# Complexe getallen









© J. van Dort 2012

Niet-commerciële verspreiding, onder bronvermelding, toegestaan voor onderwijsdoeleinden.

## Hoofdstuk 1

### §1.1 Nog meer getallen………??!!

In de onderbouw heb je gezien dat er naast de verzameling van de Natuurlijke Getallen (0, 1, 2, 3, 4, …..) ook nog andere verzamelingen van getallen bestaan.

Bij het oplossen van bijvoorbeeld de vergelijking  kom je in de problemen als je alleen de natuurlijke getallen zou hebben. Deze vergelijking heeft namelijk geen oplossing in , want de oplossing -3 is geen natuurlijk getal.

We hebben een uitbreiding van gemaakt door negatieve getallen in te voeren en samen met de natuurlijke getallen ontstaat zo de verzameling van de Gehele Getallen (….., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ……).

Maar een vergelijking als  kan je ook in niet oplossen, want de oplossing  is geen geheel getal. Daarom zijn de gebroken getallen ingevoerd en samen met de gehele getallen ontstaat zo de verzameling van de Rationale Getallen. Deze verzame­ling bestaat uit alle getallen van de vorm , waarbij *a* en *b* getallen uit zijn en bovendien .

Toch hadden we aan deze getallen nog niet genoeg, want de lengte van de schuine zijde in bijvoorbeeld een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met lengte 1 is gelijk aan  en dat is géén rationaal getal! (Pythagoras had daar zelf al problemen mee; het schijnt dat een van zijn studenten die het getal  'ontdekte' daarom moedwillig verdronken is!) Dit probleem is opgelost door het invoeren van de 'irrationale getallen' (zoals , , , , etc.) die samen met de rationale getallen de verzameling van de reële getallen vormen.

Tot nu toe heb je al veel problemen met deze reële getallen kunnen oplossen.

Maar vergelijkingen als ,  ,  of  blijken geen reële oplossingen te hebben. Om dit type vergelijking te kunnen oplossen moeten we weer nieuwe getallen bedenken.

We voeren daarom een nieuw getal in dat we *i* noemen en waarvoor per definitie geldt:



### §1.2 Rekenen

Met dit getal *i* rekenen we op dezelfde manier als met de 'gewone' getallen en gebruiken natuurlijk dat .

**Voorbeelden**

Bereken:

1.  (*5i betekent:* , net zoals *)*
2. 
3. 
4. 
5. 
6.  (!!)
7. 
8. 

We schrijven de term met *i* meestal achteraan!

1. 

**Opgave 1.1**

Bereken (zonder GR):

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

**Definitie:**Getallen van de vorm  waarbij een reëel getal is noemen we ***imaginaire getallen****;* Getallen van de vorm a + waarbij a en reële getallen zijn noemen we ***complexe getallen***. De verzameling van alle complexe getallen noemen we .

Het vermenigvuldigen en delen van complexe getallen is iets bewerkelijker en we maken daar o.a. gebruik van het merkwaardige product  om de noemer van breuk te herleiden tot een reëel getal. Zie vb 4) en 5).

**Voorbeelden**

*Bereken exact:*

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Opgave 2.1** Bereken (schrijf zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk)

1. 
2. 
3. 
4. 

**Opgave 2.2** Schrijf in de vorm :

1.  (Hint: vermenigvuldig teller en noemer met 4-3i)
2. 
3. 
4. 
5. 

Met het definiëren van het getal *i* en daaraan gekoppeld de complexe getallen, blijkt dat we nu de in § 1 genoemde vergelijkingen óók kunnen oplossen. De meeste hogeregraads vergelij­kingen vallen buiten de stof, maar de tweedegraads vergelijkingen kunnen we allemaal de baas.

**Voorbeelden**

*Los de volgende vergelijkingen exact op.*

1. , ofwel  levert ;
dus 
2. ;
dus 
3.  geeft
 dus

4.  geeft
 dus

5.  Om deze vergelijking op te lossen gaan we er links, dus ook rechts, 9 bij optellen. Daardoor ontstaat links het kwadraat  en kunnen we verder zoals in het vorige voorbeeld. Dus dat geeft:
 en dit kan je schrijven als
 dus
 dus


Deze techniek heet:

***een kwadraat afsplitsen***

1.  We trekken er eerst links en rechts 28 af:
 Dan tellen we er links en rechts 25 bij op:
 Nu hebben we links  gemaakt:
 Dus
Het antwoord is dus:

2. 

 (100 is het kwadraat van de helft van 20)




**Opmerking:** Het is gebruikelijk om complexe getallen aan te geven met de letter *z*, dus in de volgende opgaven gebruiken we dat ook: , met *a* en *b* reële getallen.

**Opgave 2.3** Los de volgende vergelijkingen (exact) op:

1. 

Hint: splits een kwadraat af:

 is het begin van het kwadraat 

1. 
2. 
3. 
4. 
5.  Tip: 

**Opgave 2.4**  We nemen  en .
Laat zien dat

1. 
2. 

### §1.3 Tekenen: het complexe vlak

Zoals we voor de reële getallen gebruik kunnen maken van de getallenlijn (elk reëel getal correspondeert met één punt van de getallenlijn en omgekeerd), zo kunnen we de complexe getallen weergeven in een plat vlak met rechthoekig assenstelsel. Immers, een complex getal  wordt helemaal vastgelegd door de getallen *a* en *b*. We kunnen het complexe getal  dus één op één koppelen aan het getallenpaar (a,b) en dat getallenpaar stelt weer precies één punt in een rooster voor.

De horizontale as correspondeert met de reële getallen en wordt dan ook wel de *reële as* genoemd en de verticale as correspondeert met de imaginaire getallen en wordt dan ook wel de *imaginaire as* genoemd van ***het complexe vlak***.

Hieronder staan de getallen 2+3*i* en -5-2*i* aangegeven.

1

2

6

5

4

3

O

-1

-2

-3

-4

-5

i

5i

4i

3i

2i

-i

-3i

-2i

-4i

**Definitie:** In een complex getal  zijn *a* en *b* reële getallen. We noemen *a* het ***reële deel***(notatie: *Re z*) en *b* het ***imaginaire deel*** (notatie *Im z)* van het getal *z*.

Het getal  noemen we *de* ***(complex) geconjugeerde*** van *z*. Notatie: .

N.B. Getallen *z* en  zijn dus *elkaars* geconjugeerde!

**Opgave 3.1**

Teken in het complexe vlak de volgende getallen:

2 – 4*i* , -2*i* , 5, , 1+*i* en -5−4*i* .

**Opgave 3.2**

Teken in het complexe vlak de getallen:

1. 
2. waarvoor geldt: *Re z = 4.*
3. waarvoor geldt: *Im z = -3.*
4. waarvoor geldt: *Re z = 2.*

**Opgave 3.3**

Teken in het complexe vlak de volgende verzamelingen:

1. alle getallen  waarvoor geldt dat *Re z = Im z*.
2. alle getallen  waarvoor geldt dat *Im z = 3 Re z*.
3. alle getallen waarvoor geldt dat *Re z = Im z – 3.*
4. alle getallen waarvoor geldt dat (*Re z*)*2 +* (*Im z*)2 = 25.

**Opgave 3.4**

1. Teken in het complexe vlak de volgende getallen en hun geconjugeerde:

2. Omschrijf de ligging in het complexe vlak van twee getallen die elkaars geconjugeerde zijn.

*§1.4 Rekenen en tekenen: complexe getallen als vectoren*

Voor de notatie van een complex getal wordt ook regelmatig gebruik gemaakt van de (kleine) letters uit het Griekse alfabet.



Een vector in een vlak kun je je voorstellen als een pijl die van een beginpunt naar een eindpunt loopt. Evenwijdige pijlen met dezelfde richting en dezelfde grootte stellen dezelfde vector voor. In het complexe vlak kun je bij elk complex getal  (spreek uit: alfa) een vector maken door de pijl te tekenen die in de Oorsprong begint en naar het getal (=punt)  loopt. Die vector kan dan ook worden voorgesteld door een gelijkgerichte en even lange pijl die vanuit een willekeurig punt β (spreek uit: bèta) vertrekt. Het eindpunt van deze vector vormt samen met de punten 0,  en β een parallellogram (de bekende parallellogramconstructie van  + β). Zie de figuur hiernaast. De vector  + β is dus de vector die vanuit O het punt  + β aanwijst.

*Het optellen van twee complexe getallen komt dus overeen met het optellen van twee vectoren.*

Om vanaf te trekken moeten we bedenken dat. De vector  vinden we door   te draaien. We moeten dus  en  bij elkaar optellen. Dit kan weer met de parallellogramconstructie of door de vector  met zijn 'staart' aan de 'kop' van  te leggen, zoals hiernaast.  is de vector (pijl) die van de Oorsprong naar het 'nieuwe' hoekpunt wijst. In de figuur zie je dat ook geldt:  is de vector die van  naar β loopt! Dus  is gelijk aan de afstand van  tot !







**Definitie:**

De **modulus** (of **absolute waarde**) van een complex getal *z=a+bi* (notatie ) is: . Dit getal is dus ook op te vatten als de lengte van vector *z*, en ook als de afstand van het punt *z* tot de Oorsprong.

Alle punten waarvoor geldt  vormen dus samen de cirkel met middelpunt O en straal 3.

Voor alle punten met geldt dat de lengte van de vector die van het punt *4+2i* naar het punt *z* wijst lengte 3 heeft, met andere woorden: alle punten *z* liggen op afstand 3 van het punt *4+2i*, dus vormen de cirkel met middelpunt *4+2i* en straal 3.

In het algemeen geldt: alle punten *z* met  vormen de cirkel met middelpunt  en straal *r.*

**Opgave 4.1**

Teken in het complexe vlak  met behulp van de constructie als

1.  en 
2.  en 
3.  en 

**Opgave 4.2**

Teken in het complexe vlak alle punten waarvoor geldt:

1. 
2.  (Waarom ligt het middelpunt in het 3e kwadrant?!)
3. 
4. 

**Opgave 4.3**

Toon aan dat .

**Opgave 4.4**

Neem  en en toon aan dat , door zowel als  uit te drukken in *a, b, c* en *d*.

We kunnen bij elk complex getal *z* één vector tekenen die vanuit de Oorsprong dat getal *z* aanwijst. De draaiingshoek  (spreek uit: fi) van die vector ten opzichte van de positieve reële as heet *een argument* van *z*. Notatie: .

Bij bijvoorbeeld het complexe getal *1+i* hoort het argument , maar je kunt net zo goed  of  nemen. Elk complex getal heeft oneindig veel argumenten die allemaal veelvouden van verschillen. De waarde van het argument die tussen  en  ligt noemen we de **hoofdwaarde van het argument van *z***. Deze wordt genoteerd als  (met een hoofdletter). Het getal 0 heeft geen argument.

De waarde  van *Arg(z),* met *z=a+bi* is te vinden met gebruik van de tangens van :

Voor elk argument geldt: . Zie de volgende figuur.

In het vervolg drukken we de grootte van het argument uit in radialen, dus geldt voor alle *z*: .

O

a

a+bi

b



re-as

im-as

Met de grafische rekenmachine (TI84) kan je berekeningen maken met complexe getallen door te kiezen voor *MODE* en dan *optie a+bi. H*et getal *i* is in te voeren met *SHIFT*-knop + punt.

**Voorbeeld:** (de GR is ingesteld op radialen!)

1. *Bepaal het hoofdargument van z=5-3i m.b.v. de GR.*Kies *MATH* en dan submenu *CPX* en dan optie 4:angle( . Vul dan de waarde van *z* in. Na een druk op *ENTER* vind je: -0.5404…. (radialen).
2. *Bepaal de modulus van het getal z=-8-6i.*
Kies *MATH* en dan submenu *CPX* en dan optie 5:abs( . Vul dan de waarde van *z* in. Na een druk op *ENTER* vind je: 10. Maar dat had je natuurlijk al uit je hoofd gedaan want ☺.

**Opgave 4.5**

Bereken exact de modulus en de hoofdwaarde van het argument van

1. 

Maak een tekening/schets!!

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Opgave 4.6**

Bereken met behulp van de GR het hoofdargument van  en .

1. 
2. 
3. 
4. Bereken  uit de opgaven a) , b) en c). Wat valt je op?

Het blijkt dat geldt: .

In opgave 4.4 heb je al bewezen: , dus voor het ***vermenigvuldigen*** van complexe getallen geldt: ***de argumenten worden opgeteld en de moduli vermenigvuldigd.*** Voor het *delen* van complexe getallen geldt: *de argumenten worden afgetrokken en de moduli gedeeld:*  en .

De eigenschappen voor de argumenten zijn te bewijzen door gebruik te maken van een andere notatie voor complexe getallen, nl. poolcoördinaten.

*§1.5 Poolcoördinaten*

Een complex getal is voor te stellen als een punt in het complexe vlak door middel van de coördinaten  in een (rechthoekig) assenstelsel. De plaats van zo'n punt kunnen we ook vastleggen door de afstand van dat punt tot de Oorsprong én de draaiingshoek ten opzichte van de positieve reële as. Die afstand noemen we *r* en die hoek geven we aan met  het argument. De getallen *r* en  heten de **poolcoördinaten** van het getal *z*.

O

a=Re(z)

a+bi

b=Im(z)



re-as

im-as

Met enige eenvoudige goniometrie is te zien dat  en . Dus het getal  is ook te schrijven als .

Als we *r* voor  schrijven, dan kunnen we *z* ook noteren als , ofwel: 

**Opgave 5.1**

Schrijf de volgende getallen in de vorm . Rond het argument zo nodig(!) af op 2 decimalen nauwkeurig.

1. 
2. 

Maak een tekening/schets!!

1. 
2. 
3. 

**Opgave 5.2**

Schrijf de volgende getallen zonder poolcoördinaten. Rond zo nodig af op 2 decimalen nauwkeurig.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Opgave 5.3**

Teken in het complexe vlak de volgende getallen  met

1. 
2. 
3. 
4. 

Uit de goniometrie ken je de formules:  en .

Met behulp van poolcoördinaten en deze formules kunnen we nu bewijzen wat we na opgave 4.6 al aangegeven hebben over het vermenigvuldigen van complexe getallen.

Als  en  dan geldt:



Je ziet dat  en .

***Bij vermenigvuldigen van complexe getallen geldt dus: de argumenten worden opgeteld en de moduli vermenigvuldigd.***

De formules voor de deling van twee complexe getallen kan je op soortgelijke wijze afleiden.

Uit deze formules volgt:

 en




Voor  geldt dus:  en , dus 

Nemen we  dan krijgen we de **formule van De Moivre**:
. Deze formule geldt voor *alle* waarden van *n*.

**Opgave 5.4**

Schrijf de volgende getallen in de vorm , met  in radialen (zo nodig afgerond op 1 decimaal nauwkeurig).

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 

**Opgave 5.5**

1. Laat zien dat voor het getal *z* met modulus 1 en hoofdargument  geldt: .
2. Er zijn nóg twee getallen met waarvoor geldt .
Welke argumenten hebben die?
3. Er zijn 5 getallen met modulus 1 waarvoor geldt .
Welke argumenten hebben die?

In de vorige opgave heb je gezien dat er 3 getallen zijn met de eigenschap dat , namelijk ,  en  ofwel 1.

Deze drie oplossingen van de vergelijking  schrijven we alledrie als . Er zijn dus drie *verschillende* complexe uitkomsten voor . We zeggen dat de **complexe wortel meerwaardig** is. Zo heeft  vijf waarden en  elf waarden!

De vergelijking  heeft dus precies *n* oplossingen in (de verzameling van de complexe getallen). Het zijn de *n* waarden voor , de ***n-de*****eenheidswortels**.

De vergelijking , met , heeft precies *n* oplossingen in .

**Opgave 5.6**

Waarom liggen alle eenheidswortels op de eenheidscirkel?

**Voorbeeld**

*Los exact op in :  en schrijf de oplossingen in de vorm a+bi.*

Omdat deze vergelijking 3 oplossingen heeft begin je met 11 te schrijven in poolcoördinaten met drie argumenten die telkens  verschillen. Dus (bijvoorbeeld)

 of  of .

We gebruiken de formule van De Moivre, die zegt:
*als dan is en omgekeerd*.
Dus  of  of .

Dus  of  of .

Dus de oplossingen zijn:  en  en .

**Opgave 5.7**

Los exact op in :

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Voorbeeld**

 *Los exact op in :* .

Schrijf  of .

Dan is  of .

Dus  of .

Dus  of .

Dus  of .

**Opgave 5.8**

 Los op in : rond zo nodig af op 2 decimalen nauwkeurig en schrijf de antwoorden in de vorm a+bi.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

### § 1.6 De formule van Euler

Leonhard Euler (1707-1783) is een van de grootste wiskundigen tot nu toe. Hij heeft maar liefst 886 boeken geschreven over allerlei wiskundige onderwerpen! Euler was een van de eersten die het getal *e* uitvoerig bestudeerd heeft. Één van zijn ontdekkingen is de formule . Dit wordt de **formule van Euler** genoemd.

Hij heeft deze formule bewezen, maar dat voert voor ons nu te ver.

Er zijn dus drie manieren om een complex getal te noteren:

1. , met *x* en *y* reële getallen
2. , met  en 
3. , met  en 

**Opgave 6.1**

Bewijs de formule van De Moivre met de formule van Euler.

**Opgave 6.2**

Schrijf in de vorm *a+bi****.***

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

In de laatste opgave heb je gevonden dat geldt: . Dit wordt beschouwd als een van de mooiste formules uit de wiskunde.

In deze formule komen de drie basisbewerkingen optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen voor, evenals de twee neutrale getallen 0 en 1 voor de optelling, resp. de vermenigvuldiging én de drie belangrijkste bijzondere getallen *e*,  en *i*.

Euler vond deze formule zo mooi dat hij hem op zijn grafsteen heeft laten zetten…………..