Hoofdstuk 23: ***Examenvoorbereiding***

**Functies en grafieken en vergelijkingen**

**Domein en Bereik**

**1**

**a** **c** **d**

**b** De grafiek van is een dalparabool met top (3, -8) en

**Limieten**

**2**

**a**

**b**

**c**

**d**

**e**

**f**

**Asymptoten en perforaties**

**3**

**a** De grafiek van is een dalparabool en heeft dus geen asymptoten.

**b**

Voor deze waarden van is de teller niet nul; verticale asymptoten: en . . De grafiek heeft een horizontale asymptoot: .

**c** Voor grote positieve waarden van wordt nagenoeg 0. De grafiek van heeft een horizontale asymptoot: .

**d**

 De grafiek van heeft een horizontale asymptoot: .

**4**

**a** Scheve asymptoot: .

**b**

 Scheve asymptoot:

**5**

**a** voor perforatie:

**b** voor perforatie:

**c** voor perforatie:

**d** voor en

 perforaties: en

**Transformaties**

**6**

**a**

**b**

**Symmetrie van grafieken**

**7**

**a**

**b**

**c** De grafiek van is puntsymmetrisch in (2, 0)

**Soorten functies**

**8**

**a**

**b**

**c**

**d**

**9**

**a** snijpunten -as: en top: snijpunt -as:

**b** top: (-4, 15) snijpunt -as: (0, -33)

 snijpunten -as:

**c**

 snijpunt -as: snijpunten -as: en top:

**10**

**a** **b**

 en

**11**

**a** Bereik: **b** en

**12** en

 maar ook

**13**

**a** **b**

**Vergelijkingen**

**14**

**a** **b**

**c** **d**

**Wortelvergelijkingen**

**15**

**a** **b** **c**

**d** **e** **f**

**16**

**a** **b**

 De oplossing:

**c** **d**

 De oplossing:

**Uitdrukken in, schrijven als functie van**

**17**

**a** **b** **c**

**d** **e** **f**

**Substitutie**

**18**

**a**

**b**

**c**

**d**

**Inverse functies en inverse bewerkingen**

**19**

**a** **b** **c**  **d**

**Rekenregels gebruiken**

**20**

**a** **b** **c**

**d**

**21**

**a** **b**

**22**

**a** **b** **c**

**d**

**Examenopdrachten**

**23 Perforatie**

 geen opl.

 mits

**24 Vierkant onder een grafiek**

 Hoekpunt rechtsonder:

 Hoekpunt rechtsboven: ligt op de grafiek:

**25 Een gebroken functie en zijn inverse**

**26 Een eivorm**

 De lengte van het ei is cm

**27 Verticale verbindingslijnstukken**

 of

**28 Stuiterende bal**

**a**

**b**

 meter

**29 Altijd raak**

**a**

 geeft

 en ligt ook op .

**b**

 Randpunt:

 , klopt.

**Differentiëren**

**Differentiequotiënt en afgeleide functie**

**30**

**Regels voor het differentiëren**

**31**

**a**

**b**

**c**

**d**

**e**

**f**

**g**

**h**

**Stijgen en dalen, maximum en minimum, buigpunten**

**32**

**a**

 geeft

 Voor is de functie stijgend.

 of

 Dus voor is de functie toenemend stijgend.

**b** De buigpunten zijn: en ).

**Raaklijn aan een grafiek, twee grafieken raken elkaar**

**33**

**a**

 : en deze heeft geen oplossingen

**b**

 gaat door

**c** geeft

 Punten met horizontale raaklijn: (-2, 8) en (2, 8).

**34**

**35** en

**Examenopdrachten**

**36 Raaklijn in knikpunt**

 knikpunt

 voor

 gaat door :

**37 Driehoek bij een vierdegraadsfunctie**

 en

 en

**38** **Loodrecht in de perforatie**

**a**

**b** mits

 en omdat staan en in loodrecht op elkaar.

**39 Raaklijn door perforatie**

 mits perforatie:

 gaat door (2, 0):

 Punt ligt op

**40 Tussen twee grafieken**

**41 Horizontale verbindingslijnstukken**

 geeft

 De maximale lengte van het verbindingslijnstuk is .

**Integreren**

**Rekenregels voor integralen**

**42**

**a**

**b**

**c**

**d**

**e**

**f**

**43**

**a**

**b**

**c**

**Berekenen van een oppervlakte van een gebied**

**44**

**a**

**b**

**c**

**45**

**a**

 De coördinaten van de snijpunten zijn: en

**b**

**46**

**a**

 De snijpunten zijn en

**b**

**c**

**d**

 invoer: zero:

**47**

**a**

**b**

**c**

**d** De oppervlakte onder de grafiek tussen 1 en neemt steeds toe.

**Inhoudsberekeningen**

**48**

 cm3

**49**

**a**

**b**

 Het verschil in inhoud tussen en is .

**50**

**a**

De snijpunten zijn: en

**b**

**Examenopdrachten**

**51 Anderhalf keer zo groot**

 richtingscoëfficiënt raaklijn: en gaat door

 met

 geeft

**52 Gebroken functie**

**a**

 en

**b**

**53 Parabool en cirkel met variabele straal**

**54 Wortelfuncties**

 geeft

**Exponentiële functies en logaritmische functies**

**Logaritmen**

**55**

**a**

**b**

**c**

**d**

**e**

**f**

**56**

**a** **b**

**c** **d**

**57**

**a** **b** **c**

**d**

**Exponentiële en logaritmische vergelijkingen**

**58**

**a** **b** **c**

**d** **e** **f**

**Machten van e en natuurlijke logaritmen**

**59**

**a** **b** **c** **d**

**60**

**a** **b** **c** **d**

**Afgeleiden en primitieven van exponentiële en logaritmische functies**

**61**

**a**

**b**

**c**

**d**

**e**

**f**

**62**

**a**

**b**

**c**

dit geeft

**d**

**63**

**a**

**b**

**c** De grafiek van heeft een horizontale asymptoot: .

**d**

**e** De grafiek van heeft een maximum:

en een minimum:

**f**

 en

 en

**g**

**64**

**a**

 , dus stijgt direct na de injectie.

**b**

**Examenopdrachten**

**65 Horizontale en verticale asymptoot**

 , dus horizontale asymptoot:

, dus verticale asymptoot:

 , klopt!

**66 Een logaritmische functie en haar afgeleide**

**a**

 en

**b**

**67 Lijn door de toppen**

**a**

**b**

**c**

**68 Twee machten van 2**

**a**

**b**

 geeft

**c** en

 loodrecht dus

 invoer: zero:

**Goniometrie**

**Goniometrische functies**

**69**

**a** **c** **e**

**b** **d** **f**

**70**

**a** **b**

**c** **d**

**Functievoorschrift bij een sinusoïde**

**71**

**a** minimum is 8 en maximum 16: en

 De periode is dus

 Het ‘startpunt’ ligt precies tussen en :

**b** Het ‘startpunt’ van de cosinus ligt in de top: (of bij ).

**Vergelijkingen met sinus, cosinus en tangens**

**72**

**a** **b**

 , , , ,

 en

 , , , ,

 en

**c**

 , , en

**d** **e** **f**

 , ,

 , en en

**Afgeleiden en primitieven**

**73**

**a**

**b**

**c**

**d**

**e**

**f**

**74**

**a** **c**

**b** **d**

**Som en verschilformules, Verdubbelingsformules**

**75**

**a**

**b**

**c**

**d**

**76**

**a**

**b**

**c**

**Examenopdrachten**

**77 Gebroken goniometrische functie**

**a**

 en

**b** perforatie bij een “” situatie

 geeft

 : dan is een verticale asymptoot.

 Dus de grafiek van heeft geen perforaties.

**c** , en

 geeft of

**78 Maxima en minima**

**a**

**b**

 de gevraagde afstand is: -1,34

**79 Sinusoïde met perforaties**

 en

 , dus de perforaties zijn: en

**80 Goniometrische functies**

a. 

 

b. 

 

 Voer in:  maximum: 

c. 

**80 Goniometrische functies**

**a**

 , en

**b**

 invoer:

 zero:

**c**

**Meetkunde en vectoren**

**Driehoeken**

**81** (gelijkzijdige driehoek)

 (hoekensom van een driehoek)

 ()

 (hoekensom van een driehoek)

Als en gestrekte hoeken zijn, dan is en .

**Bijzondere lijnen in driehoeken**

**82**

**a**

**b** het midden van is .

 en

**c** het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen

**d** het middelpunt van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de deellijnen.

**Vierhoeken**

**83**

**a** waar: de diagonalen van een ruit staan loodrecht op elkaar, maar minstens één diagonaal van een vlieger wordt middendoor gedeeld.

**b** waar: een parallellogram is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden. Als de vier hoeken dan ook nog even groot zijn (en dus ) is het parallellogram een rechthoek.

**c** waar: een ruit is een vierhoek met vier even lange zijden. Als de hoeken recht zijn, wordt de ruit een vierkant.

**d** waar: een trapezium heeft één paar evenwijdige zijden. Als twee overstaande zijden van een vlieger evenwijdig zijn dan zijn de andere twee ook evenwijdig en is de vlieger een ruit.

**Berekeningen in driehoeken**

**84**

**a** **1.** (Z-hoeken)

 **2.** (overstaande hoeken)

**3.**

 **4.**

**b**

**c** geeft

**d** geeft

**85**

**a**

**b**

**c** (met vergrotingsfactor )

**d** geeft

**e** geeft

**f**

**g** en

 (gestrekte hoek)

**Sinus- en cosinusregel**

**86**

**a** **b**

 geeft

**c** geeft

**d** **e**

 en

**f**

**Oppervlakte**

**87** De driehoeken zijn allemaal gelijkzijdig met zijde 4 cm.

 en

 Gevraagde percentage:

**88**

**a**

**b**

**c** met verhouding .

 De hoogtelijn van op is

**d**

**89**

**a** de straal van de afgeronde hoeken is

 omtrek cm

**b** cm2

**Stellingen over cirkels**

**90** **1.** en (raaklijn aan cirkel)

 **2.** ligt op een cirkel met middellijn (Thales)

 **3.** ligt op een cirkel met middellijn (Thales)

**91** **1.** (raaklijn, en en zijn de raakpunten)

 **2.** (overstaande hoeken)

 **3.**

 **4.** en

 **5.**

 **6.** en

**Vectoren**

**92**

**Vectoren en kentallen, inproduct**

**93** en

**Examenopdrachten**

**94 Wind aan zee**

**a** met evenwijdig aan de kustlijn (naar boven of naar beneden)

De kop van (pijl) moet dus op 4 cm van de kustlijn liggen: teken een lijn op 4 cm evenwijdig aan de kustlijn.

De lengte van is 6 cm, dus de kop van de pijl moet op 6 cm van af liggen: teken een cirkel met middelpunt en straal 6.

De snijpunten van de cirkel en de lijn zijn de eindpunten van vector

**b** De hoek die maakt met is

 m/s

**95 Buiten een vierkant**

**a**

 en

 en

 en is het midden van en

**b** en

 , dus

Op dezelfde manier kun je aantonen dat met (1, 1). Beide grijze sectoren zijn een kwart cirkel; samen dus een halve cirkel.

**96** **Twee vierkanten tegen een driehoek**

**a**

**b** en

dus de richtingsvectoren van de lijnen en staan loodrecht op elkaar.

**Lijnen en cirkels**

**Vergelijkingen van lijnen**

**97**

**a**

**b**

**c** rico van is -3; rico van is 2; rico van is en rico van is -3.

 Als het product van de rico’s gelijk is aan -1, staan de lijnen loodrecht op elkaar.

 Dus alleen en staan loodrecht op elkaar.

**98**

**a**

De richtingscoëfficiënt van de lijn die hier loodrecht op staat is .

**b**

**Vectorvoorstelling van een lijn**

**99**

**a** en gaat door (-3, 2)

**b**

**Afstand tot een lijn**

**100**

**a**

**b** Neem een willekeurig punt op : (1, 1)

**101**

**a** **b**

**c** De twee lijnen zijn de bissectrices van de hoeken die de lijnen en met elkaar maken.

**d**

 De vergelijking van de twee bissectrices zijn: en .

 Het product van de richtingscoëfficiënten is -1, dus ze staan loodrecht op elkaar.

**Hoek tussen twee lijnen**

**102**

**a** geeft

**b** geeft

**c** en . Het inproduct is 0, dus deze staan loodrecht op elkaar.

**Stelsel lineaire vergelijkingen**

**103**

**a** **b**

 en

 en

**104**

**a** geeft : dit stelsel heeft geen oplossingen.

**b** geeft : de lijnen vallen samen; oneindig veel oplossingen.

**c** en : er is één oplossing.

**d** geeft : dit stelsel heeft geen oplossingen.

**105**

**a** geeft

 en geeft

 Dit stelsel is afhankelijk als en

 en .

**b** Voor (evenwijdig) en (ander snijpunt met de -as) is het stelsel strijdig.

**Vergelijkingen van cirkels**

**106**

**a** middelpunt (-4, 0) en straal 5.

**b** ; middelpunt (12, 4) en straal 4.

**c** **d**

 middelpunt (-5, -2) en straal . middelpunt en straal .

**e**

 De som van twee kwadraten kan niet negatief zijn.

**Snijpunten van een lijn met een cirkel**

**107**

**a** **b**

 en en

**c**

 en

**108**

 De discriminant is kleiner dan 0, dus er zijn geen oplossingen.

**Snijpunten van twee cirkels**

**109**

**a**

 en

**b**

 en

**Raaklijn aan een cirkel**

**110**

**a** (2, 1)

 raaklijn:

**b**

 (5, 2) en straal is 3. Punt bevindt zich 3 boven punt . De raaklijn is dus .

**111**

**112**

 De lijn en de cirkel hebben twee gemeenschappelijke punten.

**113**

**114**

**a**

**b** (raaklijn aan cirkel)

 en liggen op een cirkel met middellijn (Thales)

**c** (0, 2) en straal

**d**

 (-1, 7) en (1, -3)

**115**

**a** raaklijnen:

**b** cirkel : (1, 0) en straal 5

 en

**Afstand van een punt tot een cirkel en tussen twee cirkels**

**116**

**a** en , dus

**b**

**117**

 en

**Afstand van een lijn tot een cirkel**

**118**

**a** **b**

**119**

**a**

 middelpunt (-3, 4) en straal 10

**b**

**Meetkundig of analytisch**

**120**

**a** (*hh*, is gemeenschappelijk en (Thales))

**b** , dus

**121**

**a**

**b** , en

**c**

**Zwaartepunten**

**122**

**a** en dus is en

**b**

**c**

**123**

**a**

**b** en dan is

**124**

**a** Alle zwaartepunten liggen op de lijn

**b** De zwaartelijn door gaat ook door het midden van : (2, 3)

 Als dan is

**Examenopdrachten**

**125 Driehoek in cirkel**

**a** Dat is wanneer of een middellijn is van de cirkel (Thales).

 is een middellijn als (0, 8)

 is middellijn als door (0, 3) gaat.

 en (-4, 6)

**b** , dus ligt op een cirkel met middelpunt (4, 0) en straal

 :

 en dat geeft

**126 Lijnen door de oorsprong en een cirkel**

 (1, 2) en (5, 10)

**127 Driehoek met bewegend hoekpunt**

**a** geen driehoek als samenvalt met snijpunt van en .

 () en

 en dat geeft (88, -12)

**b** en

 geeft

 en

 , en : niet gelijkbenig

 en : niet gelijkbenig

**128 Zwaartepunt en rakende cirkels**

**a**

 en

 dus

**b** (, 0)



**129 Zwaartepunt**

**130 Lijn en cirkel**

**a** en **b** en

 geeft

**131 Raakcirkel en raaklijnen**

**a** Stel

**b** raaklijn door raakpunt en loodrecht op :

Van de andere twee raaklijnen ligt het snijpunt op de -as en vormen gelijkvormige driehoeken met vergrotingsfactor .

 en

**Bewegingsvergelijkingen**

**Bewegingsvergelijkingen**

**132** en

**133**

**a**

 Voor de even waarden van vindt je de snijpunten met de positieve -as.

 .

 De opeenvolgende snijpunten liggen uit elkaar.

**b**

**Toppen, snelheid en versnelling**

**134**

**a**

 en

**b** verticale raaklijn:

**c**

 , , , , ,

**135** en

 op tijdstip : en

**136**

**a**

 en

 en

**b** en

**137**

**a** **b**

 Op tijdstip :

 geeft

**c**

 het maximum van is als . De maximale snelheid is dan 4.

**d**

 , , en

**Examenopdrachten**

**138 Bewegend punt**

**a**

 , , of ,

 Voor ligt links van de -as.

**b**

 en

 geeft

**139 Scheve parabolen**

**a**

 is minimaal als (want dan is minimaal).

**b** heeft één oplossing

**140 Bewegend punt**

**a**

**b**

**141 Een achtbaan**

**a**

 invoer: maximum: m/s

**b**

 en

 De beweging van naar duurt s

**c**

 De helling is dus onafhankelijk van .