EXAMEN 1.

Teken een scherpe hoek A. Hoe bepaal je sin A? Is sin A een benoemd of een onbenoemd getal? Hoe groot schat je sin A? Construeer een hoek B, zodat $\sin B = \frac{1}{2}$. Hoeveel graden telt $\angle$ B? Bereken ook cos B. Laat zien, dat $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$. Toon aan, dat deze betrekking geldt voor elke scherpe hoek. Bereken tg 45° en cotg 45°. Hoe luidt de sinusregel? Bewijs ze. Bereken de oppervlakte van $\triangle$ ABC, als AB = 6 cm, AC = 4 cm en $\angle A = 53°16'$. Toon de oppervlakteformule aan.

Teken een gelijkbenig trap. ABCD. Kun je om dit trap. een cirkel construeren? Hoe vind je het middelpunt? Als van $\triangle$ ABC gegeven is, dat AB = 14 cm, BC = 13 cm en AC = 15 cm, kun je dan de straal van de cirkel berekenen? Bewijs, dat $R = \frac{abc}{4O}$. Hoe groot is O in dit vraagstukje? En hoe groot is de hoogtelijn op AB? Kun je nu ook DC berekenen?

Verleng nu de opstaande zijden van het trapezium tot ze elkaar in S snijden. Hoe lang zijn SD en SC? Trek een lijn uit S door het middelpunt M; deze snijdt bg DC in E en bg AB in F. Bereken dan SE. Bewijs dat $SD \times SA = SE \times SF$.

Als geg. is $ab = cx$, en a, b en c zijn geg. lijnstukken, hoe construeer je dan x? Welke evenredige is dit? Wat betekent het: een lijn in uiterste en middelste reden verdelen? Hoe groot is het grootste u.m. stuk?

Waar komt deze formule ook voor? Waarom juist bij de regelmatige 10-hoek? Bewijs, dat bij een middelpuntshoek van 36°, de zijde van de veelhoek $\frac{1}{2}R(-1 + \sqrt{5})$ is.

EXAMEN 2.

Teken een scherpe hoek A. Construeer daarna een hoek B, zodat tg B = cos A. Laat zien, dat tg B × cotg B = 1. Toon ook aan, dat $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$. Als een hoek aangroeit van 0° tot 45°, dan zal de tangens aangroeien van .... tot ....; de cosinus zal .... van .... tot ....

De grootste waarde van sin C is ....; deze waarde wordt bereikt als C = ...°. Loopt een hoek van 0° naar 90°, dan groeien de .... en de ....; de .... en de .... zullen dalen. Toon dit aan met behulp van een figuur. Van △ ABC is AB = $= \sqrt{13}$, BC = $\sqrt{14}$ en AC = $\sqrt{15}$. Bereken de grootste hoek. Welke regel gebruik je? Bewijs die.

Teken 2 driehoeken, die één hoek gelijk hebben. Hoe verhouden zich de oppervlakken? Bewijs. Hoe wordt dit als de driehoeken gelijkzijdig zijn? Waarom? Verander een willek. driehoek in een gelijkzijdige met hetzelfde oppervlak. Welke evenredige construeer je nu eigenlijk? Op hoeveel manieren kun je de meetk. middelevenredige construeren? Doe het eens met behulp van de eigenschap, dat het kwadraat van de raaklijn gelijk is aan het product der stukken op de snijlijn uit hetzelfde punt. Hoe construeer je een raaklijn aan een cirkel vanuit een punt er buiten? En hoe de gemeenschappelijke uitwendige raaklijn aan twee cirkels M en N, die buiten elkaar liggen? Als de stralen van de cirkels resp. 6 en 2 cm zijn, en de afstand MN is 10 cm, bereken dan de raaklijn. Als je deze raaklijn doortrekt, in welk punt snijdt hij dan de centraal? Hoe ver ligt dat snijpunt S van de middelpunten? Met welk getal moet de grote cirkel van uit S vermenigvuldigd worden om de kleine te krijgen?

Welke driehoeken in deze fig. zijn gelijkvormig? (Noem ze MAS en NBS). Waarom? Bewijs dit gelijkvormigheidsgeval.

Als bovengen. cirkels elkaar uitwendig raken, onder welke hoek zie je ze dan vanuit het uitwendig gelijkvormigheidspunt?

Hoe groot is de zijde van een gelijkzijdige driehoek, in een cirkel met straal R? En hoe groot is a_6? Hoe zou je a_6 af kunnen leiden uit a_3? Doe het eens.

EXAMEN 3.

In een cirkel met straal van 12 cm is een regelmatige vijfhoek getekend. Geef aan, hoe je de zijde en de diagonaal van deze veelhoek berekent. Bepaal ook de oppervlakte. Bepaal ook a_{10}. Laat zien, dat $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$.

Vul in: $\sin 0° = \ldots.$, $\sin 90° = \ldots.$, $\cos 0° = \ldots.$, $\text{tg}\ 60° = \ldots.$, $\text{tg}\ 135° = \ldots.$, $\sin 120° = \ldots.$, $\cos 150° = \ldots.$ Welke goniometrische verhoudingen zijn negatief in het 2e kwadrant? Geldt voor een hoek A in het 2e kwadrant ook: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$? En $\text{tg}\ A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$? Toon je antwoord aan.

Teken een willekeurige driehoek. Trek de 3 hoogtelijnen. Bewijs, dat ze elkaar in 1 punt snijden.

Verbind de voetpunten. Welke driehoek ontstaat nu? Welke eigenschappen ken je hiervan? Bewijs, dat de hoogtelijnen de bissectrices zijn in de voetpuntendriehoek. Teken nog eens een willekeurige $\triangle$ ABC. Construeer nu de 3 aangeschreven cirkels en noem de middelpunten I_a, I_b en I_c. Bewijs nu, dat $\triangle$ ABC de voetpuntendriehoek is van $\triangle I_aI_bI_c$.

Hoe vind je I_c? En het middelpunt I van de ingeschreven cirkel? Waarom gebruik je bissectrices? Wat is dat: een m.p.? Zou je ook de m.p. kunnen vinden van I, als basis en tophoek van een driehoek gegeven zijn? Deze m.p. is een cirkelboog; waar ligt het middelpunt van deze cirkel? Weet je ook waar een ander deel van deze cirkel de m.p. van is? Waarom? Wanneer heb je nut van deze twee meetk. plaatsen? Construeer dan nu eens een driehoek als gegeven zijn: de basis, de tophoek en de straal van de cirkel, die aan de basis raakt.

Hoe druk je r_c uit in de zijden van de driehoek? Bewijs deze formule. Welke lijnstukken op de zijden gelegen worden ook aangeduid met $s - c$?

EXAMEN 4.

Teken een $\triangle$ ABC met een omgeschreven cirkel. Trek de middellijn door C en toon aan, dat $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Toon daarna aan, dat een driehoek rechthoekig is in C, als $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$. Hoe luidt het omgekeerde van de stelling van Pythagoras? Bewijs.

Van $\triangle$ PQR is $PQ = 8$ cm, $\angle P = 45°$ en $\angle Q = 30°$; bereken QR. Hoe kan je vooraf zien, dat $QR < 8$ cm?

Schrijf de volgende gon. verhoudingen als gon. verhoudingen van α: $\sin(90 - \alpha)$, $\sin(180 - \alpha)$, $\cos(90 - \alpha)$, $\cos(180 - \alpha)$ $\operatorname{tg}(90 - \alpha)$.

Teken een gelijkbenige driehoek met tophoek van 36°. Wat weet je van de basis t.o.v. de opstaande zijde? Bewijs dat. Hoe zou je nu in een cirkel met gegeven straal de regelmatige 10-hoek construeren? Hoe verdeel je een lijn in uiterste en middelste reden? En als een gegeven lijnstuk het grootste u.m. stuk is van een lijn, hoe vind je dan de gehele lijn terug? Toon dat in je constructie duidelijk aan. Construeer nu in de gegeven cirkel de regelmatige 10-hoek. Verbind punt A met de opvolgende punten B, C, D, E en F. Bereken elk van deze lijnen, als de straal 10 cm is. Welke twee zie je direct? Met welke stelling kun je de andere twee vinden? Bewijs de stelling van Pythagoras.

Waar ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek? Is er ook een ingeschreven cirkel mogelijk? Is bij een rechthoek een omgeschreven cirkel mogelijk? En ook een ingeschreven cirkel? Waarom niet? Welke eigenschap heeft een raaklijnenvierhoek? Bewijs.

Als je de zijde van een ingeschreven n-hoek weet, hoe vind je dan de zijde van de omgeschreven n-hoek? Bewijs:

$$A_n = \frac{2a_nR}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

EXAMEN 5.

Van $\triangle$ ABC is $\angle B = 2 \times \angle A$. Toon aan, dat sin C = = sin 3A. Vul het teken in: sin A = ..+.. sin suppl. A; tg A = ..−.. tg suppl. A; cotg A = ..−.. cotg suppl. A; cos A = = ..−.. cos suppl. A. Toon deze regels aan met behulp van een figuur. Toon met behulp van de grafiek van $y = \sin x$ (voor x tussen 0° en 180°) aan, dat sin x = sin v. h. suppl. van x. Hoe bepaal je met behulp van de tafel sin 160°? Tot hoeveel graden loopt de tafel der gon. verhoudingen? Verklaar, dat als in de tafel boven een kolom der gon. verhoudingen ,,sinus'' staat, er onder ,,cos'' staat en omgekeerd. Bepaal cos 130°37′.

Teken een $\triangle$ ABC, AB = 18, BC = 20 en AC = 16 cm. Bereken de bissectrice van $\angle$ C. Welke eigenschappen gebruik je hierbij? Bewijs deze. Neem nu op de basis AB een punt P, zodat AP = 6 cm. Kun je nu CP berekenen? Hoe luidt de stelling van Stewart? Kun je hem bewijzen? Kun je deze stelling ook gebruiken om het bewijs voor de bissectrice-formule te geven? Doe het eens. Hoe luidt de formule voor de buitenbissectrice?

Construeer nu eens de lijn $x^2 = ab - cd$, waarbij a, b, c en d gegeven lijnstukken zijn. Kun je het op 2 manieren?

Om een cirkel is een gelijkbenig trapezium beschreven; een been is 3 cm. Hoe groot is dan de omtrek? Bereken ook de evenwijdige zijden, als deze zich verhouden als 1 : 2. Bereken nu de straal van de ingeschreven cirkel. (Kan op 3 manieren!) Op één der manieren verleng je de opstaande zijden. Bewijs: $r = \frac{O}{s}$. Noem het middelpunt I. Kun je ook de afstanden van I tot de hoekpunten van de driehoek berekenen?

Welke lijnen in deze driehoek kun je aanduiden met $s - a$, $s - b$ en $s - c$? Toon dat aan.

Zoek ook de twee andere manieren om r te vinden. (Aanwijzing: 1e. hoogtelijn van het trap. is $2r$. 2e. loodlijn uit I op een been is middelevenredig tussen ....).

EXAMEN 6.

Teken een scherphoekige driehoek ABC met de hoogtelijnen AD en BE. Hoe loopt DE? Druk CD uit in b en een gon. verhouding van C. Toon daarna aan, dat DE $= c \cos$ C. CF is de derde hoogtelijn; vul in: DF $=$ b cos B en EF $=$ c cos A. Druk $\angle$ EDF uit in één van de hoeken van $\triangle$ ABC en toon daarna aan, dat de opp. van $\triangle$ DEF $= \frac{1}{2}bc \sin 2\text{A} \cos \text{B} \cos \text{C}$. Als $c = 12$ cm, $\angle \text{A} = 70°$ en $\angle \text{B} = 48°$, hoe bereken je dan b? En hoe vind je sin 2A of sin 140°? Bestaat log sin 140°? En log cos 140°? Bepaal tg 140°. Is tg 40° $>$ tg 35°? Is cos 40° $>$ cos 35°? Is sin 150° $>$ sin 140°?

Teken een willekeurige vierhoek. Verander deze in een vierkant. Wat maak je er eerst van? Waarom heeft die driehoek dezelfde oppervlakte? Wat voor constructie is het nu geworden? Construeer $x = a\sqrt{7}$ met behulp van Pythagoras. Laat in de nu geconstrueerde rechthoekige driehoek de loodlijn neer op de hypothenusa. Bereken de verhouding van de stukken, waarin deze loodlijn de hypothenusa verdeelt. Welke eigenschap gebruik je? Kun je nu ook de loodlijn zelf berekenen?

Teken 2 cirkels M en N, die buiten elkaar liggen. Construeer de gemeenschappelijke inwendige raaklijn. Waar ligt het inwendig gelijkvormigheidspunt? In welke verhouding verdeelt dit de centraal? Waarom? Geef een definitie van gelijkvormige driehoeken. Welke gelijkvormigheidsgevallen ken je? Bewijs er een van. Als de cirkels elkaar uitwendig raken, waar ligt dan het inwendige gelijkvormigheidspunt?

Teken eens zo'n figuur. Teken nu de gemeenschappelijke inwendige raaklijn. Neem op deze raaklijn punt P. Teken uit P een snijlijn door cirkel M en een door cirkel N. Bewijs, dat het product der stukken op beide snijlijnen gelijk is.

Hoe groot is de zijde van een regelmatige 6-hoek? En van een 4-hoek? Toon aan, dat $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

EXAMEN 7.

Druk uit in gon. verhoudingen van hoeken kleiner dan 45°: sin 144°, tg 140°, cos 80°, cotg 100°. Als $\sin x = \frac{1}{2}$, hoe groot is x dan? Als $\sin x = \sin 40°$, hoe groot is x dan? Als $\sin(B - C) = \sin A$, wat weet je dan van $\triangle$ ABC? Kan in een driehoek DEF gelden sin D : sin E : sin F = 1 : 2 : 3? Waarom niet? Bereken de grootste hoek van $\triangle$ PQR, als sin P : sin Q : sin R = 1 : $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$. Ook als geldt sin P : sin Q : sin R = 4 : 5 : 6. Ook als de sinussen der hoeken zich verhouden als 4 : 5 : 7. Hoe zie je aan de lengten der zijden, of een driehoek recht-, scherp- of stomphoekig is?

Gegeven is een gelijkbenig trapezium ABCD met een basishoek van 60°. Als een been en de kortste evenwijdige zijde 4 cm zijn, bepaal dan de oppervlakte. Waarom trek je CE // AD? Hoe vind je nu de hoogtelijn? Bewijs de hoogtelijnformule.

Hoe krijg je de oppervlakte van het trapezium? Bewijs ook deze formule. Kan door de punten A, B en C een cirkel beschreven worden? Waar ligt het middelpunt? Bereken ook de diagonalen. Kan ook om het trapezium zelf een cirkel beschreven worden? En als het ongelijkbenig is? Waarom dan niet? Wanneer kan in een trapezium een cirkel beschreven worden? Licht je antwoord toe. Bewijs, dat in een raaklijnenvierhoek de sommen der overstaande zijden gelijk zijn. Waarom zijn de raaklijnen uit één punt aan een cirkel getrokken, gelijk? Bewijs. Hoe construeer je zo'n raaklijn? Op welke eigenschap berust dit? Bewijs dat een omtrekshoek de helft is van de boog, waarop hij staat. Hoe groot is een binnencirkelhoek? En een buitencirkelhoek? Teken een buitencirkelhoek P. Noem de snijpunten met de cirkel op de ene snijlijn opvolgend A en B en op de andere opvolgend D en C. Bewijs dat AD en BC antiparallel lopen t.o.v. hoek P. Wat voor figuur is ABCD? Toon aan, dat de buitenhoek van $\angle$ B gelijk is aan $\angle$D.

EXAMEN 8.

De projectie van een lijnstuk a op een lijn l is gelijk aan a maal de cos. van de hoek tussen a en l. Bewijs dat. Leid hieruit af, dat voor een driehoek geldt $c = b \cos A + a \cos B$ (twee gevallen nagaan: $\angle$ A is scherp of stomp). De cos. is in I en II resp. pos. en neg. volgens ....

Van een driehoek is de zijde a constant en $\angle$ A is veranderlijk. Druk R uit in a en A en leid hieruit af voor welke waarde van A de R minimaal is.

Vul in: $\cos x = 1$, $x =$ 0°; $\sin x = 0$, $x =$ 0° of 180°; $\operatorname{tg} x = -1$, $x =$ 135°; $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x = ..°$ of $..°$. Wat gebeurt er met tg x, als x van 45° naar 90° loopt? oplopen.

Teken $\triangle$ ABC. Hoe krijg je de voetpuntendriehoek van deze $\triangle$? Hoe lopen de zijden hiervan t.o.v. de zijden van $\triangle$ ABC? In welk geval lopen deze zijden tevens weer parallel? Wat voor driehoek moet dan $\triangle$ ABC zijn? Als de hoogtelijn hiervan $6\sqrt{3}$ cm is, bereken dan de oppervlakte van de voetpuntendriehoek. Wat is de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek? Verander deze in een vierkant met hetzelfde oppervlak. Welke evenredige is dit? Verdeel een willekeurige driehoek in 2 delen, die zich verhouden als 2 : 5, door een lijn $/\!/$ aan een zwaartelijn. Hoe verhouden zich de oppervlakken van gelijkvormige driehoeken? Bewijs. Welke eigenschappen ken je van de zwaartelijn? Teken een driehoek ABC. AB = 12, AC = 10 en BC = 8 cm. Met welke formule bereken je de zwaartelijn uit C? Pas deze toe en geef daarna het bewijs.

Verleng de zwaartelijn CD met zichzelf. Toon aan, dat $2CD < AC + BC$. Bewijs nu ook, dat de som der zwaartelijnen kleiner is dan de omtrek. En groter dan de halve omtrek.

Hoe groot is de omtrek van een cirkel? En de oppervlakte? Hoe construeer je een cirkel, die gelijk is aan de som van 2 gegeven cirkels? Deel nu de oppervlakte van deze nieuwe cirkel in 2 gelijke delen door een concentrische cirkel. Hoe vind je de nieuwe straal?

EXAMEN 9.

Bepaal de andere goniometrische verhoudingen van een hoek in II, als $\operatorname{tg} x = -3$.

Welke goniometrische verhoudingen kunnen voorgesteld worden door $\frac{a}{b}$ als $a > b$? En als $a < b$?

a, b en c zijn gegeven lijnen en A en B zijn gegeven hoeken; construeer nu $x = a \cos A$, $y = \frac{ab \sin A}{c \cos B}$, $z = c \operatorname{tg} A \sin B$.

Van een scherphoekige driehoek zijn de zijden 8, 9 en 10 cm. Bereken de sinus van de kleinste hoek.

Als $\sin A < \frac{1}{2}$, dan ligt $\angle$ A tussen ....° en ....° of tussen ....° en ....°. Als $0 < \operatorname{tg} A < 1$, dan ligt x tussen ....° en ....°. Waarom kan cos A nooit 3 zijn? Kan de cotangens alle waarden aannemen? Zoek in de tafel de hoek A op, waarvoor geldt $\operatorname{cotg} A = 3$.

Teken een $\triangle$ ABC. Hoe construeer je daarin de ingeschreven cirkel? Hoe groot is nu r? Noem het raakpunt met de zijde AC eens D. Hoe groot is dan AD? En CD? Construeer nu de aangeschreven cirkel aan AB. Hoe vind je het middelpunt? Deze cirkel raakt het verlengde van CA in E. Hoe lang is CE? Bewijs. Als nu de omtrek ($2s$) en r (straal ingeschr. cirkel) en r_c (straal aangeschr. aan AB) gegeven zijn, kun je dan de driehoek construeren? Wat weet je van $\triangle CEI_c$? Voer nu de constructie uit. Noem middelpunt ingeschreven cirkel I. Waarom is dan $AIBI_c$ een koordenvierhoek? Waarom is $\angle IAI_c = 90°$?

Hoe verhouden zich in 't algemeen de stukken, waarin een buitenbissectrice de overstaande zijde verdeelt? Bewijs deze eigenschap. En hoe bereken je de buitenbissectrice als de zijden gegeven zijn? Kun je deze formule bewijzen?

Teken in een cirkel een middelpuntshoek van 60°. Teken in deze sector een cirkel, die aan de beide stralen en aan de cirkelboog raakt. Hoe groot is de straal van deze ingeschreven cirkel als de oorspronkelijke straal R is?

EXAMEN 10.

Bereken de zijde c van een scherphoekige driehoek, waarvan $a = 7$, $b = 5$ en $\cos C = \frac{19}{35}$.

Een toren is 50 m hoog. Van de top ziet men een voorwerp op de grond onder een hoek van 8° met de horizon. Hoever ligt dat voorwerp van de toren vandaan?

Bepaal x uit: $\sin(90 - x) + \dfrac{1}{\sin(90 - x)} = 4\frac{1}{4}$; hoe groot is $\operatorname{tg} 2x$?

Los ook op: $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3\frac{1}{3}$; $\operatorname{tg} x$ en $\operatorname{cotg} x$ zijn elkaars .... Bepaal $\operatorname{cotg}(90 - x) \cdot \operatorname{cotg} x$.

Teken in $\triangle ABC$ de ingeschreven cirkel en noem 't raakpunt met de basis D. Hoe groot is nu AD? Verleng CA en CB en teken de cirkel, die aan AB en aan deze verlengden raakt. Noem het raakpunt met AB nu E. Hoe groot is dan AE? Waarom? En wat weet je dan van DE? Als nu gegeven is de straal van de ingeschreven cirkel (r), de straal van de aangeschreven cirkel (r_c) en het verschil der opstaande zijden, kun je dan de driehoek construeren? Geef duidelijk aan hoe je de gemeenschappelijke uitwendige raaklijn aan twee cirkels construeert. Als $r = 2$ en $r_c = 6$, met welk getal moet dan cirkel

I_c vanuit C vermenigvuldigd worden om cirkel I te krijgen? Vermenigvuldig cirkel I nu eens met -2 vanuit hetzelfde centrum van vermenigvuldiging.

Teken een hoek A van 45°. Pas op de benen gelijke stukken AB en AC af van 6 cm. Bereken nu BC. Waarom is deze lijn a_8 in een cirkel met $R = 6$ cm? Druk a_8 uit in R en a_4. Construeer $x = \sqrt{a^2 - ab}$. Ook $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$. Kun je het ook ineens? (zie examen 11)

EXAMEN 11.

Bereken de hoeken van een rechthoekige driehoek, waarvan de zijden een r.r. vormen. Van een andere rechthoekige driehoek is de grootste rechthoekszijde 2 × de kleinste. Bepaal de sinus van de kleinste hoek en ga na of deze $< 30°$, $= 30°$ of $> 30°$. Ga na, dat $\sin x < \frac{1}{2}$ als $x < 30°$. Volgt nu uit $0 < \sin x < \frac{1}{2}$, dat $x < 30°$? Tussen welke grenzen ligt x als $0 < \cos x < \frac{1}{2}$? Teken de grafieken van $y = \sin x$ en $y = \cos x$ (in I en II) en beantwoord met behulp hiervan de beide voorgaande vragen.

Teken een $\triangle$ ABC, stomphoekig in A. Druk de projectie van AC op AB uit in de zijden. Welke stelling gebruik je hierbij? Bewijs deze stelling. Je trekt de hoogtelijn. Waar ligt in deze figuur het hoogtepunt? Bewijs, dat de drie hoogtelijnen altijd door 1 punt gaan. Je maakt er middelloodlijnen van. Kun je het ook als je de hoogtelijnen beschouwt als bissectrices? Wat is 'n voetpuntendriehoek? Bewijs de gebruikte eigenschap. Neem een scherph. driehoek. Noem het toppunt A, de basis BC, $\angle C = 60°$. Druk nu AB uit in de zijden a en b. Bekijk je antwoord eens goed. Kun je nu ineens construeren de lijn $x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$? Construeer een cirkel, die r tot straal heeft en van een gegeven rechte een koorde k afsnijdt. Waar ligt het middelpunt dan? Hoeveel cirkels zijn er mogelijk? Wat is de m.p. van deze middelpunten? Als de gevraagde cirkel een andere gegeven rechte moet raken, hoeveel gevallen zijn er dan mogelijk? Ga dit goed na.

Teken om een driehoek ABC de omgeschreven cirkel O. Zoek het hoogtepunt H en noem het midden van AB eens M. Kun je bewijzen, dat CH = 2MO? Trek daartoe AO door tot hij de cirkel snijdt in D. Waarom is nu DB = 2MO. En waarom is CHBD een parallelogram?

EXAMEN 12.

Los x op uit: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \sin x) + (1 - \sin x)^2 + \dots + (1 - \sin x)^n = \frac{5}{8}$. Bepaal $\cos x$. Voor welke hoeken in I is de cosinus groter dan de sinus? De tafel geeft de grootten van tg en cotg; teken $y = \mathrm{tg}\, x$ en $y = \mathrm{cotg}\, x$ voor een hoek in I en lees van deze grafiek af, wanneer $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{cotg}\, x$, $\mathrm{tg}\, x > \mathrm{cotg}\, x$, $\mathrm{tg}\, x < \mathrm{cotg}\, x$, $\mathrm{tg}\, x = 2$, $\mathrm{cotg}\, x = 0$. Kan $\mathrm{tg} x = 1000$? Kan $\sin x = 2$? Kan $\sin x + \cos x = 1$? Voor welke hoek in II geldt $\sin x + \cos x = 0$? Kan deze betrekking ook gelden voor een hoek in I? Waarom niet? Ligt de hoek x, waarvoor geldt $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ in I of in II? Kun je zo zien, hoe groot x is?

Teken een cirkel met ingeschreven $\triangle$ ABC. Teken in A een raaklijn aan de cirkel. Laat uit C loodlijnen neer op deze raaklijn (= EC) en op AB (= CD). Bewijs dan, dat BC $\times$ EC = DC $\times$ AC. Welke driehoeken zijn gelijkvormig? Bewijs dit gelijkvormigheidsgeval. Wat is ADEC voor een vierhoek? Waarom is AC de middellijn van de omgeschreven cirkel? Trek nu in B ook een raaklijn, en laat uit C een loodlijn CF neer op deze raaklijn. Welke driehoeken zijn nu weer gelijkvormig? Bewijs dan weer dat DC $\times$ BC = AC $\times$ FC. Kun je nu uit de gevonden gelijkheden bewijzen dat DC middel evenredig is tussen CF en CE? Waaraan is DC in de eerste gelijkheid gelijk? En in de tweede? Vermenigvuldig nu eens deze waarden.

Hoe construeer je een middelevenredige? Construeer ook $x = \frac{1}{2}\sqrt{ab(-1 + \sqrt{5})}$. Welke vorm komt je bekend voor?

Hoe verdeel je een lijn u.m.?

Welke veelhoek heeft het grootste u.m. stuk van de straal tot zijde?

Ken je ook een middeltje om ineens de a_5, a_6 en a_{10} van een bepaalde cirkel te vinden?

Kun je nu bewijzen, dat $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$. Reken het met de formules eens na.

EXAMEN 13.

Twee krachten K_1 en K_2 hebben hetzelfde aangrijpingspunt; hun richtingen maken een hoek van $a°$ met elkaar. Bepaal de grootte van de resultante; ook haar richting, d.w.z. de hoek met K_1 of K_2. Als $a = 90°$, wordt de resultante ....

Van een gelijkbenig trapezium is de basis 18 cm, een been 10 cm en een basishoek 70°. Hoe bereken je de andere evenwijdige zijde en de hoogte?

Construeer hoek x, als $\sin x = \sqrt{3} - 1$.

Construeer een driehoek als de drie zwaartelijnen gegeven zijn. Van welke eigenschap maak je gebruik? Bewijs dat.

Wat is een middenparallel? Bewijs, dat deze evenwijdig loopt aan de basis. Ook dat deze lijn gelijk is aan de halve basis. Welke eigenschap gebruik je nu? Is elk trapezium een koordenvierhoek? Als je nu van een trapezium weet, dat het een koordenvierhoek en tevens een raaklijnenvierhoek is, bereken dan de oppervlakte als de evenwijdige zijden 6 en 14 cm zijn.

Hoe vind je de hoogte? Leid de hoogtelijnformule zelf eens af. Construeer een vierhoek, die een koorden- en een raaklijnenvierhoek is.

Construeer met behulp van vermenigvuldiging een gelijkbenige driehoek, als de tophoek en de som van basis en hoogtelijn op de basis gegeven zijn.

Teken een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 30°. De basis is $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. Bereken de oppervlakte. Neem nu eens de opstaande zijde $6\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Hoe bereken je dan het oppervlak?

EXAMEN 14.

Op één der benen van een hoek van 53°8′ ligt een punt P op een afstand van 12 cm. Uit P laat men een loodlijn neer op het andere been; uit dit punt laat men weer een loodlijn neer op het 1e been; bepaal de som van al deze loodlijnen, als dit proces tot in het oneindige wordt voortgezet. Laat zien, dat $\sin^2 53°8' + \cos^2 53°8' = 1$; ook dat $\operatorname{tg} 53°8' = \frac{\sin 53°8'}{\cos 53°8'}$.

Bepaal de straal van een cirkel als $A_9 = 15$ cm; ook als $a_9 = 15$ cm. Bewijs, met behulp van een middelpuntsdriehoek van een regelmatige ingeschreven n-hoek de formule $\sin \frac{180°}{n} = \frac{a_n}{2R}$. Welke formule voor a_n kun je hieruit afleiden? Bepaal hiermee a_6 en a_8.

Hoe construeer je een hoek van 72°? Op welke manier vind je de a_5 die in de cirkel past? Hoe groot is elke hoek van een regelmatige 5-hoek? En van een 10-hoek? Hoeveel diagonalen kun je trekken in een 5-hoek? Toon aan, dat deze weer een regelm. 5-hoek insluiten. Noem de 5-hoek ABCDE; wat weet je dan van $\triangle$ ABD? AB is dan gelijk aan het .... van BD. Hoe verdelen dus de diagonalen elkaar?

Teken een cirkel. Construeer de ingeschreven regelmatige 8-hoek. Bewijs, dat de oppervlakte van deze 8-hoek gelijk is aan de halve omtrek maal het apothema van een zijde. Je kunt ook zeggen: oppervlak 8-hoek is omtrek 4-hoek $\times \frac{1}{2}$R. Toon dat aan.

Construeer $x = \frac{ab\sqrt{3}}{c}$, waarin a, b en c gegeven lijnstukken zijn. Welke evenredige is dit eigenlijk? En hoe vind je $b\sqrt{3}$ op zichzelf weer?

EXAMEN 15.

De stukken, waarin de schuine zijde van een rechthoekige driehoek door de hoogtelijn wordt verdeeld zijn 4 en 9 cm; bereken één der scherpe hoeken.

De afstand van de middelpunten van 2 cirkels is 20 cm; de stralen zijn 6 en 4 cm; bepaal de hoek, die de uitwendige raaklijnen vormen; ook die tussen de inwendige raaklijnen, alsmede die tussen een inwendige en een uitwendige raaklijn.

Herleid $\dfrac{\sin(45-a)}{\cos(45+a)}$; ook $\dfrac{\mathrm{tg}(45-a)}{\mathrm{cotg}(45+a)}$. Zet de volgende gon. verhoudingen om in gon. verh. van a: $\sin(180^\circ - a^\circ)$, $\mathrm{tg}(90^\circ + a^\circ)$, $\sin(90^\circ - a^\circ)$, $\cos(180^\circ - a^\circ)$.

Hoe teken je gemakkelijk een regelm. 6-hoek? Hoe groot is a_6?

Teken de regelmatige zeshoek ABCDEF. Hoe groot is de som der hoeken? En elke hoek? Hoe bereken je de opp. van deze 6-hoek? Verbind nu B met D, D met F en F met B. Wat voor figuur is nu BFD? Kun je aantonen dat de oppervlakte van deze 3-hoek de helft is van de 6-hoek?

Teken een cirkel. Middellijn AB is 13 cm. Trek koorde AD $=$ 5 cm en koorde BC $=$ 5 cm (C en D aan dezelfde kant van AB). Verbind D met C. Wat is nu ABCD voor een figuur? Waarom? Kun je de oppervlakte van ABCD bepalen?

Welke lijn moet je dan eerst weten? Laat uit C een loodlijn neer op AB. Trek ook AC. Welke driehoeken zijn nu gelijkvormig? Reken nu de oppervlakte uit.

Wat is de oppervlakte van een vierhoek, met loodrecht op elkaar staande diagonalen? Bewijs.

Als een gelijkzijdige driehoek en een vierkant dezelfde omtrek hebben, welke figuur heeft dan het grootste oppervlak. Toon aan.

EXAMEN 16.

Twee torens staan op een horizontaal vlak. De kleinste toren is a m. Vanuit de top van de kleinste toren ziet men de afstand van de voeten der torens onder een hoek van $b°$ en de hoogste toren onder een hoek van $c°$. Geef de weg aan ter berekening van de hoogste toren.

Welke bijzonderheid heeft een driehoek, als $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$; als $a^2 = b^2 + c^2 \pm bc$; als $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \sin A$; als $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \sin B$?

Ontbind een kracht van 10 kg in 2 andere, die er hoeken van 44° en 32° mee maken.

Hoe groot is de r.c. van $2x + 3y = 6$; teken de grafiek van deze lijn. De r.c. is de tangens van ....

Trek in $\triangle$ ABC de hoogtelijnen AD en BE; ze snijden elkaar in H. Bewijs dat AH $\times$ HD = BH $\times$ HE. Doe het eerst met gelijkvormige driehoeken. Beschouw nu AD en BE als snijlijnen in een cirkel, die door A, B, D en E gaat. Waarom liggen deze punten op een cirkel?

Teken een rechthoekige $\triangle$ ABC ($\angle$ B = 90°). AC = 13 cm en BC = 12 cm. Op CB als middellijn beschrijft men een cirkel, die AC in D snijdt. Bereken CD. Welke eigenschap kun je hier toepassen? Bewijs.

Construeer $x = \sqrt{a(a + b)}$.

Teken een hoek A van 36°. Neem been AB = 15 cm en been AC = 12 cm. Verbind B met C. Bereken nu de oppervlakte van deze driehoek. Wat is een sector? Een segment? Wat versta je onder de pijl hiervan? Wat is het apothema van een koorde? Hoe bepaal je het oppervlak van een sector?

Wat is de m.p. van de middelpunten der cirkels, die een straal R hebben en de omtrek van een gegeven cirkel middendoor delen? Welke lijn deelt de omtrek van een cirkel middendoor?

EXAMEN 17.

Van $\triangle$ ABC is AC = 8 cm, BC = 12 cm en $\angle$ B = 28°2′. Bereken $\angle$A. Hoeveel oplossingen? En hoeveel als AC = 13 cm? Bewijs de sinusregel. De cosinusregel gebruiken we, als ....

In een cirkel met straal 10 cm is een regelmatige twaalfhoek beschreven; geef de manier aan ter berekening van de zijde en de diagonalen. Doe hetzelfde voor de omgeschreven regelmatige twaalfhoek. Hoe bereken je de oppervlakken van die veelhoeken?

Druk in de straal R van een cirkel uit de koorde, die een boog van 73°44′ onderspant. Welke boog wordt in deze cirkel onderspannen door 1,66R? Bepaal de pijl van het afgesneden segment.

Van een rechth. driehoek vormen de 3 zijden een m.r. Bepaal de reden van die reeks. Laat zien, dat de kleinste rechthoekszijde het grootste u.m. stuk is van de hypotenusa. Construeer die driehoek als de grootste rechthoekszijde gegeven is. Als je een driehoek vermenigvuldigt t.o.v. een punt, dan is de productfiguur een ....; als je een cirkel vermenigvuldigt is de productfiguur .... Waar ligt het uitwendig gelijkvormigheidspunt U van 2 cirkels? Van 2 cirkels zijn de stralen R en r. Hoe groot is de vermenigvuldigingsfactor, als we de grote cirkel uit de kleine laten ontstaan door vermenigvuldiging vanuit U? En vanuit I (inw. gelijkv. punt)? En als we de kleine uit de grote laten ontstaan? Als we een rechte lijn vanuit een punt met 3 vermenigvuldigingen ontstaat een evenwijdige rechte, die 3 $\times$ zo lang is. Bewijs.

Verander een ruit in een vierkant. Welke eigenschap heeft een vierkant boven een ruit? En welke heeft een ruit boven een parallelogram?

EXAMEN 18.

De 3 zijden van een rechthoekige driehoek vormen een r.r.; als A de kleinste hoek is, bewijs dan: $2 \sin A + \cos A = 2$.

De lichaamsdiagonaal van een kist maakt met de drie ribben, ? die in één van haar uiteinden samenkomen hoeken A, B en C. Bewijs, dat $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$. Bepaal de hoek, die een lichaamsdiagonaal van een kubus maakt met een ribbe; bepaal ook de hoek, waaronder twee lichaamsdiagonalen elkaar snijden.

Toon aan, dat $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$. Toon aan, dat
? $\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{cotg}^2 A = \dfrac{1}{\sin^2 A \cos^2 A} - 2$.

Teken een flinke scherphoekige $\triangle$ ABC. Construeer de omg. cirkel O. Construeer de 3 hoogtelijnen. Ze snijden elkaar in H. Verleng de hoogtelijn CF tot ze de omg. cirkel in G snijdt. Bewijs, dat HF = FG. Als M het midden van de basis is, toon dan aan, dat CH = 2 × OM. De lijnen HM en CO snijden elkaar bij verlenging in K. Toon aan, dat K op de cirkelomtrek ligt en laat zien, dat HM = MK. Toon aan, dat er een cirkel bestaat, die door de middens der zijden, de voetpunten der hoogtelijnen en de middens van de bovenste stukken der hoogtelijnen gaat. Daartoe heb je slechts de omg. cirkel van $\triangle$ ABC vanuit H te vermenigvuldigen met .... Die cirkel heet de negenpuntscirkel of cirkel van Feuerbach. Als de straal van de omg. cirkel van $\triangle$ ABC R is, hoe groot is dan de straal van de negenpuntscirkel N? En waar ligt zijn middelpunt? Laat zien, dat op de lijn OH (rechte van Euler geheten) ook het zwaartepunt Z ligt. Bereken de verhouding HN : NZ : ZO. Als van $\triangle$ ABC de basis en tophoek gegeven zijn, hoe groot is dan $\angle$ AHB? Wat is dan de m.p. van H? En van N? En van Z?

EXAMEN 19.

Een vuurtoren is h m hoog. De lijn uit de top naar schip A getrokken maakt met het horizontale vlak een hoek van $a°$, evenzo de lijn naar schip B een hoek van $b°$, terwijl deze 2 lijnen een hoek van $c°$ met elkaar maken. Geef de manier aan om de afstand der schepen te berekenen.

Van een ruit is de zijde 10 cm; één der hoeken is 42°16′. Bepaal de oppervlakte en de straal van de ingeschreven cirkel.

Het middelpunt van de ing. cirkel van een driehoek is M, dat van de aang. cirkel aan de zijde c is N. Bewijs, dat $s =$ $= \mathrm{CN} \cos \frac{1}{2}\mathrm{C}$ en dat $c = \mathrm{MN} \cos \frac{1}{2}\mathrm{C}$. Als de in- en aangeschreven cirkels BC resp. raken in D en E, druk dan CD uit in de zijden van de driehoek. Hoe zijn de formules voor de stralen van de ing. en aang. cirkels. Bewijs de formule voor r_c. Wat is NEDM voor een vierhoek? Wat is een trapezium? Kan een trapezium wel een koordenvierhoek zijn? En een raaklijnenvierhoek? Van een raaklijnenvierhoek ABCD is $\mathrm{AB} = 12$, $\mathrm{BC} = 10$ en $\mathrm{CD} : \mathrm{DA} = 3 : 4$. Bereken CD en DA. Bewijs de eigenschap: Als de sommen van de overstaande zijden van een vierhoek gelijk zijn, dan kan in die vierhoek een cirkel beschreven worden. Halveer het trapezium NEDM door een lijn te trekken door D. Bewijs de constructie. Hoe bepaal jé de oppervlakte van een driehoek, een trapezium, een vierhoek met loodrechte diagonalen? Geef een betrekking tussen $\angle$ NCE en 2 bogen van de cirkel. Bewijs ze. Een raaklijn staat loodrecht op .... Bewijs.

Construeer x uit $x = \frac{2}{3}a\sqrt{5}$ op 2 manieren. Waarop berusten deze constructies?

EXAMEN 20.

Geef de manier aan om de afstand tot twee ontoegankelijke punten te bepalen, die zichtbaar zijn vanuit twee toegankelijke punten.

Van rechthoek ABCD is AB = 10 cm en de hoek der diagonalen is 110°. Bereken de diagonaal en de oppervlakte.

Druk de zijde *a* van een driehoek uit in de straal R van de omgeschreven cirkel en hoek A; bewijs daarna, dat de oppervlakte van een driehoek is $2R^2 \sin A \sin B \sin C$. Hoe is de oppervlakte-formule uit de meetkunde? Geef de manier aan ter afleiding van deze formule. Ook is de opp. = $\frac{1}{2} \times \ldots \times \times \ldots$ Neem op de zijde AC van △ ABC een punt P aan, zodat AP = $\frac{2}{3}$AC. Trek door P twee lijnen, die de driehoek in drie gelijke delen verdelen.

Verander △ ABC in een gelijkbenige met ∠ A als tophoek. Ook in een gelijkzijdige.

Construeer de omgeschreven cirkel O van △ ABC. Construeer daarin de hoogtelijnen en trek die door tot ze de cirkel snijden (AA_1, enz.) Bewijs: bg AB′ = bg AC′; druk deze bogen uit in de hoeken van de driehoek. Bepaal daarna de hoeken van △ A′B′C′. De hoogtelijnen van △ ABC zijn .... van △ A′B′C′. Als het voetpunt van h_a D is, van h_b E en van h_c E, en als het hoogtepunt H is, bewijs dan: HD = DA′; toon daarna aan, dat de zijden van de voetpuntendriehoek evenwijdig zijn aan die van △ $A_1B_1C_1$. Deze driehoek kunnen we ontstaan denken door △ DEF vanuit H te vermenigvuldigen met .... Opp. △ $A_1B_1C_1$ = ... × opp. △ DEF. Bewijs. DE is .... met AB t.o.v. ....; evenzo dus .... Wanneer noem je 2 driehoeken gelijkvormig? In welke gevallen zijn ze gelijkvormig? Bewijs er één. Wat is een m.p.? Welke 2 dingen te bewijzen? Welke m.p. kwam in dit examen ter sprake?
