left(α\right))}$

 $\frac{12}{\sin(\left(135°\right))}=\frac{7}{\sin(\left(β\right))}$ $\sin(\left(α\right))=\frac{8\sin(\left(45°\right))}{6,6}=0,86…$

 $\sin(\left(β\right))=\frac{7\sin(\left(135°\right))}{12}=0,41…$ $α≈59°$ en dan is $γ≈76°$

 $β≈25°$ en dan is $γ≈20°$

**V5**

**a** $BC^{2}=8^{2}+6^{2}-2∙8∙6∙\cos(\left(50°\right))$ $CD^{2}=4^{2}+6^{2}-2∙4∙6∙\cos(\left(50°\right))$

 $BC^{2}=38,2…$ geeft $BC≈6,2$ $CD^{2}=21,1…$ geeft $CD≈4,6$

**b** $\frac{6,2}{\sin(\left(50°\right))}=\frac{6}{\sin(\left(β\right))}$ $\frac{4,6}{\sin(\left(50°\right))}=\frac{4}{\sin(\left(∠ACD\right))}$

$\sin(\left(β\right))=\frac{6\sin(\left(50°\right))}{6,2}=0,74…$ $\sin(\left(∠ACD\right))=\frac{4\sin(\left(50°\right))}{4,6}=0,66…$

 $β≈48°$ $∠ACD≈42°$

**V6**

**a** $\cos(\left(α\right))=\frac{\left|3∙1+-2∙2\right|}{\sqrt{3^{2}+(-2)^{2}}∙\sqrt{1^{2}+2^{2}}}=0,12…$ geeft $α≈83°$

**b** De hellingshoek van $l$ is $tan^{-1}\left(4\right)≈76°$ en die van $m$ is $tan^{-1}\left(-3\right)≈-72°$

 De hoek tussen $l$ en $m$ is $180°-\left(76°+72°\right)≈32°$

**c** $\vec{rv\_{l}}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{2}\right)$ en $\vec{rv\_{m}}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{-3}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{-1}\right)$

 $\cos(\left(α\right))=\frac{\left|3∙2+2∙-1\right|}{\sqrt{3^{2}+2^{2}}∙\sqrt{2^{2}+(-1)^{2}}}=0,49…$ geeft $α≈60°$

**d** $l$ gaat door (4, 0) en (0, 5). Dan is $\vec{rv\_{l}}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{-5}\right)$

m gaat door (3, 0) en (0, -12). Dan is $\vec{rv\_{m}}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{12}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{4}\right)$

 $\cos(\left(α\right))=\frac{\left|4∙1+ -5∙4\right|}{\sqrt{4^{2}+(-5)^{2}}∙\sqrt{1^{2}+4^{2}}}=0,60…$ geeft $α≈53°$

**V7**

**a** $3+3λ=-2-μ$ $1+4λ=1+2μ$

$μ=-3λ-5$ $1+4λ=1+2\left(-3λ-5\right)=-6λ-9$

 $10λ=-10$

 $λ=-1$

 Het snijpunt is (0, -3) en ligt op de $y$-as.

**b** $\cos(\left(α\right))=\frac{\left|3∙-1+4∙2\right|}{\sqrt{3^{2}+4^{2}}∙\sqrt{(-1)^{2}+2^{2}}}=0,44…$ geeft $α≈63°$

**Lijnen en cirkels**

**1** $3\left(4+λ\right)+4\left(2-3λ\right)=38$

 $12+3λ+8-12λ=38$

 $9λ=-18$

 $λ=-2$ het snijpunt: (2, 8)

**2** $(-1+λ)^{2}+(2-3λ)^{2}-4\left(-1+λ\right)-6\left(2-3λ\right)=7$

 $1-2λ+λ^{2}+4-12λ+9λ^{2}+4-4λ-12+18λ=7$

 $10λ^{2}-10=10\left(λ^{2}-1\right)=0$

 $λ=-1∨λ=1$

 $S$(-2, 5) en $T$(0, -1)

**3** Het middelpunt van de cirkel is $M$(3, -1)

 $\vec{MP}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{2}\right)$. Deze staat loodrecht op de raaklijn: $4x+2y=c$

 $P$(7, 1) invullen: $4x+2y=30$ ofwel: $2x+y=15$

**4**

**a** De lijn gaat door $P$, dus steunvector $\vec{OP}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{15}{5}\right)$

 De richtingscoëfficiënt is $m$; dan is de richtingsvector $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{m}\right)$

**b** $x=15+λ$ en $y=5+λm$

**c** $(15+λ)^{2}+(5+λm)^{2}=50$

 $225+30λ+λ^{2}+25+10mλ+m^{2}λ^{2}=50$

 $\left(1+m^{2}\right)λ^{2}+\left(30+10m\right)λ+200=0$

 $D=(30+10m)^{2}-4∙\left(1+m^{2}\right)∙200=0$

 $900+600m+100m^{2}-800-800m^{2}=0$

 $100\left(-7m^{2}+6m+1\right)=100\left(-7m-1\right)\left(m-1\right)=0$

 $m=-\frac{1}{7}∨m=1$

 Raaklijnen: $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{15}{5}\right)+λ\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{-1}\right)$ en $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{15}{5}\right)+λ\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}\right)$

**d** $x+7y=50$ $x-y=10$

 $(-7y+50)^{2}+y^{2}=50$ $(y+10)^{2}+y^{2}=50$

 $50y^{2}-700y+2450=0$ $2y^{2}+20y+50=0$

 $50(y-7)^{2}=0$ $2(y+5)^{2}=0$

 $y=7$ $y=-5$

 $R\_{1}(1, 7)$ $R\_{2}(5, -5)$

**5**

**a** $13-10x-10y=3$

 $x+y=1$

**b** $x^{2}+(-x+1)^{2}=13$

 $2x^{2}-2x-12=2\left(x^{2}-x-6\right)=2\left(x-3\right)\left(x+2\right)=0$

 $x=3∨x=-2$

 $R\_{1}(3, -2)$ en $R\_{2}(-2, 3)$

**6**

**a** raaklijn aan cirkel

**b** $OP=\sqrt{15^{2}+5^{2}}=5\sqrt{10}$

 $AP=\sqrt{(5\sqrt{10})^{2}-(\sqrt{50})^{2}}=10\sqrt{2}$

 $(x-15)^{2}+(y-5)^{2}=200$

**c** $x^{2}-30x+225+y^{2}-10y+25=200$ $x^{2}+(-3x+10)^{2}=50$

 $x^{2}+y^{2}-30x-10y+50=0$ $10x^{2}-60x+50=0$

 $3x+y=10$ $10\left(x^{2}-6x+5\right)=0$

 $10\left(x-1\right)\left(x-5\right)=0$

 $x=1∨x=5$

 De raakpunten zijn: $A$(1, 7) en $B$(5, -5)

**7**

**a** -

**b** De loodlijn op $l$ door $R$(4, 3) gaat door het middelpunt.

 $3x-2y=c$ gaat door $R$: $3x-2y=6$

 Deze snijden met de $x$-as geeft $x\_{M}=2$

 $r=\sqrt{2^{2}+3^{2}}=\sqrt{13}$

 $c: (x-2)^{2}+y^{2}=13$

**8** $D$ ligt op cirkel $c\_{1}$ met middellijn $AB$: $∠ADB=90°$ (Thales)

 $D$ ligt op cirkel $c\_{2}$ met middellijn $AC$: $∠ADC=90°$ (Thales)

 $∠BDC=180°$, dus $D$ ligt op $BC$.

**9**

**a** $x^{2}+y^{2}-6x+18y+72=0$

 $x^{2}-6x+9-9+y^{2}+18y+81-81+72=0$

 $(x-3)^{2}-9+\left(y+9\right)^{2}-81+72=0$

 $(x-3)^{2}+\left(y+9\right)^{2}=18$ $M(3, -9)$ en $r\_{1}=3\sqrt{2}$

 $x^{2}+y^{2}+12x-6y+36=0$

 $x^{2}+12x+36-36+y^{2}-6y+9-9+36=0$

 $(x+6)^{2}+\left(y-3\right)^{2}=9$ $N(-6, 3)$ en $r\_{2}=3$

**b** $PR\_{2}=p+6=PR\_{1}$

 $PR\_{1}^{2}+(3\sqrt{2})^{2}=PM^{2}$

 $(p+6)^{2}+18=(p-3)^{2}+9^{2}$

 $p^{2}+12p+36+18=p^{2}-6p+9+81$

 $18p=36$

 $p=2$

**X1** **Drie cirkels**

 de cirkels snijden met $y=x$:

 $x^{2}+x^{2}=50$ $(x-12)^{2}+(x-12)^{2}=128$

 $x^{2}=25$ $(x-12)^{2}=64$

 $x\_{A}=-5∨x=5$ $x-12=-8∨x-12=8$

 $x=4$ $x\_{B}=20$

 Het middelpunt van $c\_{3}$ ligt precies tussen $A$ en $B$: $(7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$

**X2 Raaklijnen aan cirkels**

**a** $∠OAP=∠MBP=90°$ (raaklijn aan cirkel)

 $∆OAP\~∆MBP$ met verhouding 5:3

 $\frac{p-12}{p}=\frac{3}{5}$

 $5p-60=3p$

 $p=30$ $P$(30, 0)

**b** $AB=AP-BP=\sqrt{30^{2}-5^{2}}-\sqrt{18^{2}-3^{2}}=5\sqrt{35}-3\sqrt{35}=2\sqrt{35}$

**c** $∠OCQ=∠MDQ=90°$ (raaklijn aan cirkel) en $∠OQC=∠MQD$ (overstaande hoeken)

 $∆OQC\~∆MQD$ met verhouding 5:3

 $OQ=\frac{5}{8}∙OM=\frac{5}{8}∙12=7\frac{1}{2}$ $Q(7\frac{1}{2}, 0)$

**d** $CD=CQ+DQ=\sqrt{(7\frac{1}{2})^{2}-5^{2}}+\sqrt{(4\frac{1}{2})^{2}-3^{2}}=2\frac{1}{2}\sqrt{5}-1\frac{1}{2}\sqrt{5}=\sqrt{5}$

**Afstanden en hoeken**

**10**

**a** $\cos(\left(∠APQ\right))=\frac{PQ}{AP}$ **b** $\vec{PA}∙\vec{n\_{l}}=\left|\vec{PA}\right|∙\left|\vec{n\_{l}}\right|∙\cos(\left(∠APQ\right))$

 $PQ=AP∙\cos(\left(∠APQ\right))$ omdat $\vec{n\_{l}}$ tegengesteld is aan $\vec{PQ}$

**c** $\vec{n\_{l}}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}\right)$ en $\vec{PA}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-7}{-1}\right)$

 $PQ=AP∙\frac{\left|\vec{PA}∙\vec{n\_{l}}\right|}{PA∙\left|\vec{n\_{l}}\right|}=\frac{\left|2∙-7+3∙-1\right|}{\sqrt{2^{2}+3^{2}}}=\frac{17}{\sqrt{13}}$

**11**

**a** $\vec{PA}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{r-p}{s-q}\right)$ en $\vec{PQ}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}\right)$

**b** $d\left(P, l\right)=\left|\vec{PQ}\right|=\left|\vec{PA}\right|∙\cos(\left(∠P\right))=\left|\vec{PA}\right|∙\frac{\left|\vec{PA}∙\vec{PQ}\right|}{\left|\vec{PA}\right|∙\left|\vec{PQ}\right|}=\frac{\left|a\left(r-p\right)+b\left(s-q\right)\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}=$

 $=\frac{\left|ar-ap+bs-bq\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}=\frac{\left|-bq-ap+ar+bs\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}=\frac{\left|bq+ap-ar-bs\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$

**c** $d\left(P, l\right)=\frac{\left|bq+ap+c\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$

**12**

**a** $d\left(P, l\right)=\frac{\left|-3-2∙7+4\right|}{\sqrt{(-2)^{2}+1^{2}}}=2\frac{3}{5}\sqrt{5}$ **c** $d\left(P, l\right)=\frac{\left|-1+6-5\right|}{\sqrt{1^{2}+1^{2}}}=0$

**b** $l:12x+5y=60$ **d** $l:x-3y=-6$

 $d\left(P, l\right)=\frac{\left|12∙0+5∙0-60\right|}{\sqrt{12^{2}+5^{2}}}=4\frac{8}{13}$ $d\left(P, l\right)=\frac{\left|-4-3∙2+6\right|}{\sqrt{1^{2}+(-3)^{2}}}=\frac{2}{5}\sqrt{10}$

**13**

**a** $d\left(P, l\right)=\frac{\left|4p-3q+12\right|}{\sqrt{4^{2}+(-3)^{2}}}=\frac{\left|4p-3q+12\right|}{5}$ **b** $d\left(P, m\right)=\frac{\left|5p+12q-60\right|}{\sqrt{5^{2}+12^{2}}}=\frac{\left|5p+12q-60\right|}{13}$

**c** $\frac{\left|4p-3q+12\right|}{5}=\frac{\left|5p+12q-60\right|}{13}$

 $13∙\left|4p-3q+12\right|=5∙\left|5p+12q-60\right|$

 $13\left(4p-3q+12\right)=5\left(5p+12q-60\right)∨13\left(4p-3q+12\right)=-5(5p+12q-60)$

 $52p-39q+156=25p+60q-300∨52p-39q+156=-25p-60q+300$

 $27p-99q+456=0∨77p+21q-144=0$

 $9p-33q+152=0∨77p+3q-144=0$

 De bissectrices: $9x-33y=-152$ en $77x+3y=144$



**14**

**a** $l:x-2y=0$

 $d\left(M, l\right)=MP$ met $M$(0, $p$)

 $\frac{\left|0-2p\right|}{\sqrt{1^{2}+(-2)^{2}}}=\sqrt{(-8)^{2}+(14-p)^{2}}$

 $2p=\sqrt{5}∙\sqrt{p^{2}-28p+260}$

 $4p^{2}=5(p^{2}-28p+260)$

 $p^{2}-140p+1300=\left(p-10\right)\left(p-130\right)=0$

 $p=10∨p=130$

 $x^{2}+(y-10)^{2}=80$ en $x^{2}+(y-130)^{2}=13 520$

**15** $P(p, q)$

 $d\left(P, l\right)=q+2$ en $PA=\sqrt{(-p)^{2}+(2-q)^{2}}$

 $(q+2)^{2}=p^{2}+4-4q+q^{2}$

 $q^{2}+4q+4=p^{2}+4-4q+q^{2}$

 $8q=p^{2}$

 $q=\frac{1}{8}p^{2}$

 Dus $P$ ligt op de parabool met vergelijking $y=\frac{1}{8}x^{2}$

**16**

**a** $rc\_{AB}=\frac{-6--2}{2--4}=-\frac{2}{3}$ $rc\_{BC}=\frac{2--6}{6-2}=2$

 $\tan(\left(α\right))=-\frac{2}{3}$ $\tan(\left(β\right))=2$

 $α=-33,69…°$ $β=63,43…°$

 De hoek tussen $AB$ en $BC$ is ongeveer 83°

**b** $\vec{CB}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-4}{-8}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}\right)$ en $\vec{CA}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-10}{-4}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{2}\right)$

 $\cos(\left(∠ACB\right))=\frac{\left|5+4\right|}{\sqrt{5}∙\sqrt{29}}=0,74….$

 $∠ACB≈42°$

**c** $AB=\sqrt{6^{2}+(-4)^{2}}=\sqrt{52}$, $BC=\sqrt{4^{2}+8^{2}}=\sqrt{80}$ en $AC=\sqrt{10^{2}+4^{2}}=\sqrt{116}$

 $80=52+116-2∙\sqrt{52}∙\sqrt{116}∙\cos(\left(∠BAC\right))$

 $\cos(\left(∠BAC\right))=0,56…$

 $∠BAC≈55°$

**17** $rv\_{l}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}\right)$, $rv\_{m}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{-1}\right)$ en $rv\_{n}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{-1}\right)$

 $\cos(\left(α\right))=\frac{10+1}{\sqrt{5}∙\sqrt{26}}=0,96…$ $\cos(\left(∠(l, m\right)))=\frac{2+-1}{\sqrt{2}∙\sqrt{5}}=0,31…$

 $α≈15°$ $∠(l, m)≈72°$ $β≈108°$ en $γ≈56°$

**18** $c$ is de cirkel met middelpunt $M$(0, 0) en straal $5\sqrt{2}$

 $PM=\sqrt{15^{2}+5^{2}}=5\sqrt{10}$

 $\sin((\frac{1}{2}α))=\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{10}}=0,44…$

 $\frac{1}{2}α=26,5…°$

 De hoek tussen de raaklijnen is $α≈53°$

**19** $\cos(\left(45°\right))=\frac{\left|2+a\right|}{\sqrt{5}∙\sqrt{1+a^{2}}}$

 $\frac{1}{2}\sqrt{2}∙\sqrt{5}∙\sqrt{1+a^{2}}=\left|2+a\right|$

 $2\frac{1}{2}\left(1+a^{2}\right)=(2+a)^{2}$

 $5+5a^{2}=2(4+4a+a^{2})$

 $3a^{2}-8a-3=\left(3a+1\right)\left(a-3\right)=0$

 $a=-\frac{1}{3}∨a=3$

**X3 De hoek tussen gemeenschappelijke raaklijnen**

**a** $M$(-5, -1) en straal 2 $N$(3, 5) en straal 5

 $d\left(c\_{1}, c\_{2}\right)=MN-2-5=\sqrt{8^{2}+6^{2}}-2-5=3$

**b** $∆PMA\~∆PNB$ met vergrotingsfactor $2\frac{1}{2}$

 $2\frac{1}{2}∙PM=PM+10$ $\sin((\frac{1}{2}α))=\frac{2}{6\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$

 $1\frac{1}{2}∙PM=10$ $\frac{1}{2}α=17,4…°$

 $PM=6\frac{2}{3}$ $∠\left(l, m\right)=α≈35°$

**c** $\vec{MP}=\frac{2}{3}∙\vec{NM}=\frac{2}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-8}{-6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-5\frac{1}{3}}{-4}\right)$

 $\vec{OP}=\vec{OM}+\vec{MP}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-5}{-1}\right)+\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-5\frac{1}{3}}{-4}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-10\frac{1}{3}}{-5}\right)$ dus $P(-10\frac{1}{3}, -5)$

**X4 Hoogtelijnen en bissectrices**

 $BC:y=-\frac{4}{3}x+20$

 $AD:y=\frac{3}{4}x+b$ gaat door $A$(-15, 0): $b=0-\frac{3}{4}∙-15=11\frac{1}{4}$

 $-\frac{4}{3}x+20=\frac{3}{4}x+11\frac{1}{4}$

 $2\frac{1}{12}x=8\frac{3}{4}$

 $x\_{D}=4\frac{1}{5}$ $y\_{D}=14\frac{2}{5}$

 $OD=\sqrt{(4\frac{1}{5})^{2}+(14\frac{2}{5})^{2}}=15=AO$

 $∆AOD$ is een gelijkbenige driehoek: $∠OAD=∠ODA$

$ED∥AB$, dus $∠OAD=∠ADE$ ($Z$-hoeken). Dus $∠ODA=∠ADE$: $AD$ is de bissectrice van $∠ODE$.

 $BE$ is de bissectrice van $∠OED$ (bewijs op dezelfde manier).

**Zwaartepunten**

**20** $\vec{OZ}=\frac{3}{18}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{4}\right)+\frac{6}{18}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{-4}\right)+\frac{9}{18}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{12}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7\frac{1}{3}}{5\frac{1}{3}}\right)$ $Z(7\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3})$

**21**

**a** $\vec{OZ}=\frac{1}{7}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-2}{-2}\right)+\frac{4}{7}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3}\right)+\frac{2}{7}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1\frac{3}{7}}\right)$ $Z(2, 1\frac{3}{7})$

**b** $\vec{OZ}=\frac{1}{10}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-2}{-2}\right)+\frac{4}{10}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3}\right)+\frac{2}{10}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}\right)+\frac{3}{10}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{p}{q}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}\right)$

 $1\frac{2}{5}+\frac{3}{10}p=2$ $1+\frac{3}{10}q=1$

 $\frac{3}{10}p=\frac{3}{5}$ $q=0$

 $p=2$

**22**

**a** De massa’s in $A$ en $B$ zijn even groot, dus $D$ is het midden van $A$ en $B$: $(5, 4\frac{1}{2})$

**b** $\vec{OE}=\frac{2}{8}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}\right)+\frac{2}{8}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{6}\right)+\frac{4}{8}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{0}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{2\frac{1}{4}}\right)$ $E(5, 2\frac{1}{4})$

**c** $\vec{OE}=\frac{4}{8}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{4\frac{1}{2}}\right)+\frac{4}{8}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{0}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{2\frac{1}{4}}\right)$

**d** $rc\_{AC}=\frac{0-3}{5-2}=-1$ $rc\_{BE}=\frac{6-2\frac{1}{4}}{8-5}=1\frac{1}{4}$ $-x+5=1\frac{1}{4}x-4$

 $y=-x+b$ $y=1\frac{1}{4}x+b$ $2\frac{1}{4}x=9$

 $b=3+2=5$ $b=6-1\frac{1}{4}∙8=-4$ $x\_{F}=4$ $y\_{F}=1$

**e** van $A$ en $C$: $\vec{OF}=\frac{2}{6}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}\right)+\frac{4}{6}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{0}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{1}\right)$

**23**

**a** $ABFK$ en $KEGD$ met $K$(2, 5)

 De zwaartepunten zijn: (7, 3) en (5, 6)

**b** $O\_{ABFK}=40$ en $O\_{KEGD}=12$

**c** $\vec{OZ}=\frac{40}{52}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{3}\right)+\frac{12}{52}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6\frac{7}{13}}{3\frac{9}{13}}\right)$

**24**

**a** rechthoek $ABCE$ en driehoek $CDE$

 $Z\_{ABCE}(3, 1\frac{1}{2})$ met massa 18 en $\vec{OZ\_{CDE}}=\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{3}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{3}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{3\frac{2}{3}}\right)$ met massa 6.

 $ABCDE$: $\vec{OZ}=\frac{18}{24}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{1\frac{1}{2}}\right)+\frac{6}{24}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{3\frac{2}{3}}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{2\frac{1}{24}}\right)$ $Z(3, 2\frac{1}{24})$

**b** rechthoek $ABCE$ en driehoek $CDE$

 $Z\_{ABCE}(3, 1\frac{1}{2})$ met massa 18 en $\vec{OZ\_{CFE}}=\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{3}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{12}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{3}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{6}\right)$ met massa 27

 $ABCFE$: $\vec{OZ}=\frac{18}{45}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{1\frac{1}{2}}\right)+\frac{27}{45}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{4\frac{1}{5}}\right)$ $Z(3, 4\frac{1}{5})$

**25**

**a** $AED$: $\vec{OZ\_{1}}=\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{0}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{0}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1\frac{1}{3}}{2}\right)$ met massa 6

 $EFCD$: $Z\_{2}\left(4, 3\right)$ met massa 24

 $FBC$: $\vec{OZ\_{3}}=\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{0}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7\frac{1}{3}}{2}\right)$ met massa 12

 $\vec{OZ}=\frac{6}{42}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1\frac{1}{3}}{2}\right)+\frac{24}{42}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{3}\right)+\frac{12}{42}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7\frac{1}{3}}{2}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4\frac{4}{7}}{2\frac{4}{7}}\right)$ $Z(4\frac{4}{7}, 2\frac{4}{7})$

**b** $ACD$: $\vec{OZ\_{1}}=\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{0}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{6}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2\frac{2}{3}}{4}\right)$ met massa $\frac{1}{2}∙4∙6=12$

 $ABD$: $\vec{OZ\_{2}}=\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{0}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{0}\right)+\frac{1}{3}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5\frac{1}{3}}{2}\right)$ met massa $\frac{1}{2}∙10∙6=30$

 $\vec{OZ}=\frac{12}{42}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2\frac{2}{3}}{4}\right)+\frac{30}{42}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5\frac{1}{3}}{2}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4\frac{4}{7}}{2\frac{4}{7}}\right)$ $Z(4\frac{4}{7}, 2\frac{4}{7})$



**26**

**a** $E$ is het snijpunt van de lijn door $B$ naar het

midden van $AD$ en door $D$ naar het midden

van $AB$.

 $F$ is het snijpunt van de lijn door $B$ naar het

midden van $DC$ en door $D$ naar het midden

van $BC$.

**b** Het zwaartepunt van vierhoek $ABCD$ is het

zwaartepunt van de puntmassa’s $E$ en F met

massa’s gelijk aan de oppervlakte van de

driehoeken $ABD$ en $BCD$.

**c** $G$ is het snijpunt van de lijn door $A$ naar het

midden van $BC$ en door $C$ naar het midden

van $AB$.

 $H$ is het snijpunt van de lijn door $A$ naar het

midden van $CD$ en door $C$ naar het midden

van $AD$.

**d** $Z$ is het snijpunt van $EF$ en $GH$.

**e**

**27**

**a** Neem $K$(3, 0) en $L$(0, 6)

 $OABL$: $Z\_{1}(6, 3)$ met gewicht 72 en $CDEL$: $Z\_{2}(1\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$ met gewicht 9

**b** $OKDE$: $Z\_{3}(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ met gewicht 27 en $ABCK$: $Z\_{4}(7\frac{1}{2}, 3)$ met gewicht 54

**c** Het zwaartepunt is het snijpunt van $Z\_{1}Z\_{2}$ en $Z\_{3}Z\_{4}$.

**d** $\vec{OZ}=\frac{72}{81}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{3}\right)+\frac{9}{81}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}\right)$

**X5 Het zwaartepunt van een veelhoek**

**a** De zwaartepunten van de driehoeken zijn: (-6, 2); (-3, 4); (0, 2); (3, 4) en (6, 2)

 $\vec{OZ}=\frac{1}{5}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-6}{2}\right)+\frac{1}{5}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-3}{4}\right)+\frac{1}{5}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{2}\right)+\frac{1}{5}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{4}\right)+\frac{1}{5}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{2}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{2\frac{4}{5}}\right)$ $Z(0, 2\frac{4}{5})$

**b** de oppervlakte van het trapezium is 90

 Het zwaartepunt van het vierkant is (0, -3) met gewicht 36

 $\vec{OZ}=\frac{90}{126}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{2\frac{4}{5}}\right)+\frac{36}{126}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{-3}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1\frac{1}{7}}\right)$ $Z(0, 1\frac{1}{7})$

**c** $\frac{90}{90+6p}∙2\frac{4}{5}+\frac{6p}{90+6p}∙-\frac{1}{2}p=0$

 $252-3p^{2}=0$

 $p^{2}=84$

 $p=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

**Redeneren en rekenen**

**28**

**a** $DE:y=ax+4$ raakt aan de cirkel $c: (x-2)^{2}+y^{2}=4$

 $(x-2)^{2}+(ax+4)^{2}=4$

 $\left(1+a^{2}\right)x^{2}+\left(8a-4\right)x+16=0$

 $D=(8a-4)^{2}-4∙\left(1+a^{2}\right)∙16=0$

 $64a^{2}-64a+16-64-64a^{2}=-64a-48=0$

 $a=-\frac{3}{4}$

**b** $y=-\frac{3}{4}x+4$ $y\_{E}=-\frac{3}{4}∙4+4=1$ $E$(4, 1)

**c** $EC=3$ en $O\_{CDE}=\frac{1}{2}∙4∙3=6$

**d** $MP⊥DE$ (raaklijn aan cirkel) en $∠MAD=90°$

 $MA=MP$ (straal) dus $∆AMD\~∆PMD$ met factor 1: $∠AMD=∠PMD$

 Op dezelfde manier kun je aantonen dat $∠PME=∠BME$

 $∠AMB=180°$, dus $∠DME=\frac{180°}{2}=90°$

**e** Stel $∠AMD=α=∠PMD$

 Dan is $∠ADM=90°-α$

 $∠EMP=90°-∠PMD=90°-α$

 $∠BME=∠EMP=90°-α=∠ADM$

 Dus $∆AMD\~∆BME$ (gelijke hoeken) met vergrotingsfactor 2

**f** $BE=\frac{1}{2}∙AM=1$ $CE=BC-BE=3$ en $O\_{ECD}=\frac{1}{2}∙4∙3=6$

**g** $PE=EB=x$ (raaklijnstukken) en $CE=4-x$

 $DP=DA=4$

 $(4-x)^{2}+4^{2}=(4+x)^{2}$

 $16-8x+x^{2}+16=16+8x+x^{2}$

 $16x=16$

 $x=1$

**h** Tja, weer 6!

**29** $AB:AC:BC=1:2:\sqrt{3}$ dus $BC=6\sqrt{3}$ en $AC=12$

 $O\_{ABC}=\frac{1}{2}∙6∙6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

 $AD:AB:BD=1:2:\sqrt{3}$ dus $AD=3$ en $BD=3\sqrt{3}$

 $BE:AE:AB=1:2:\sqrt{3}$ dus $BE=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

 $O\_{BCD}=\frac{1}{2}∙\left(12-3\right)∙3\sqrt{3}=13\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}∙6\sqrt{3}∙h$ geeft $h=4\frac{1}{2}$

 $O\_{DEC}=\frac{1}{2}∙(6\sqrt{3}-2\sqrt{3})∙4\frac{1}{2}\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

**30**

**a** $CA=CB=\sqrt{8^{2}+8^{2}}=8\sqrt{2}$

 $∠CPN=90°$ (raaklijn aan cirkel) en $NP=NM=4$

 $CP=\sqrt{12^{2}-4^{2}}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

**b** $C$ ligt op de cirkel met middellijn $AB$, dus $∠ACB=90°$.

 Stel $∠ACP=α$ en $∠BCP=β$ en dus $α+β=90°$

 $∠APC=\frac{180°-α}{2}=90°-\frac{1}{2}α$ en $∠BPC=\frac{180°-β}{2}=90°-\frac{1}{2}β$

 $∠APB=90°-\frac{1}{2}α+90°-\frac{1}{2}β=180°-\frac{1}{2}\left(α+β\right)=135°$

**31** $MA=MB$

 $(6-p)^{2}+(8-q)^{2}=(-p)^{2}+(-10-q)^{2}$

 $p^{2}-12p+36+q^{2}-16q+64=p^{2}+q^{2}+20q+100$

 $-12p=36q$

 $p=-3q$ $M(-3q, q)$

 $MB=d(M, l)$

 $\sqrt{(3q)^{2}+\left(-10-q\right)^{2}}=\frac{\left|-9q+4q-60\right|}{\sqrt{3^{2}+4^{2}}}$

 $5\sqrt{10q^{2}+20q+100}=-5q-60$

 $25\left(10q^{2}+20q+100\right)=25q^{2}+600q+3600$

 $225q^{2}-100q-1100=25\left(9q^{2}-4q-44\right)=0$

 $q=\frac{4-\sqrt{1600}}{18}=-2∨q=\frac{4+\sqrt{1600}}{18}=2\frac{4}{9}$

 $(x-6)^{2}+(y+2)^{2}=100$ en $(x+7\frac{1}{3})^{2}+(y-2\frac{4}{9})^{2}=208\frac{52}{81}$

**32**

**a** $\vec{AC}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{4}\right)$, dus een vergelijking van de lijn $AC$ is: $4x-3y=-14$

$\vec{BC}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-3}{4}\right)$, dus een vergelijking van de lijn $BC$ is: $4x+3y=22$

$d\left(M, AC\right)=\frac{\left|4⋅6-3⋅6+14\right|}{\sqrt{4^{2}+\left(-3\right)^{2}} }=4$ en $d\left(M, BC\right)=\frac{\left|4⋅6+3⋅6-22\right|}{\sqrt{4^{2}+3^{2}} }=4$ en dus ligt $M$ op de bissectrice van $∠PCB$

 $d\left(M, AB\right)=MQ=4$ en dus ligt $M$ ook op de bissectrice van $∠CBQ$

**b** $d\left(M, AB\right)=d(M, AC)$, dus M ligt op de bissectrice van $∠BAC$.

**c** $(x-6)^{2}+(y-6)^{2}=16$

**33**

**a** $\vec{e}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{s}\right),$ $\vec{f}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{s}\right)$, $\vec{g}=\frac{1}{3}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{s}\right)$ en $\vec{h}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{d}+\vec{s}\right)$

**b** $\vec{EF}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{s}\right)-\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{s}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$

 $\vec{HG}=\frac{1}{3}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{s}\right)-\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{d}+\vec{s}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$: zelfde richting dus $EF∥HG$

 $\vec{EH}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{d}+\vec{s}\right)-\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{s}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{d}-\vec{b}\right)=\vec{FG}$, dus ook $EH∥FG$

Vierhoek $EFGH$ heeft twee paar evenwijdige zijden, dus $EFGH$ is een parallellogram.

**c** $\vec{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, dus $EF∥AC∥HG$ en $\vec{BD}=\vec{d}-\vec{b}$, dus $EH∥BD∥FG$.

**d** **heb nog even geen idee hoe deze moet**

**34**

**a** $\vec{b}=\vec{s}-\vec{a}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{p}\right)-\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{0}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-3}{p}\right)$ **b** $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{9+p^{2}}=7$

 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{9+p^{2}}=5$ $9+p^{2}=49$

 $9+p^{2}=25$ $p^{2}=40$

 $p^{2}=16$ $p=-2\sqrt{10}∨p=2\sqrt{10}$

 $p=-4∨p=4$

**35**

**a** $d\left(P, l\right)=d(P, m)$

 $\frac{\left|x-3y+16\right|}{\sqrt{1^{2}+\left(-3\right)^{2}}}=\frac{\left|3x-y-8\right|}{\sqrt{3^{2}+\left(-1\right)^{2}}}$

 $x-3y+16=3x-y-8∨x-3y+16=-3x+y+8$

 $2x+2y-24=0∨4x-4y+8=0$

 $y=-x=12$ en $y=x+2$

**b** $M(p, p+2)$

 $d\left(M, l\right)=MA$

 $\frac{\left|p-3\left(p+2\right)+16\right|}{\sqrt{10}}=\sqrt{\left(p-1\right)^{2}+\left(p+3\right)^{2}}$

 $\left|-2p+10\right|=\sqrt{10}⋅\sqrt{2p^{2}+4p+10}$

 $\left(-2p+10\right)^{2}=10(2p^{2}+4p+10)$

 $16p^{2}+80p=16p\left(p+5\right)=0$

 $p=0∨p=-5$

 Het middelpunt is $M\_{1}\left(0, 2\right)$ met straal $\sqrt{10}$ of $M\_{2}\left(-5, -3\right)$ met straal $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

 $c\_{1}: x^{2}+\left(y-2\right)^{2}=10$ en $c\_{2}: \left(x+5\right)^{2}+\left(y+3\right)^{2}=40$

**36**

**a** $AP=\sqrt{8^{2}+4^{2}}=4\sqrt{5}$ en $BP=\sqrt{2^{2}+4^{2}}=2\sqrt{5}$

**b** $\sqrt{\left(x-1\right)^{2}+y^{2}}=2⋅\sqrt{\left(x-7\right)^{2}+y^{2}}$

 $\left(x-1\right)^{2}+y^{2}=4(\left(x-7\right)^{2}+y^{2})$

 $x^{2}-2x+1+y^{2}=4(x^{2}-14x+49+y^{2})$

 $3x^{2}+3y^{2}-54x+195=3\left(x^{2}-18x+65+y^{2}\right)=0$

 $\left(x-9\right)^{2}+y^{2}=16$

**X6 Hoogtelijnen**

**a** $OB:y=3x$

 $AC:y=-\frac{1}{3}x+b$ en gaat door $A$(5, 0): $b=0+\frac{1}{3}⋅5=1\frac{2}{3}$

 $3x=-\frac{1}{3}x+1\frac{2}{3}$

 $3\frac{1}{3}x=1\frac{2}{3}$

 $x\_{C}=\frac{1}{2}$ en $y\_{C}=1\frac{1}{2}$

 Het midden van $C$ en $D(2, 0)$ is $Q(1\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

 $P(3\frac{1}{2}, 3)$

 $\vec{PQ}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-2\frac{1}{4}}{-2\frac{1}{4}}\right)$, $\vec{CD}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1\frac{1}{2}}{-1\frac{1}{2}}\right)$ en $\vec{PQ}⋅\vec{CD}=0$, dus $\vec{PQ}⊥\vec{CD}$

**b** $∠LSM=90°$, dus $S$ ligt op een cirkel met middellijn $LM$ (Thales); en middelpunt $V$.

 $VS=VM=VL$.

 $∠LTM=90°$, dus $T$ ligt ook op een cirkel met middellijn $LM$ (Thales): $VT=VL$.

Hieruit volgt dat $VT=VS$. Driehoek $VTS$ is een gelijkbenige driehoek. De zwaartelijn uit de top is dezelfde als de hoogtelijn uit de top. Dus $VW⊥ST$.

**Gemengde opdrachten**

**37** Het middelpunt van $c\_{3}$ ligt op de $y$-as.

 $M\_{3}M\_{1}+r\_{1}=r\_{3}$ met $M\_{1}(-5, 5)$, $M\_{3}(0, p)$ en $r\_{3}=p+1$

 $\sqrt{5^{2}+\left(p-5\right)^{2}}+5=p+1$

 $\sqrt{25+p^{2}-10p+25}+5=p+1$

 $p^{2}-10p+50=\left(p-4\right)^{2}=p^{2}-8p+16$

 $2p=34$

 $p=17$

 Het middelpunt van $c\_{3}$ is (0, 17) en straal 18.

**38**

**a** $BC=\sqrt{6^{2}+8^{2}}=10$, dus $∠BAC=90°$

 $A$ ligt op een cirkel met middellijn $BC$ (en dus met middelpunt $M$): $MA=MC=5$

 Driehoek $AMC$ is gelijkbenig.

**b** $∆AMF\~∆CAB$

 $\frac{AM=5}{CA=8}=\frac{MF}{AB=6}=\frac{AF}{CB=10}$

 $MF=\frac{30}{8}=3\frac{3}{4}$ en $AF=\frac{50}{8}=6\frac{1}{4}$

 $O\_{AFDE}=O\_{AMDE}-O\_{AMF}=5^{2}-\frac{1}{2}∙5∙3\frac{3}{4}=15\frac{5}{8}$

**39** $2α+2β=90°$ (hoekensom van een driehoek)

 $α+β=45°$

 $∠ASB=180°-45°=135°$ (hoekensom driehoek)

 $∠ASE=180°-135°=45°$ (gestrekte hoek)

**40** $R\left(4, -4\right)$ en dus is $CR=\sqrt{\left(-2\right)^{2}+12^{2}}=\sqrt{148}$

 $\vec{AC}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{8}\right)$ $\vec{LA}=\vec{AC}\_{R}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{-2}\right)$ $\vec{LQ}=\frac{1}{2}∙\vec{LC}=\frac{1}{2}∙\left(\vec{LA}+\vec{AC}\right)=\frac{1}{2}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{3}\right)$

 $\vec{AQ}=\vec{AL}+\vec{LQ}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-8}{2}\right)+\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{3}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-3}{5}\right)$ $Q(-3, 5)$

 $\vec{AP}=\vec{AB}+\frac{1}{2}∙\left(\vec{BC}+\vec{BC}\_{R}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{0}\right)+\frac{1}{2}∙\left(\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-6}{8}\right)+\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{6}\right)\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{8}{0}\right)+\frac{1}{2}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{14}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{7}\right)$ $P(9, 7)$

 En dus is $QP=\sqrt{12^{2}+2^{2}}=\sqrt{148}$

 Tot slot: $\vec{QP}∙\vec{CR}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{2}\right)∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{-12}\right)=0$, dus is $\vec{QP}⊥\vec{CR}$

**41**

**a** $x^{2}+6x+9+y^{2}-8y+16=25$

 $x^{2}-6x+9+y^{2}-2y+1=10$

 $12x-6y+15=15$

 $6y=12x$

 $y=2x$

**b** $PM=\sqrt{7^{2}+4^{2}}=\sqrt{65}$, $AM=5$ en $AP=\sqrt{65-5^{2}}=2\sqrt{10}$

 $PN=\sqrt{1^{2}+7^{2}}=\sqrt{50}$, $BN=\sqrt{10}$ en $BP=\sqrt{50-10}=2\sqrt{10}$

**c** $P(p, 2p)$

 $AP^{2}=\left(p+3\right)^{2}+\left(2p-4\right)^{2}-25=5p^{2}-10p$

 $BP^{2}=\left(p-3\right)^{2}+\left(2p-1\right)^{2}-10=5p^{2}-10p$

 Dus voor elk punt $P$ op $l$ buiten de cirkel geldt: $AP=BP$

**42**

**a** $Z\_{1}(\frac{1}{2}, 3)$ met massa 6; $Z\_{2}(3\frac{1}{2}, 1)$ met massa 10; $Z\_{3}(3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$ met massa 5 en $Z\_{4}(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ met massa 9.

 $\vec{OZ}=\frac{6}{30}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{1}{2}}{3}\right)+\frac{10}{30}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3\frac{1}{2}}{1}\right)+\frac{5}{30}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}}\right)+\frac{9}{30}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3\frac{1}{5}}{2\frac{9}{10}}\right)$ $Z(3\frac{1}{5}, 2\frac{9}{10})$

**b** $Z\_{ABCD}\left(3, 3\right)$ met massa 36 en $Z\_{EFGH}(2, 3\frac{1}{2})$ met massa 6

 $\vec{OZ}=\frac{36}{30}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{3}\right)-\frac{6}{30}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3\frac{1}{2}}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3\frac{1}{5}}{2\frac{9}{10}}\right)$

**Samenvatting**

**S1** $\left(5+3λ\right)^{2}+λ^{2}=65$

 $10λ^{2}+30λ-40=10\left(λ+4\right)\left(λ-1\right)=0$

 $λ=-4∨λ=1$

 $A$(-7, -4) en $B$(8, 1)

**S2** $c\_{1}:x^{2}+y^{2}=2y+3$ en $c\_{2}:x^{2}+y^{2}=2x+6y+7$

 $2y+3=2x+6y+7$ $\left(-2y-2\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}=4$

 $2x=-4y-4$ $5y^{2}+6y+1=\left(5y+1\right)\left(y+1\right)=0$

 $x=-2y-2$ $y=-\frac{1}{5}∨y=-1$

 $S\_{1}(-1\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ en $S\_{2}(0, -1)$

**S3** $\vec{MP}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{7}\right)$

 De raaklijn staat loodrecht op de straal: $4x+7y=55$

**S4** raaklijn: $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{17}\right)+λ\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{m}\right)$

 $\left(7+λ\right)^{2}+\left(17+λm\right)^{2}=169$

 $\left(1+m^{2}\right)λ^{2}+\left(14+34m\right)λ+169=0$

 $D=\left(14+34m\right)^{2}-4⋅\left(1+m^{2}\right)⋅169=0$

 $480m^{2}+952m-480=0$

 $m=\frac{-952-1352}{960}=-2\frac{2}{5}∨m=\frac{-952+1352}{960}=\frac{5}{12}$

 $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{17}\right)+λ\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{-12}\right)$ en $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{17}\right)+λ\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{5}\right)$

**S5** $d\left(P, l\right)=\frac{\left|8⋅-6+15⋅-16-1\right|}{\sqrt{8^{2}+15^{2}}}=\frac{289}{17}=17$

**S6** $3x+4y=26$ $5x-2y=26$

 $4y=-3x+26$ $2y=5x-26$

 $y=-\frac{3}{4}x+6\frac{1}{2}$ $y=2\frac{1}{2}x-13$

 $\tan(\left(α\right))=-\frac{3}{4}$ geeft $α=-36,8…$ en $\tan(\left(β\right))=2\frac{1}{2}$ geeft $β=68,1…$

 De hoek tussen l en m is $180°-\left(36,8…+68,1…\right)≈75°$

**S7** $\vec{OZ}=\frac{4}{24}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3}\right)+\frac{4}{24}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}\right)+\frac{4}{24}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{3}\right)+\frac{4}{24}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{1}\right)+\frac{8}{24}∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{3}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3\frac{2}{3}}{3}\right)$ $Z(3\frac{2}{3}, 3)$

**S8**

**a** Neem $M$(0, 0)

 $PQ=\sqrt{r^{2}-p^{2}}$, $AQ=r+p$ en $BQ=r-p$

 $PQ^{2}=r^{2}-p^{2}=\left(r+p\right)\left(r-p\right)=AQ∙BQ$

**b** $∠APB=90°$ (Thales)

 $∠B$ is gemeenschappelijk en dus is $∠BPQ=∠PAQ$

$\tan(\left(∠PAQ\right))=\frac{PQ}{AQ}$ en $\tan(\left(∠BPQ\right))=\frac{BQ}{PQ}$

 $\frac{PQ}{AQ}=\frac{BQ}{PQ}$ geeft $PQ^{2}=AQ∙BQ$

**Test jezelf**

**T1** $x^{2}+y^{2}-2x-10y+16=0$

 $x^{2}-2x+1-1+y^{2}-10y+25-25+16=0$

 $\left(x-1\right)^{2}+\left(y-5\right)^{2}-10=0$: cirkel met middelpunt $M$(1, 5) en straal $\sqrt{10}$

 $\vec{AM}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{-1}{3}\right)$

 Dus middelpunt $N$ ligt op de lijn met vergelijking $-x+3y=4$

 $N$ ligt ook op de middelloodlijn van $OA$: $y=-x+2$

 $y-2+3y=4$ geeft $y=1\frac{1}{2}$

 Het middelpunt $N(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ en straal $\sqrt{2\frac{1}{2}}$: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(y-1\frac{1}{2}\right)^{2}=2\frac{1}{2}$

**T2** $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{20}{20}\right)+λ∙\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{m}\right)$

 $\left(26+λ\right)^{2}+\left(13+mλ\right)^{2}=260$

 $\left(1+m^{2}\right)λ^{2}+\left(52+26m\right)λ+585=0$

 raaklijn, dus $D=\left(52+26m\right)^{2}-2340\left(1+m^{2}\right)=0$

 $-1664m^{2}+2704m+364=0$

 $m=\frac{-2704-3120}{-3328}=1\frac{3}{4}∨m=\frac{-2704+3120}{-3328}=-\frac{1}{8}$

 $7x-4y=60$ en $x+8y=180$

**T3** $l:4x-3y=1$

Het middelpunt ligt op de lijn door $P$(1, 1) en loodrecht op $l$: $3x+4y=7$

 $3x+4y=7$ $d\left(M, l\right)=p$

 $3x=-4y+7$ $\frac{\left|-5\frac{1}{3}p+9\frac{1}{3}-3p\right|}{5}=p$

 $x=-1\frac{1}{3}y+2\frac{1}{3}$ $-8\frac{1}{3}p+8\frac{1}{3}=5p∨-8\frac{1}{3}p+8\frac{1}{3}=-5p$

 $M(-1\frac{1}{3}p+2\frac{1}{3}, p)$ $13\frac{1}{3}p=8\frac{1}{3}∨3\frac{1}{3}p=8\frac{1}{3}$

 $p=\frac{5}{8}∨p=2\frac{1}{2}$

 $(x-1\frac{1}{2})^{2}+(y-\frac{5}{8})^{2}=\frac{25}{64}$ en $\left(x+1\right)^{2}+(y-2\frac{1}{2})^{2}=6\frac{1}{4}$

**T4** $x^{2}+y^{2}-4x-6y=3$

 $x^{2}-4x+4-4+y^{2}-6y+9-9=3$

 $\left(x-2\right)^{2}+\left(y-3\right)^{2}=16$ cirkel met middelpunt $M$(2, 3) en straal 4.

 $d\left(M, l\right)=\frac{\left|8+9-72\right|}{\sqrt{4^{2}+3^{2}}}=\frac{55}{5}=11$

 $d\left(c, l\right)=d\left(M, l\right)-4=7$

**T5** $\vec{OP}=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{12}\right)$ en dus $l:5x+12y=169$

 $d\left(C, l\right)=p-13$

 $\frac{\left|5p-169\right|}{\sqrt{5^{2}+12^{2}}}=p-13$

 $5p-169=13\left(p-13\right)∨5p-169=-13(p-13)$

 $8p=0∨18p=338$

 $p=0∨p=18\frac{7}{9}$

 De coördinaten van $C$: $(18\frac{7}{9}, 0)$

**T6**

**a** $∠OPS=∠MQS=90°$ (raaklijn aan cirkel) en $∠S$ is gemeenschappelijk: $∆OPS\~∆MQS$

 met vergrotingsfactor $\frac{3}{5}$

 $\frac{x}{x-10}=\frac{5}{3}$

 $3x=5(x-10)$ geeft $x\_{S}=25$

**b** $l: \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{25}{0}\right)+λ\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{m}\right)$ raakt de cirkel $x^{2}+y^{2}=25$

 $\left(25+λ\right)^{2}+\left(λm\right)^{2}=25$

 $\left(1+m^{2}\right)λ^{2}+50λ+600=0$

 $D=2500-2400\left(1+m^{2}\right)=0$

 $m^{2}=\frac{1}{24}$

 $m=-\frac{1}{\sqrt{24}}$ of $m=\frac{1}{\sqrt{24}}$

 De richtingscoëfficiënt van $l$ is $-\frac{1}{\sqrt{24}}$

**c** $N(10, p)$

 In $∆OMN$ geldt: $10^{2}+p^{2}=\left(p-3+5\right)^{2}$

 $100+p^{2}=p^{2}+4p+4$

 $4p=96$

 $p=24$

 $c:\left(x-10\right)^{2}+\left(y-24\right)^{2}=441$

**T7**

**a** Het zwaartepunt van de figuur ligt precies tussen de zwaartepunten van het vierkant en de driehoek in.

Het zwaartepunt van het vierkant ligt op hoogte 3 en het zwaartepunt van de driehoek ligt op hoogte $6+\frac{1}{3}∙12=10$

 Het zwaartepunt van de figuur ligt dus op hoogte $6\frac{1}{2}$

**b** $y\_{Z}=\frac{36}{3h+36}∙3+\frac{3h}{3h+36}∙(6+\frac{1}{3}h)=6$

 $36∙3+3h(6+\frac{1}{3}h)=6(3h+36)$

 $108+18h+h^{2}=18h+216$

 $h^{2}=108$

 $h=-6\sqrt{3}∨h=6\sqrt{3}$